

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

**Задания и методические указания
к расчетно-проектировочным работам
по курсу «Строительная механика»**

для студентов специальностей

70 03 01 «Автомобильные дороги»;

70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций»;

69 01 01 «Архитектура».

Брест 2003

УДК 624.04

Задания и методические указания к расчетно-проектировочным работам по строительной механике для студентов специальностей: 70.03.01 – «Автомобильные дороги»; 70.01.01 – «Производство строительных изделий и конструкций»; 69 01 01 – «Архитектура».. /Сост. И.С. Сыроквашко; Брестский государственный технический университет. – Брест, 2003. – с., бил., табл.

Задания на расчетно-проектировочные работы содержат в себе комплекс задач по строительной механике, составленных в соответствии с учебными планами для данных специальностей. К каждому заданию приводятся методические указания по их выполнению, даны примеры расчета.

Составитель – И.С. Сыроквашко, доцент, к.т.н.

Рецензент: директор Республиканского унитарного научно-исследовательского и опытно-конструкторского предприятия «Научно-технический центр», к.т.н. А.Я. Найчук

©Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет», 2003

Требования к оформлению расчетно-проектировочных работ.

1. Работа выполняется в карандаше или в туши (по желанию студента) на листах писчей бумаги размером 297x210 мм.
2. Все чертежи должны быть выполнены с соблюдением масштаба. Все чертежи и записи должны равномерно располагаться по всей площади листа.
3. Перед решением каждой задачи необходимо вычертить заданную схему со всеми нагрузками и указать на ней все размеры и величины нагрузок в буквах и цифрах (например: $l_1 = 10$ м, $P = 5$ кН). Решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными пояснениями. На эпюрах и линиях влияния должны быть проставлены значения всех характерных ординат. Все чертежи и эпюры должны быть обозначены.
4. Не следует приводить подробности арифметических расчетов. Записывается только арифметическое действие и ответ.
5. Исходные данные для решения задачи выбираются студентом из таблиц вариантов в соответствии с полученным шифром.

ЗАДАЧА № 1

Расчет статически определимой многопролетной балки

Для балки, выбранной согласно шифру (табл. 1, рис. 1) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от заданной нагрузки.
2. Построить линии влияния двух опорных реакций (по выбору студента), линии влияния ${}^2M^2$ и ${}''Q^2$ для трех указанных сечений.
3. С помощью линий влияния вычислить значения усилий ${}^2M^2$ и ${}''Q^2$ в заданных сечениях и сравнить их со значениями, полученными аналитически.

Таблица 1

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра	Номер схемы балки	l_1 , м	Вторая цифра шифра	l_2 , м	l_3 , м	P_1 , кН	Третья цифра шифра	P_2 , кН	q_1 , $\frac{кН}{м}$	Четвертая цифра шифра	q_2 , $\frac{кН}{м}$	Номера сечений	Номер схемы нагрузки
1	1	6,0	1	8,0	9,2	5,0	1	9,0	2,0	1	3,0	1,3,8	1
2	2	6,2	2	7,6	8,8	5,2	2	9,5	2,2	2	3,5	2,6,9	2
3	3	6,4	3	7,2	9,0	5,4	3	10,0	2,4	3	3,8	1,5,9	3
4	4	6,6	4	6,8	8,6	5,6	4	10,5	2,6	4	4,0	2,5,6	4
5	5	6,8	5	6,4	8,4	5,8	5	11,0	2,5	5	4,2	3,7,8	5
6	6	7,0	6	7,4	8,2	6,0	6	12,0	2,8	6	4,4	1,3,7	6
7	7	7,2	7	7,8	8,0	6,4	7	11,5	3,0	7	4,6	2,4,6	7
8	8	7,4	8	8,2	7,6	6,2	8	8,0	3,2	8	5,0	9,7,3	8
9	9	7,6	9	6,6	7,2	6,6	9	7,0	3,4	9	5,2	4,7,9	9
0	0	7,8	0	7,6	7,4	6,8	0	6,0	3,6	0	3,6	1,5,7	0

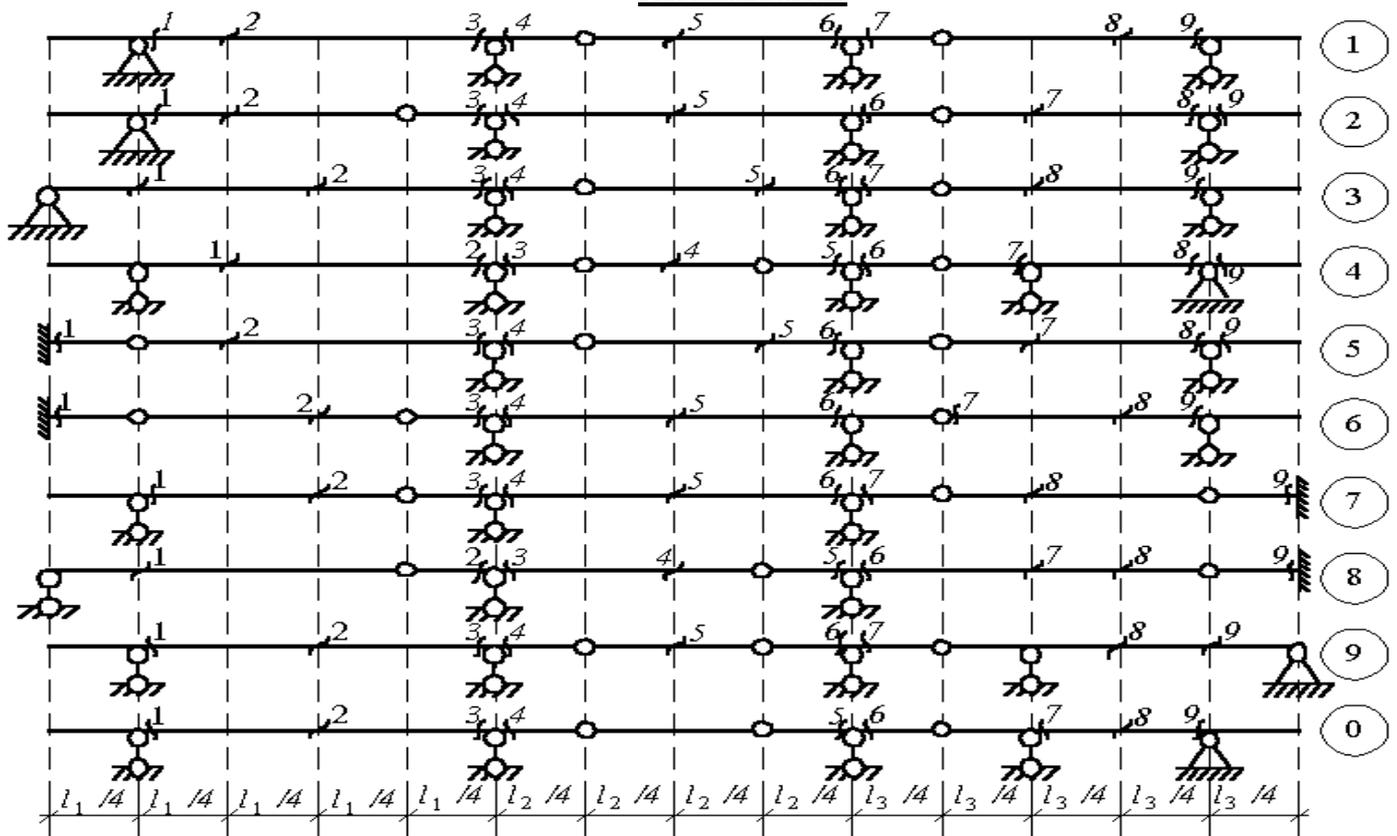
Методические указания.

При расчете многопролетной разрезной балки в первую очередь необходимо представить схему взаимодействия отдельных простых балок между собой. Для этого строится так называемая «поэтажная схема» многопролетной балки. Для построения «поэтажной схемы» нужно выявить основные и второстепенные балки, что делается путем разрезания многопролетной балки по промежуточным шарнирам. Те балки, которые окажутся способными нести заданную нагрузку, считаются основными. Второстепенные балки имеют только одну наземную опору или не имеют их вообще. Недостающими опорами для них являются соединительные шарниры.

После построения «поэтажной схемы» заданная многопролетная балка

может рассматриваться как совокупность простых однопролетных балок.

Схема балок



Схемы нагрузок

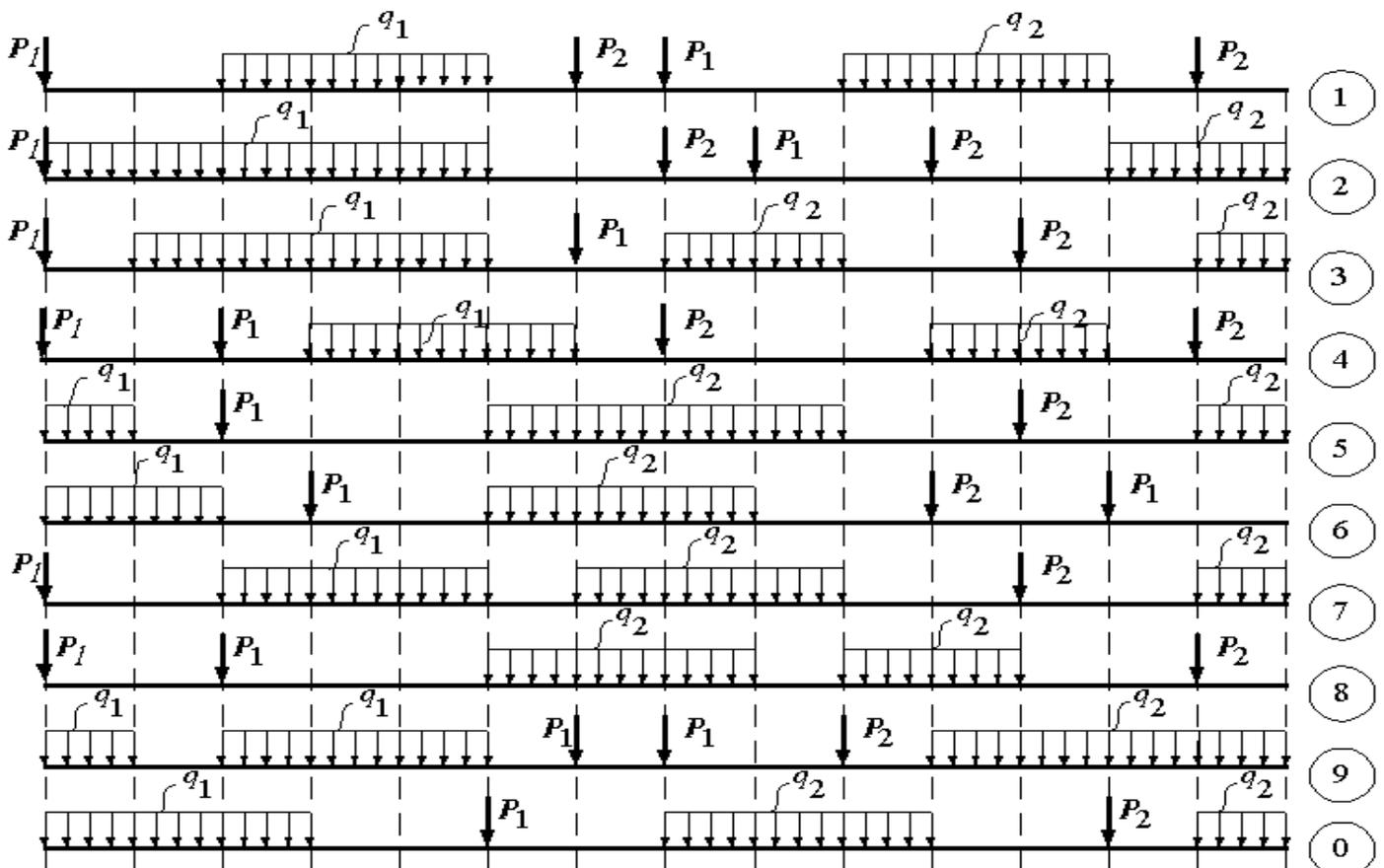


Рис. 1

На каждую нижележащую балку нужно учесть действующую на нее заданную внешнюю нагрузку и давление вышележащих балок (опорные реакции, взятые с обратным направлением).

Расчет следует начинать с самой верхней второстепенной балки. Каждая балка рассчитывается на действующую на нее внешнюю нагрузку и давление от вышележащих балок.

При действии на балку внешней нагрузки в ней могут возникать 3 вида внутренних усилий: изгибающие моменты, поперечные и продольные силы. Последние могут возникать в балках при действии наклонных или действующих вдоль оси балки внешних сил.

Изгибающим моментом в каком-либо сечении конструкции называется внутренняя пара сил, численно равная сумме моментов всех внешних сил, включая опорные реакции, расположенных с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести данного сечения.

Поперечной (перерезывающей) силой в каком-либо сечении называется сумма проекций всех внешних сил, расположенных с одной стороны от сечения на нормаль к оси стержня в данном сечении.

Продольной силой в каком-либо сечении называется сумма проекций всех внешних сил, расположенных с одной стороны от сечения, на касательную к оси стержня (при прямолинейном стержне – на ось стержня) в данном сечении.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если она стремится повернуть отсеченную часть конструкции по часовой стрелке.

Продольная сила в сечении считается положительной, если она вызывает растяжение в рассматриваемом сечении конструкции (направлена от сечения).

Ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны растянутых волокон балки. Знаки на эпюре изгибающих моментов не ставят, но обязательно нужно указывать значения ординат эпюры во всех характерных сечениях балки. Положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются сверху от оси балки с указанием знака поперечной силы.

Для построения эпюр внутренних усилий полезно запомнить ряд правил:

1. На прямолинейном незагруженном участке стержня эпюра моментов прямолинейна, а эпюра поперечных сил параллельна оси.
2. На участке стержня, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра моментов очерчена по квадратной параболе, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки и имеющей стрелку, равную $ql^2/8$, а эпюра поперечных сил прямолинейна и наклонна к оси.
3. В сечении стержня, где приложена сосредоточенная сила, эпюра моментов имеет излом, острием направленный в сторону действия силы, а эпюра поперечных сил получает скачок, равный величине силы, умноженной на синус угла наклона силы к оси стержня.
4. В точке приложения сосредоточенного внешнего момента, эпюра моментов получает скачок на величину момента, эпюра поперечных сил не

изменяется.

Построение линий влияния внутренних усилий и опорных реакций выполняется в следующей последовательности:

1. Составляется схема взаимодействия простых однопролетных балок.
2. Строится линия влияния искомого усилия для той однопролетной балки, которой принадлежит данная опора или данное поперечное сечение.
3. Линии влияния распространяются на все вышележащие балки, опирающиеся на данную.
4. Вычисляются ординаты во всех характерных сечениях из подобия треугольников.

Пример.

Для балки, расчетная схема которой изображена на рис. 2, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных сил от постоянной нагрузки. Построить линию влияния реакции опоры C , изгибающего момента и поперечной силы в сечении 1 и определить по ним усилия от постоянной нагрузки.

Решение.

Изображаем схему взаимодействия отдельных элементов балки (рис. 2б). Расчет начинаем с определения опорных реакций второстепенных балок AB и EF .

Из уравнения $\sum M_B = 0$ для балки AB находим

$$R_A \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 0; R_A = 18 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0; \quad 4 \cdot 6 \cdot 1 - R_B \cdot 4 = 0; \quad R_B = 6 \text{ кН.}$$

Для балки EF

$$\sum M_E = 0; \quad -8 + R_F \cdot 4 = 0; \quad R_F = 2 \text{ кН.}$$

$$\sum M_F = 0; \quad -8 + R_E \cdot 4 = 0; \quad R_E = 2 \text{ кН.}$$

Полученные реакции R_B и R_E с обратным направлением прикладываем к балке CD (рис. 2в).

$$\sum M_C = 0; \quad -6 \cdot 2 + 20 \cdot 4 - R_D \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 0; \quad R_D = 11 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = 0; \quad -6 \cdot 2 + 20 \cdot 4 - R_C \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 0; \quad R_C = 17 \text{ кН.}$$

Учитывая, что изгибающий момент в любом сечении равен сумме моментов всех внешних сил (включая опорные реакции), расположенных с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести данного сечения, а поперечная сила в сечении равна сумме проекций всех сил с одной стороны от сечения на перпендикуляр к оси стержня в данном сечении, строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в балке (рис. 2г, 2д). При построении эпюр рассматриваем отдельные однопролетные балки с их нагрузкой и опорными реакциями и объединяем эти эпюры на одной оси многопролетной балки.

Для построения линий влияния (л.в.) усилий в балке рассматриваем балку, находящуюся под воздействием только одной подвижной сосредоточенной силы $P = 1$.

При построении л.в. R_C рассмотрим балку CD . Расстояние до движущейся силы $P = 1$ от опоры D обозначим x . составим уравнение моментов всех сил

балки CD относительно опоры D :

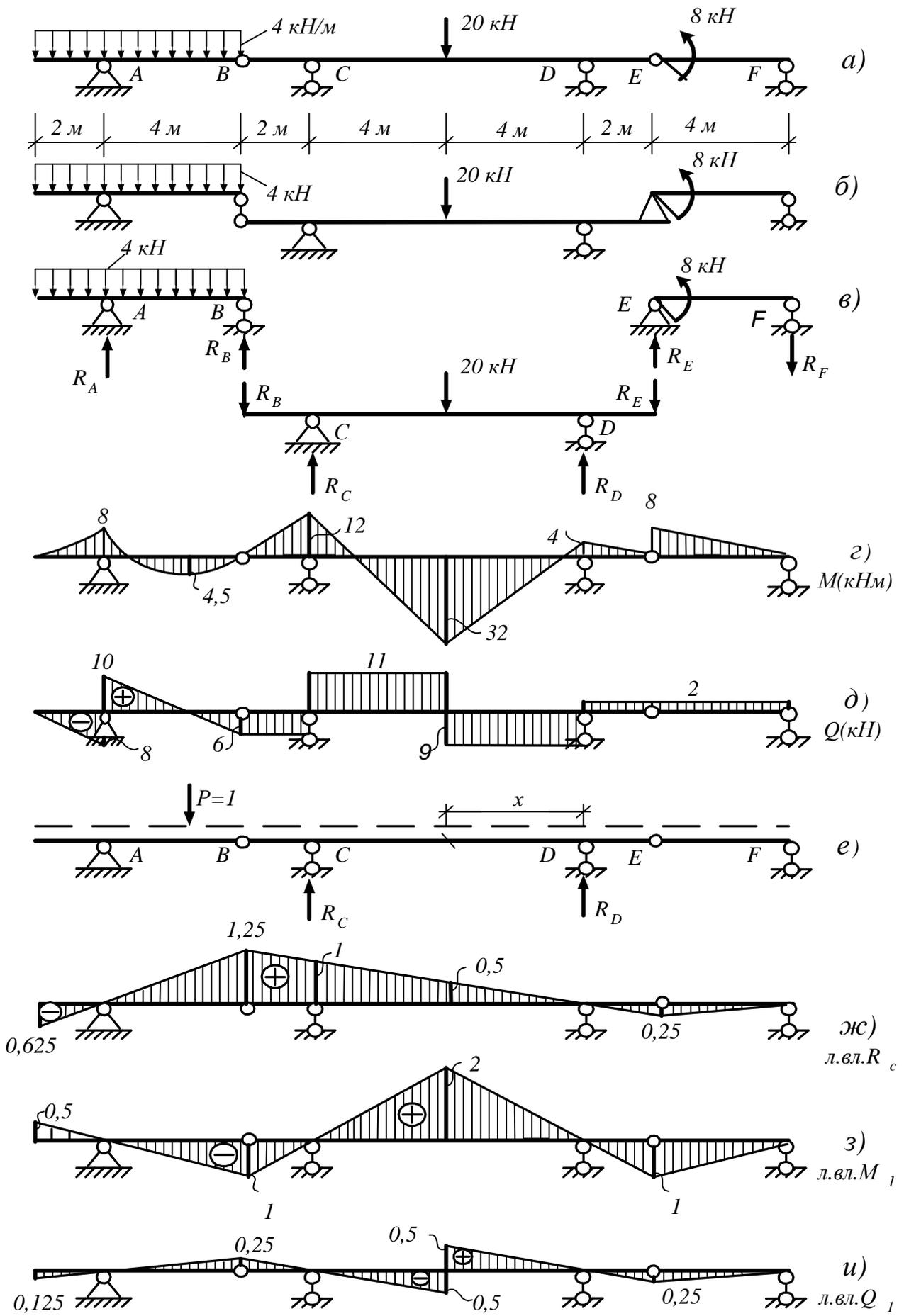


Рис.2

$$\sum M_D = 0; -P \cdot X + R_C \cdot 8 = 0; R_C = \frac{1 \cdot X}{8},$$

при $X = 8 - R_C = 1$;

при $X = 0 - R_C = 0$.

По полученным двум точкам проводим прямую на протяжении всей балки. Ординаты линии влияния в точках B и E находим из подобия треугольников. При нахождении груза над опорами A и F этот груз уравнивается опорными реакциями R_A и R_F и поэтому все усилия в любом другом сечении балки равны нулю. Соединив ординаты линий влияния в точках B и E с нулевыми ординатами в точках A и F , получим окончательную линию влияния R_C (рис. 2ж).

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении 1 также рассмотрим балку CD . При движении груза слева от сечения 1 рассмотрим равновесие правой части балки

$$M_1 = R_D \cdot 4$$

Построив линию влияния опорной реакции R_D и умножив ее ординаты на 4, получим левую ветвь линии влияния M_1 . При расположении груза справа от сечения 1

$$M_1 = R_C \cdot 4,$$

следовательно правая часть линии влияния M_1 может быть получена умножением ординат линии влияния R_C на 4. Левая и правая части линии влияния M_1 должны пересечься под сечением 1. Соединив ординаты линий влияния в точках B и E с нулевыми ординатами в точках A и F , получим окончательную линию влияния M_1 (рис. 2з).

Линию влияния поперечной силы Q_1 строим аналогично предыдущей линии влияния. При движении груза слева от сечения 1: $Q_1 = -R_D$

При движении груза справа от сечения 1: $Q_1 = R_C$.

Соединив крайние ординаты линий влияния в точках B и E с нулевыми ординатами в точках A и F , получим искомую линию влияния (рис. 2и).

Для определения усилий R_C, M_1 и Q_1 от постоянной нагрузки нужно каждую из сосредоточенных сил умножить на ординату л.в. под этой силой (со своим знаком), интенсивность распределенной нагрузки умножить на площадь линии влияния под этой нагрузкой, а величину сосредоточенного момента на тангенс угла наклона л.в. на прямолинейном участке этой линии влияния.

$$Z = \sum P_i \cdot y_i + \sum g_i \cdot w_i + \sum M_k \cdot \operatorname{tg} \alpha_k.$$

$$R_C = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 0,625 \cdot 2 \right) + 20 \cdot 0,5 + 8 \cdot \left(-\frac{0,25}{4} \right) = 17 \text{ кН};$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 4 + 20 \cdot 0,5 + 8 \cdot \left(-\frac{0,25}{4} \right) = 11 \text{ кН};$$

$$M_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) + 20 \cdot 2 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 32 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

ЗАДАЧА № 2

Расчет простейшей рамы

Для рамы, выбранной согласно шифру (табл. 2, рис. 3) требуется:

1. От заданной нагрузки определить опорные реакции и построить эпюры изгибающих моментов поперечных и продольных сил (“M”, “Q”, “N”).
2. Проверить равновесие узлов и качественное выполнение известных закономерностей в изменении эпюр усилий.

Таблица 2

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра. Номер схемы рамы	l_1 , м	P_1 , кН	Вторая цифра шифра	h_1 , м	q , $\frac{кН}{м}$	Третья цифра шифра	l_2 , м	P_2 , кН	Четвёртая цифра шифра	h_2 , м	m , кН·м
1	4,0	3	1	3,0	2,2	1	6,0	2	1	4,2	6
2	4,2	4	2	3,2	2,0	2	5,8	3	2	4,4	8
3	4,4	5	3	3,4	2,4	3	5,6	4	3	4,0	9
4	4,6	6	4	3,6	2,6	4	5,4	5	4	3,8	10
5	4,8	7	5	3,8	2,8	5	5,2	6	5	4,6	11
6	5,0	8	6	4,0	3,0	6	5,0	7	6	3,6	12
7	5,2	9	7	4,2	3,2	7	4,8	8	7	3,4	14
8	5,4	10	8	4,4	3,4	8	4,6	9	8	3,2	16
9	5,6	11	9	4,6	3,6	9	4,4	10	9	3,0	18
0	5,8	12	0	4,8	3,8	0	4,2	12	0	5,0	20

Методические указания.

Расчет рамы начинается с определения опорных реакций. Они определяются из уравнений равновесия статики.

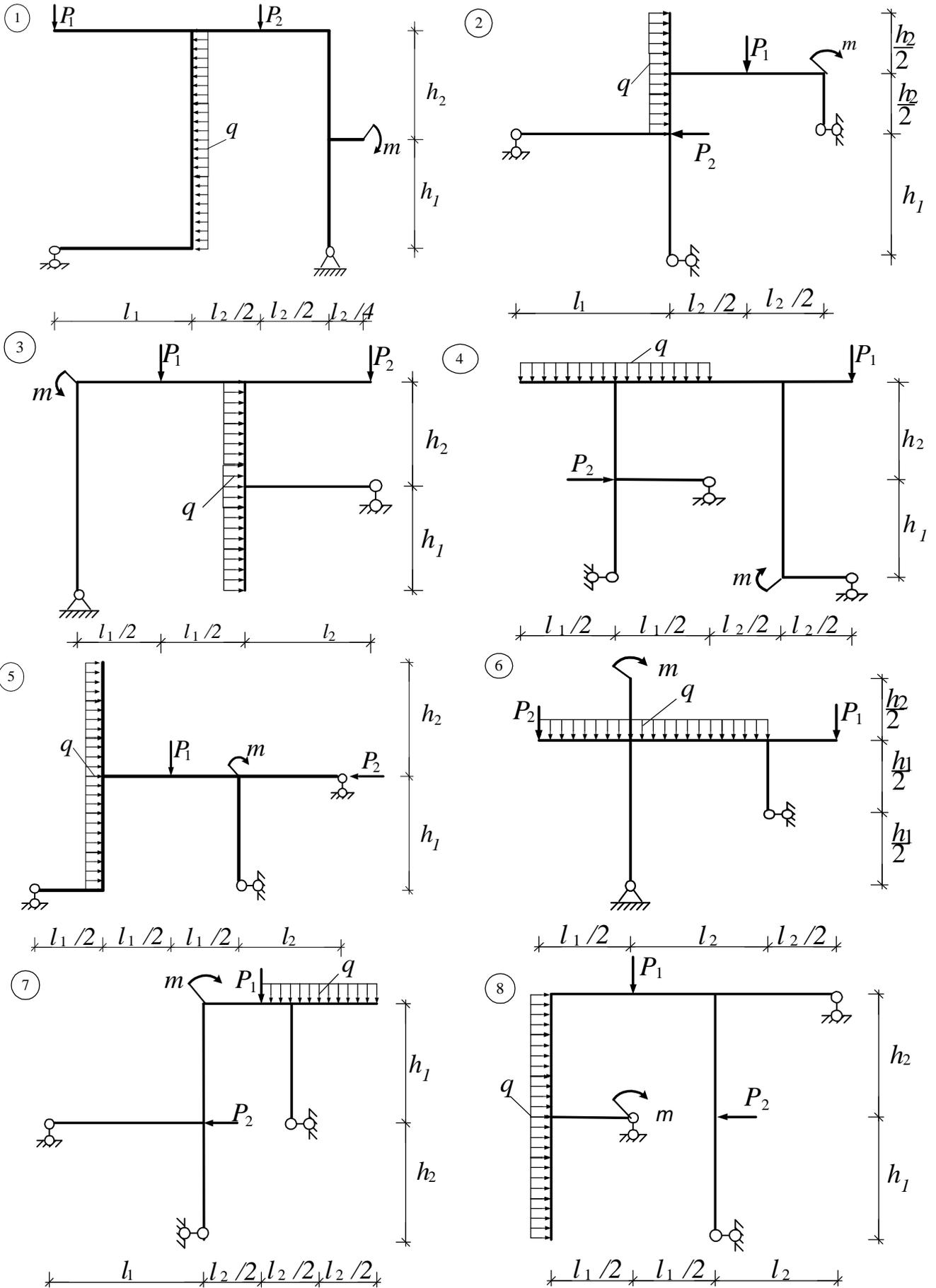
$$(\sum M_k = 0; \quad \sum X = 0; \quad \sum Y = 0)$$

При действии на раму внешней нагрузки в любом поперечном сечении стержней может возникать три вида внутренних усилий: изгибающий момент, поперечная и продольная силы.

Определение внутренних усилий выполняется на основе метода сечений, согласно которому в заданной точке стержня проводится сечение, разделяющее раму на две части, и рассматривается равновесие одной (любой из них) части.

Если определяется изгибающий момент в сечении, то составляется уравнение

Схемы рам



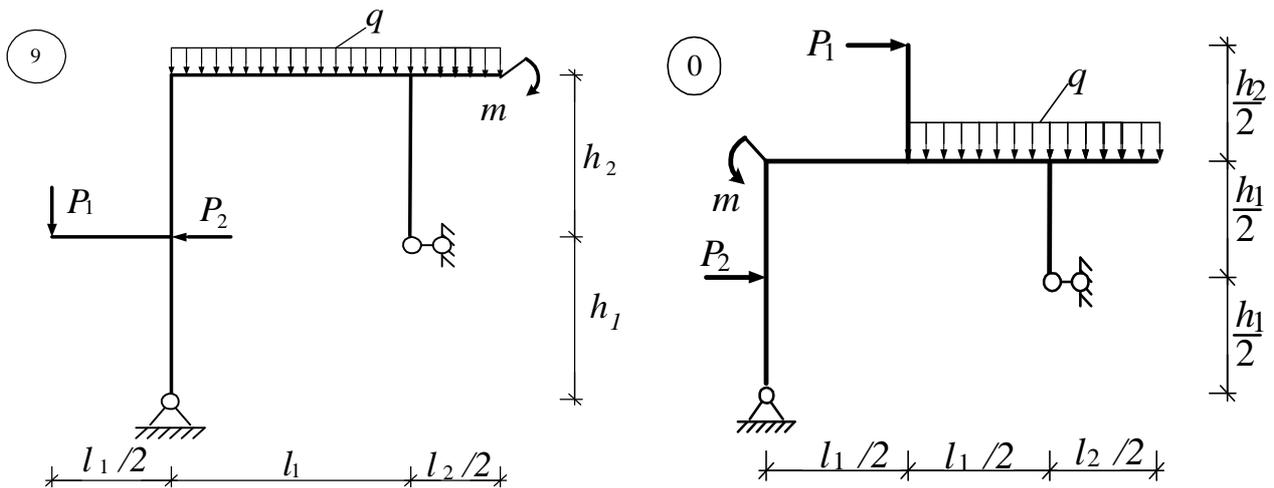


рис. 3

моментов всех внешних сил (включая опорные реакции) с одной стороны от сечения. Если определяется поперечная сила, то составляется уравнение проекций всех сил с одной стороны от сечения на перпендикуляр к оси в данном сечении стержня. Если определяется продольная сила, то составляется уравнение проекций всех сил с одной стороны от сечения на ось стержня.

Для наглядного распределения усилий по всем сечениям рамы строятся эпюры внутренних усилий. Ординаты эпюры изгибающих моментов откладывают со стороны растянутых волокон стержня. Ординаты эпюр поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны стержня с указанием знаков.

Пример расчета: Для заданной рамы (рис. 4а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и проверить равновесие узлов.

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_K = 0; \quad -12 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3 - R_C \cdot 12 = 0 \quad R_C = 5 \text{ кН}$$

$$\sum X = 0; \quad 2 \cdot 6 - H_B = 0 \quad H_B = 12 \text{ кН}$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_A \cdot 12 - 12 - 6 \cdot 6 + H_B \cdot 3 = 0 \quad R_A = 1 \text{ кН}$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad 1 + 5 - 6 = 0$$

Строим эпюру изгибающих моментов:

$$M_B = 0; \quad M_1 = H_B \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36 \text{ кН} \cdot \text{м (растянуты правые волокна);}$$

$$M_A = 0; \quad M_2 = R_A \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м (растянуты нижние волокна);}$$

$$M_3 = R_A \cdot 4 + H_B \cdot 3 = 4 + 36 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м (растянуты правые волокна);}$$

$$M_4 = R_A \cdot 4 + H_B \cdot 6 = 4 + 72 = 76 \text{ кН} \cdot \text{м (растянуты правые волокна);}$$

$$M_5 = M_4 - 12 = 64 \text{ кН} \cdot \text{м (растянуты нижние волокна);}$$

$$M_6 = R_A \cdot 6 + H_B \cdot 6 - 12 = 6 + 72 - 12 = 66 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты нижние волокна);}$$

$$M_7 = R_C \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 3 = 20 + 36 = 56 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты нижние волокна);}$$

$$M_8 = M_7 = 56 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты левые волокна);}$$

$$M_9 = R_C \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 29 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты левые волокна);}$$

$$M_{10} = R_C \cdot 4 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты нижние волокна);}$$

$$M_{11} = 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 9 \text{ кН}\cdot\text{м (растянуты левые волокна);}$$

$$M_{12} = 0; \quad M_C = 0.$$

Строим эпюру поперечных сил (рис. 4з):

$$Q_B = H_B = +12 \text{ кН} = Q_1;$$

$$Q_A = Q_2 = R_A = 1 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_4 = H_B = 12 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_6^{\text{лсв}} = R_A = 1 \text{ кН};$$

$$Q_6^{\text{сп}} = Q_7 = -R_C = -5 \text{ кН};$$

$$Q_8 = -q \cdot 6 = -12 \text{ кН};$$

$$Q_9 = -q \cdot 3 = -2 \cdot 3 = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{11} = Q_9 = -6 \text{ кН};$$

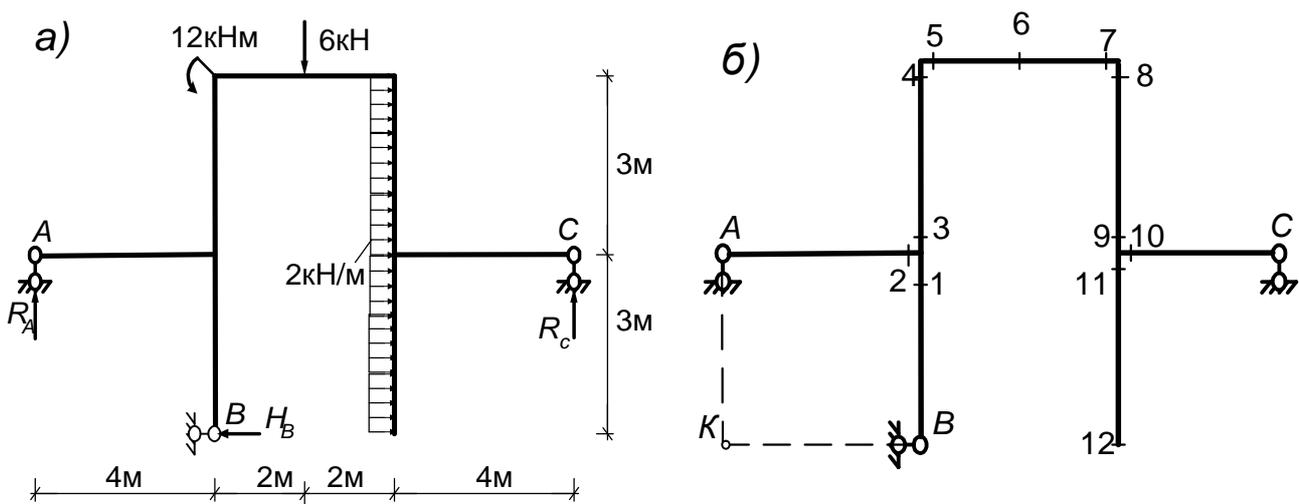
$$Q_{10} = Q_C = -R_C = -5 \text{ кН};$$

$$Q_{12} = 0.$$

Строим эпюру продольных сил (рис. 4д):

$$N_{B-1} = 0; N_{A-2} = 0; \quad N_{3-4} = -R_A = -1; \quad N_{5-7} = H_B = +12 \text{ кН};$$

$$N_{8-9} = -R_C = -5; \quad N_{10-C} = 0; \quad N_{11-12} = 0$$



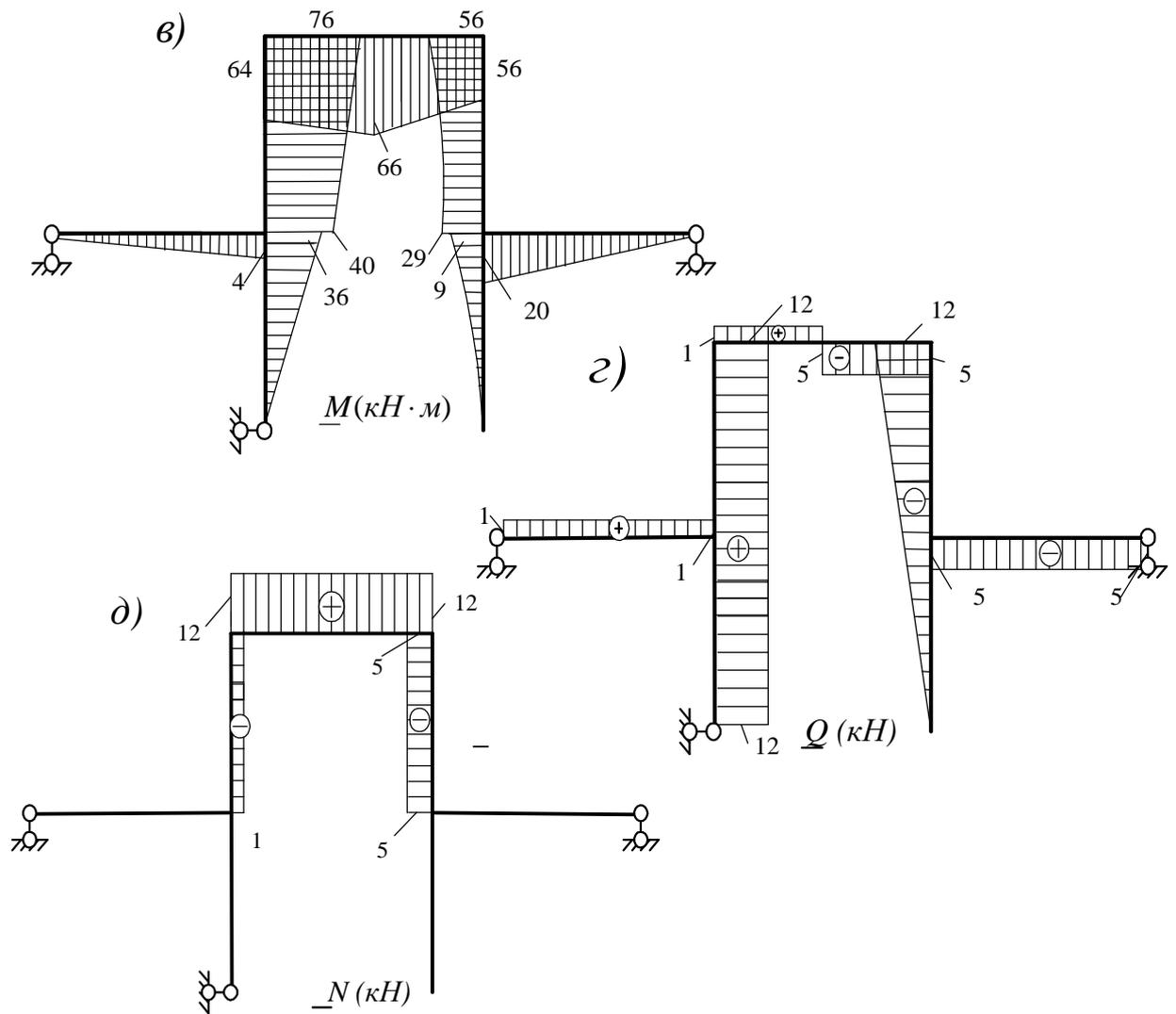


рис. 4

Проверяем равновесие узлов:

Узел 1-2-3

Узел 4-5

Узел 7-8

Узел 9-10-11

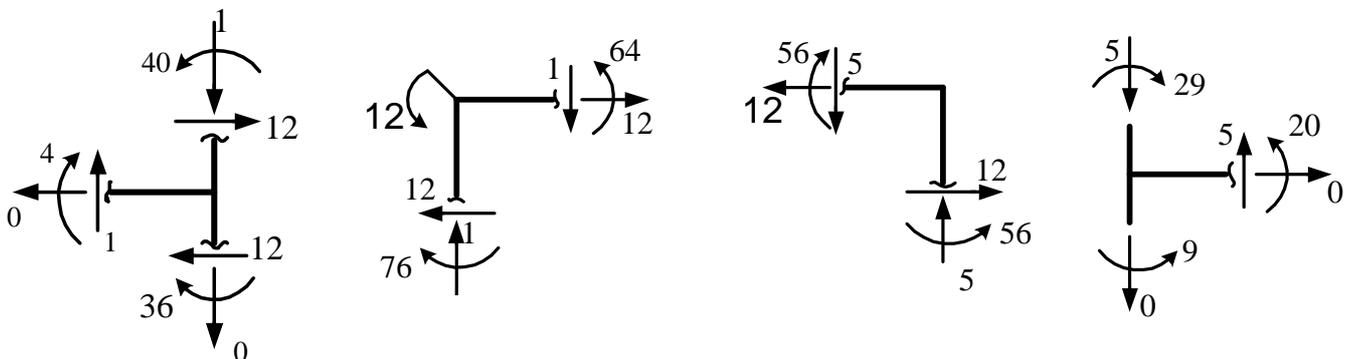


рис. 5

$$\sum M = 0;$$

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

ЗАДАЧА № 3.

Расчет трехшарнирной рамы.

Для рамы, выбранной согласно шифру (табл.3, рис.6) требуется:

1. Определить опорные реакции от заданной нагрузки.
2. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
3. Проверить равновесие узлов и выполнение дифференциальных зависимостей (качественно).

Таблица 3.

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра Номер схемы	a м	Вторая цифра шифра	b м	h м	Третья цифра шифра	q кН/м	Четвертая цифра шифра	P кН
0	3,0	0	2,6	1,5	0	2,0	0	10
1	3,2	1	2,8	2,0	1	2,4	1	12
2	3,4	2	3,0	2,6	2	2,2	2	14
3	3,6	3	3,2	2,5	3	2,8	3	16
4	3,8	4	3,4	3,1	4	3,2	4	18
5	4,0	5	2,4	3,5	5	3,0	5	20
6	4,2	6	3,6	4,2	6	3,4	6	15
7	4,4	7	3,8	3,0	7	2,6	7	17
8	4,6	8	4,0	3,6	8	2,5	8	8
9	4,8	9	4,2	4,5	9	2,3	9	6

Методические указания.

Рамами называют системы жестко или шарнирно соединенных в узлах стержней. В обычных ломаных стержнях соединение в узлах жесткое. Число опорных стержней в них не должно превышать трех. В статически определимых трехшарнирных рамах число опорных связей обычно превышает три, и внутри рамы имеется шарнир, соединяющий две части рамы. Особенностью расчета трехшарнирной рамы является способ определения опорных реакций. Если в ломаном стержне для определения опорных реакций достаточно составить три уравнения равновесия, чтобы определить три опорные реакции, то при расчете трехшарнирной рамы для определения четырех опорных реакций необходимо составить четыре независимых уравнения равновесия.

Схемы рам

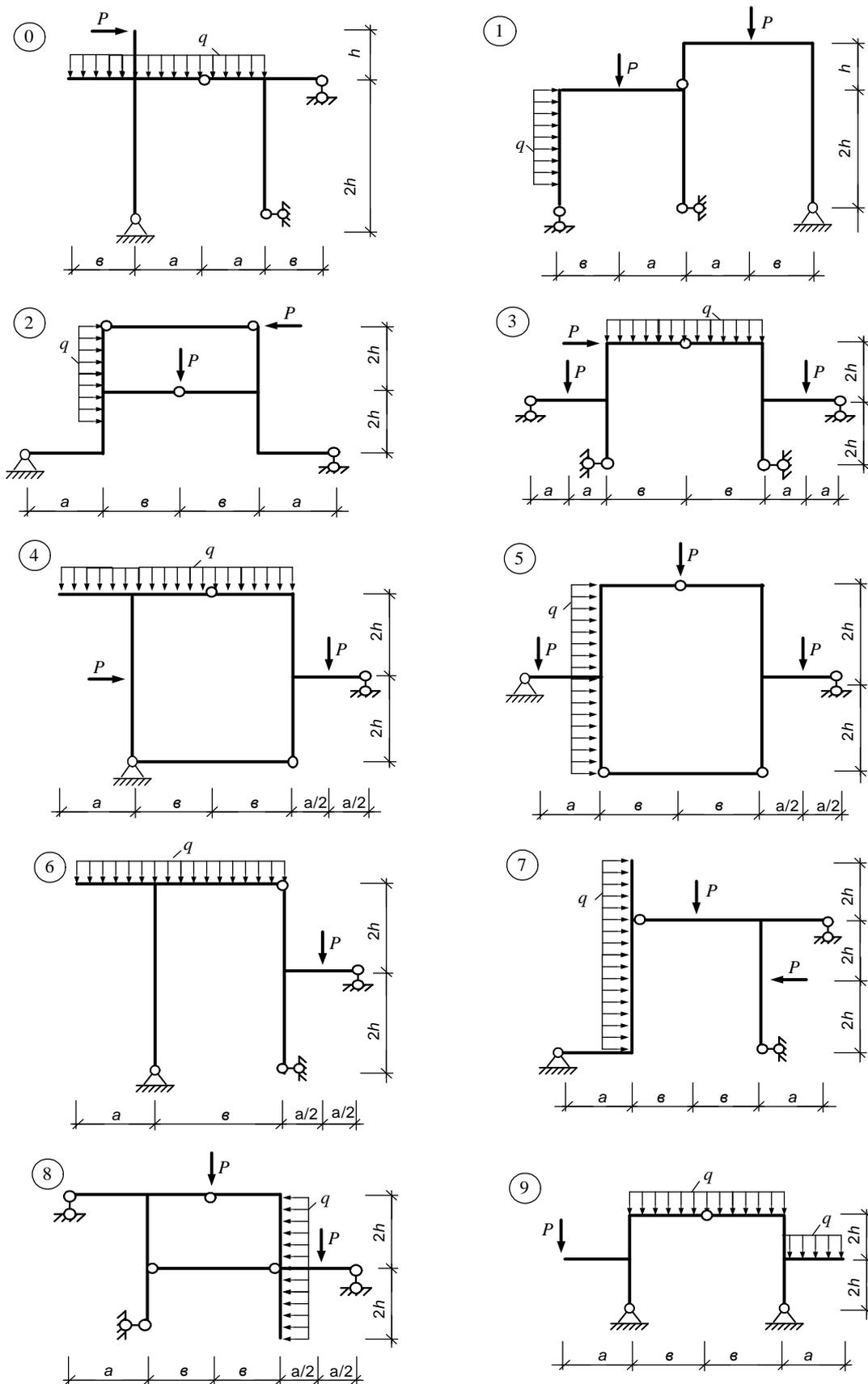


Рис.6

Дополнительное уравнение равновесия составляется из условия, что изгибающий момент в шарнире должен быть равен нулю, т.е. сумма моментов всех сил с одной стороны от среднего шарнира должна быть равна нулю.

При действии на раму внешней нагрузки в любом поперечном сечении стержней может возникать три вида внутренних усилий: изгибающий момент, поперечная и продольная силы.

Определение внутренних усилий в статически определимых системах выполняется на основе метода сечений, согласно которому в заданной точке стержня проводится сечение, разделяющее раму на две части, и рассматривается равновесие одной (любой из них) части. Если определяется изгибающий момент в сечении, то составляется уравнение моментов всех внешних сил (включая опорные реакции) с одной стороны от сечения относительно центра тяжести данного сечения. Если определяется поперечная сила, то составляется уравнение проекций всех сил с одной стороны от сечения на ось, перпендикулярную оси стержня. Если определяется продольная сила, то составляется уравнение проекций всех сил с одной стороны от сечения на касательную к оси стержня.

Напомним, что момент силы относительно какой-либо точки равен произведению силы на плечо (длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию действия силы). Сосредоточенный в сечении момент не умножается на плечо.

Для наглядного распределения усилий по всем сечениям рамы строятся эпюры внутренних усилий.

Ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны растянутых волокон стержня.

Ординаты эпюр поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны стержня, при этом, для наглядности, желательно, чтобы для участков, являющихся продолжением друг друга по прямой, ординаты одного знака откладывались с одной стороны.

Пример расчета.

Для заданной рамы (рис. 7а) с действующими на нее внешними нагрузками построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и проверить равновесие узлов.

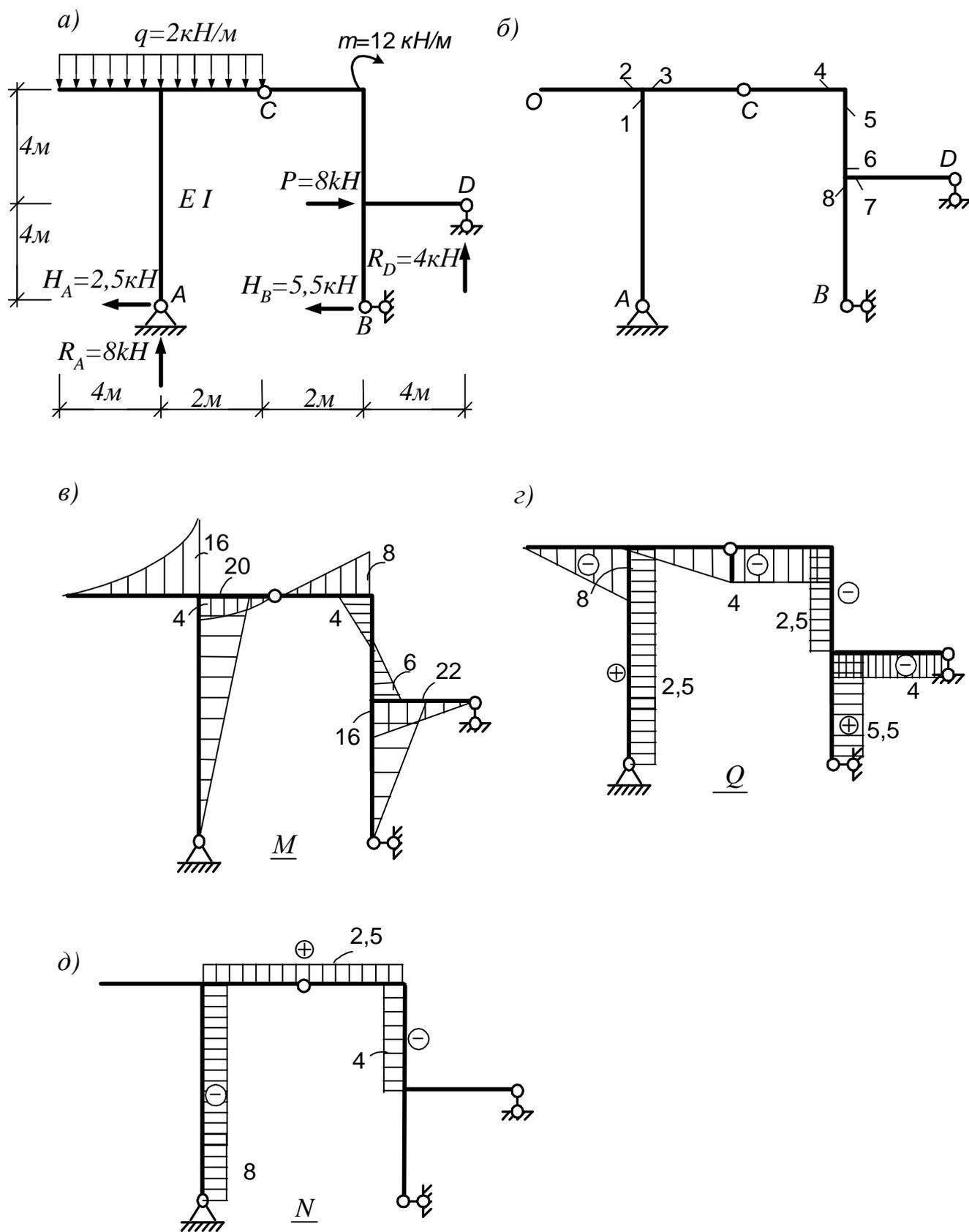


Рис. 7

Определяем опорные реакции

$$\sum M_A = 0; \quad -2 \cdot 6 \cdot 1 + 12 + 8 \cdot 4 - R_D \cdot 8 = 0; \quad R_D = +4 \text{ кН}$$

т.е. реакция R_D направлена, как и предполагалось, вверх.

$$\sum M_C^{np} = 0; \quad 12 - 8 \cdot 4 - R_D \cdot 6 + H_B \cdot 8 = 0; \quad H_B = 5,5 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0; \quad -2 \cdot 6 \cdot 4 + R_A = 0; \quad R_A = 8 \text{ кН}$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad -2 \cdot 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + H_A \cdot 8 = 20; \quad H_A = 2,5 \text{ кН.}$$

Проверка :

$$\sum X = 0; \quad -H_A - H_B + 8 = 0; \quad -2,5 - 5,5 + 8 = 0.$$

Строим эпюры внутренних усилий.

Эпюра изгибающих моментов (см. рис. 7б и 7в).

$$M_A = 0; \quad M_1 = H_A \cdot 8 = 2,5 \cdot 8 = 20 \text{ кНм; растянуты правые волокна.}$$

$$M_O = 0; \quad M_2 = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \text{ кНм; растянуты верхние волокна.}$$

$$M_3 = 2 \cdot 4 \cdot 2 - H_A \cdot 8 = 16 - 20 = -4 \text{ кНм; растянуты нижние волокна.}$$

$$M_C = 0; \quad M_4 = 12 - R_D \cdot 4 + H_B \cdot 8 - 8 \cdot 4 = 8 \text{ кНм; растянуты верхние волокна.}$$

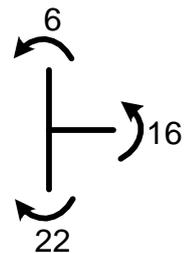
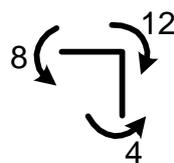
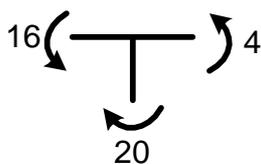
$$M_5 = -M_4 + 12 = -8 + 12 = 4 \text{ кНм; растянуты левые волокна.}$$

$$M_B = 0; \quad M_8 = H_B \cdot 4 = 5,5 \cdot 4 = 22 \text{ кНм; растянуты правые волокна.}$$

$$M_D = 0; \quad M_7 = R_D \cdot 4 = 16 \text{ кНм; растянуты нижние волокна.}$$

$$M_6 = M_8 - M_7 = 22 - 16 = 6 \text{ кНм; растянуты правые волокна.}$$

Проверяем равновесие узлов



Строим эпюру поперечных сил (рис. 7г)

$$Q_{A-1} = H_A = +2,5 \text{ кН.}$$

$$Q_0 = 0 \quad Q_2 = -q \cdot 4 = -2 \cdot 4 = -8 \text{ кН.}$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 4 = 8 - 2 \cdot 4 = 0.$$

$$Q_C = R_A - q \cdot 6 = 8 - 2 \cdot 6 = -4 \text{ кН.}$$

$$Q_{C-4} = Q_C = -4 \text{ кН.}$$

$$Q_{5-6} = H_B - 8 = 5,5 - 8 = -2,5 \text{ кН.}$$

$$Q_{B-8} = H_B = 5,5 \text{ кН.}$$

$$Q_{7-D} = -R_D = -4 \text{ кН.}$$

Строим эпюру продольных сил ${}^2N^2$ (рис. 7д).

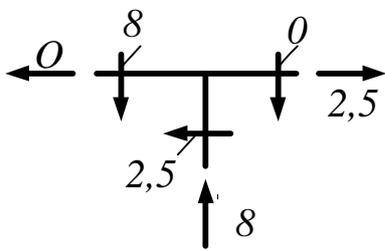
$$N_{A-1} = -R_A = -8 \text{ кН.}$$

$$N_{0-2} = 0; \quad N_{3-4} = H_A = +2,5 \text{ кН.}$$

$$N_{B-5} = 0; \quad N_{7-D} = 0.$$

$$N_{6-5} = -R_D = -4 \text{ кН.}$$

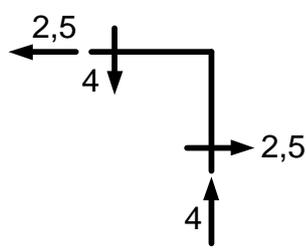
Проверяем равновесие узлов по эпюрам ${}^2Q^2$ и ${}^2N^2$.



Узел 1,2,3

$$\sum X = 0;$$

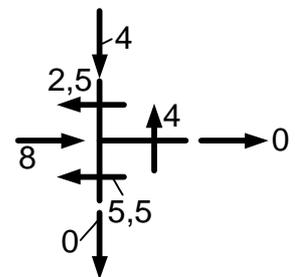
$$\sum Y = 0.$$



Узел 4,5

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = 0.$$



Узел 6,7,8

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = 0.$$

ЗАДАЧА № 4

Расчет трехшарнирной арки

Для арки, выбранной согласно шифру (табл.4, рис.8) и заданного очертания оси (по окружности – О, по параболе – П) требуется:

Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Таблица 4

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра	l , м	P_1 , м	$\frac{q_1, \text{кН}}{\text{м}}$	Вторая цифра шифра	$\frac{f}{l}$	β_1	P_2 , м	Третья цифра шифра	β_2	$\frac{q_2, \text{кН}}{\text{м}}$	Очертание оси	Четвертая цифра шифра Номер схемы нагрузок
1	16	8	2,0	1	0,2	0,1	4	1	0,55	2,2	П	1
2	18	6	2,5	2	0,25	0,12	7	2	0,6	2,4	О	2
3	20	5	3,0	3	0,3	0,14	9	3	0,62	2,6	П	3
4	22	9	3,5	4	0,4	0,15	11	4	0,65	2,8	О	4
5	24	10	4,0	5	0,35	0,2	12	5	0,7	3,0	П	5
6	26	12	4,5	6	0,22	0,3	13	6	0,72	3,5	О	6
7	28	14	5,0	7	0,32	0,35	15	7	0,75	3,6	П	7
8	30	15	5,5	8	0,34	0,4	18	8	0,8	4,0	О	8
9	32	16	6,0	9	0,4	0,25	20	9	0,82	4,2	П	9
0	34	17	6,5	0	0,36	0,18	22	0	0,85	5,2	О	0

Методические указания.

Трехшарнирная арка – распорная система в виде кривого бруса. В ее опорах под действием вертикальных нагрузок возникают как вертикальные, так и горизонтальные опорные реакции (распор H).

Очертания оси арки может быть задано по различным кривым. Геометрические параметры арок и сечений вычисляются по формулам: при очертании оси по квадратной параболе:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \operatorname{tg} j_{\kappa} = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x); \cos j_{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 j_{\kappa}}}; \sin j_{\kappa} = \operatorname{tg} j_{\kappa} \cdot \cos j_{\kappa}$$

при очертании оси по окружности:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f; R = \frac{4f^2 + l^2}{8f}; \sin j_{\kappa} = \frac{l - 2x_{\kappa}}{2R}; \cos j_{\kappa} = \frac{y_{\kappa} + R - f}{R}$$

Схема арки и нагрузок

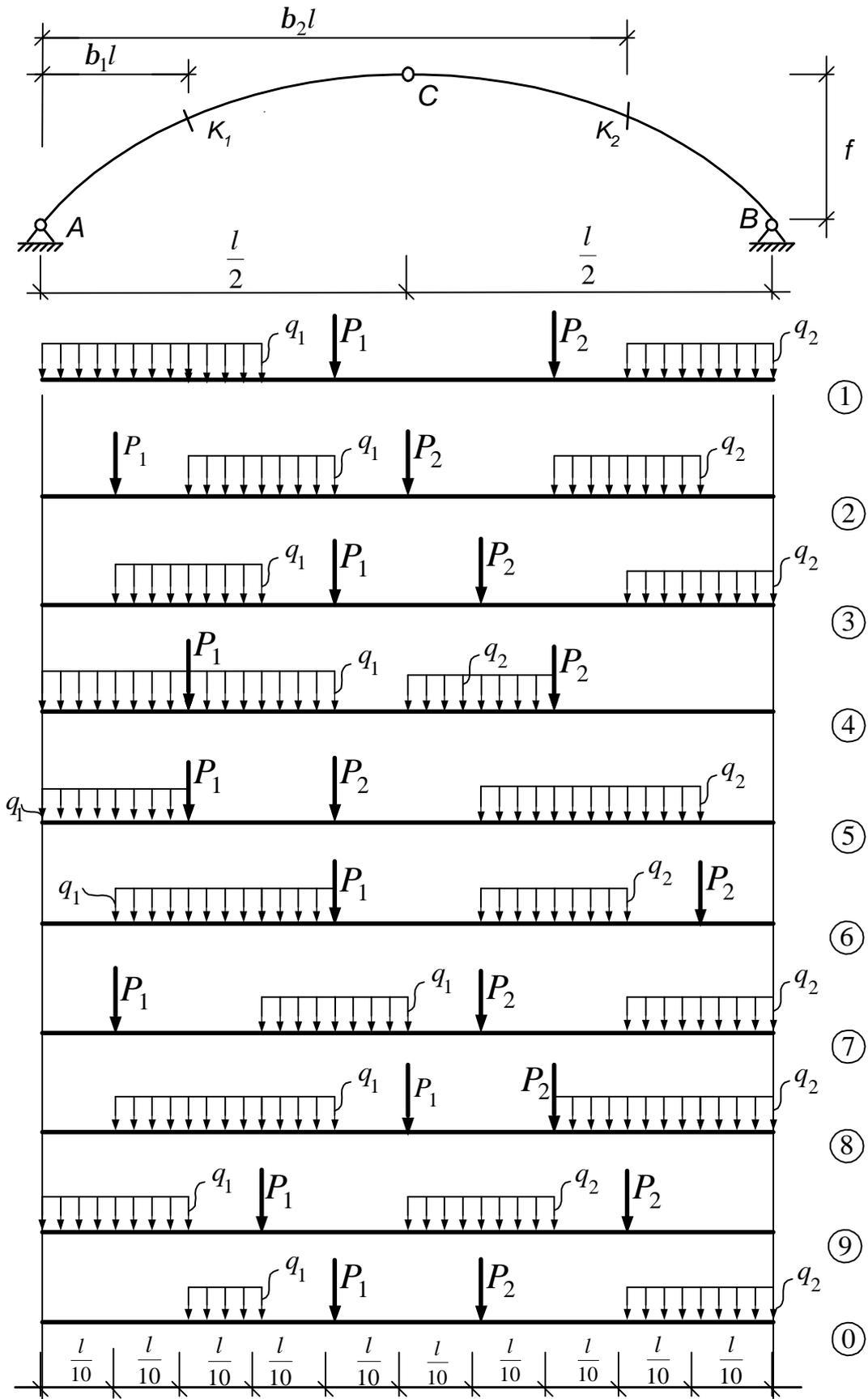


Рис. 8

Следует помнить, что для правой половины арки $\sin \varphi_k$ отрицательный.

Вертикальные опорные реакции в арке определяются из уравнений моментов всех сил относительно опор. Горизонтальный распор определяется по формуле:

$$H = \frac{M_c^o}{f},$$

где M_c^o – изгибающий момент в сечении C (под средним шарниром арки) простой балки того же пролета и загруженной той же нагрузкой, что и арка.

Величина изгибающего момента поперечной и продольной силы в произвольном сечении K вычисляется по формулам.

$$M_K = M_K^o - Hy_K; \quad Q_K = Q_K^o \cos j_K - H \sin j_K; \quad N_K = -(Q_K^o \sin j_K + H \cos j_K);$$

где M_K^o и Q_K^o – соответственно изгибающий момент и поперечная сила в сечении K простой балки того же пролета и загруженной той же нагрузкой, что и арка.

Вычислив значения внутренних усилий в нескольких сечениях арки (не менее 8), в том числе и в характерных, строят эпюры этих усилий. Изгибающий момент в сечении арки считается положительным, если в этом сечении растянуты нижние волокна стержня.

ЗАДАЧА №5.

Расчет плоской статически определимой фермы.

Для фермы, выбранной согласно шифру (табл. 5, рис. 9) требуется:

1. Определить аналитически усилия в стержнях заданной панели фермы.

Таблица 5

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра	Номер схемы	Вторая цифра шифра	Номер панели	H , м	Третья цифра шифра	q , $\frac{кН}{м}$	Четвертая цифра шифра	Номер варианта	P , кН	d , м
0	0	0	2	3,2	0	2,0	0	0	10	3,0
1	1	1	3	3,5	1	2,2	1	1	12	2,5
2	2	2	4	4,0	2	2,4	2	2	14	2,4
3	3	3	5	4,5	3	2,6	3	3	16	2,8
4	4	4	6	3,8	4	2,8	4	4	18	3,2
5	5	5	7	3,0	5	3,0	5	5	15	3,4
6	6	6	3	4,2	6	3,2	6	6	13	3,6
7	7	7	4	4,6	7	3,4	7	7	12	3,8
8	8	8	5	5,0	8	3,6	8	8	20	4,0
9	9	9	6	5,2	9	3,8	9	9	17	4,2

Методические указания.

Ферма – это стержневая система, сохраняющая геометрическую неизменяемость при условной постановке во все узлы шарниров. При такой условной замене жестких узлов шарнирными и узловом приложении внешней нагрузки все стержни работают на центральное растяжение или сжатие.

Перед определением продольных усилий в стержнях фермы необходимо определить опорные реакции, составляя 3 уравнения равновесия для всей фермы в целом. Для определения внутренних усилий в стержнях фермы используется метод сечений или его частный случай – метод вырезания узлов. Для этого сечением отделяется часть фермы (или ее отдельный узел) и рассматривается ее равновесие. Количество независимых уравнений равновесия не может быть больше трех (для узла, как для системы сходящихся сил, не более двух).

Схема плоских ферм. Вариант 1

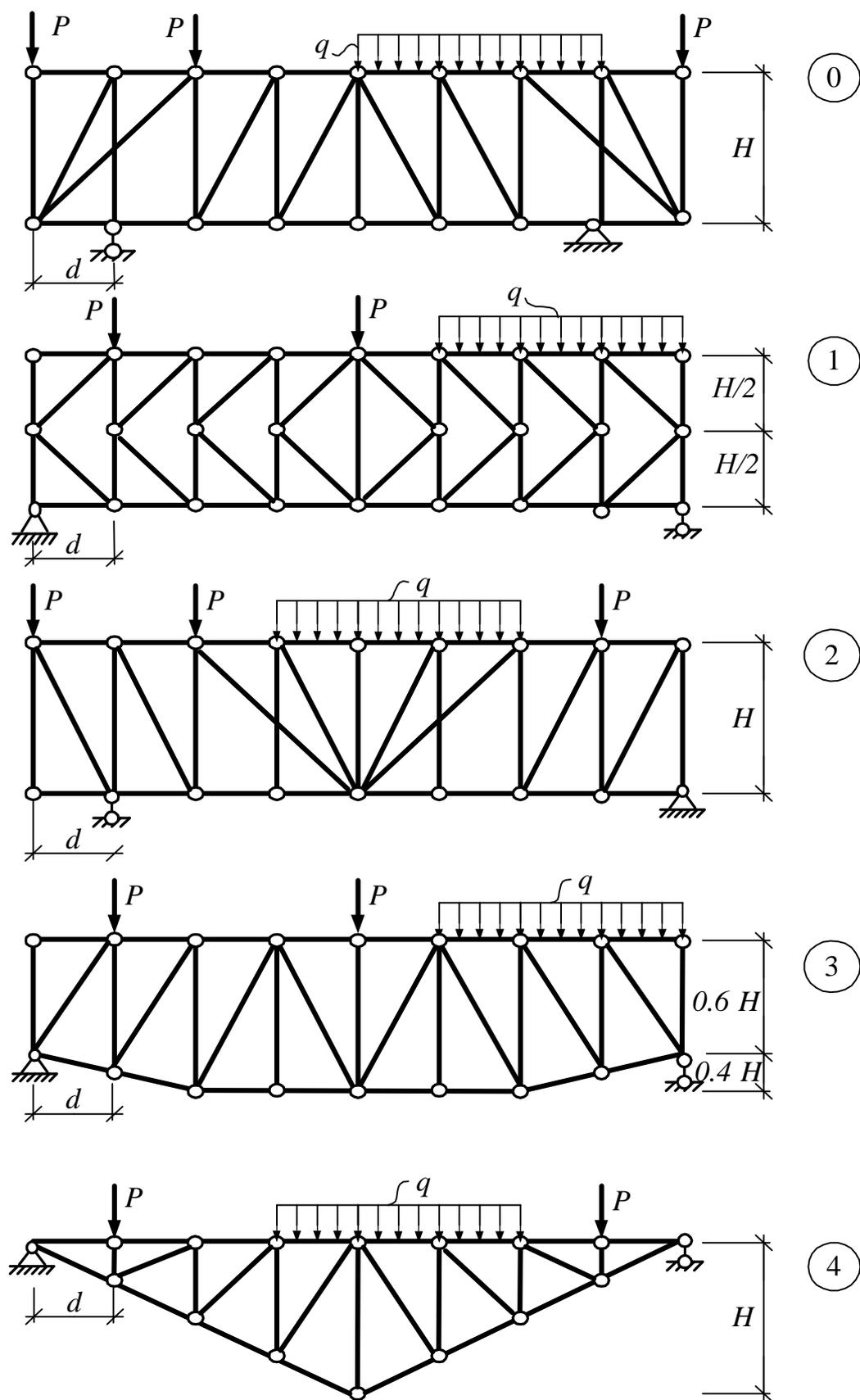


Рис. 9

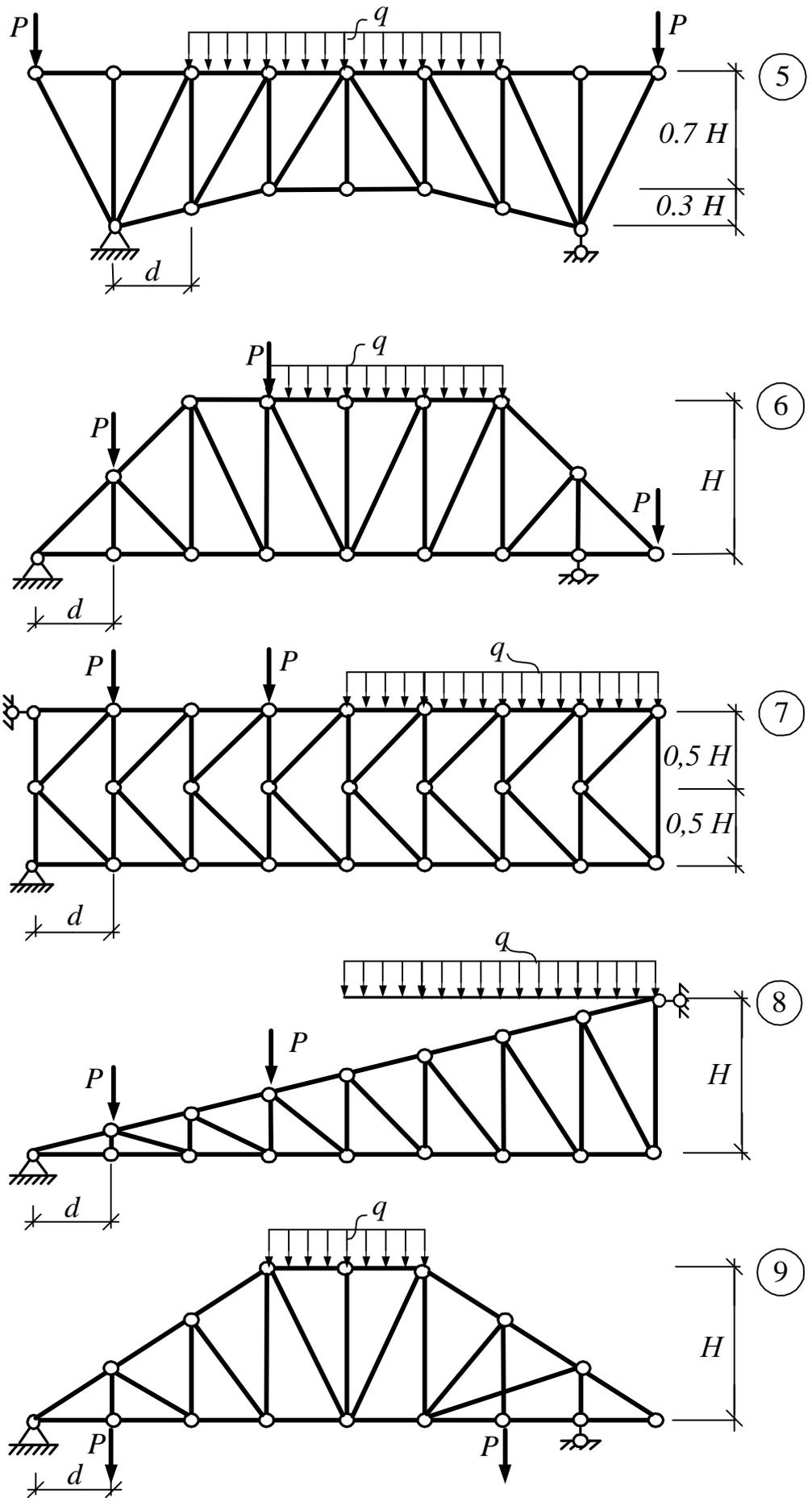


Рис. 9

Схемы плоских ферм. Вариант 2

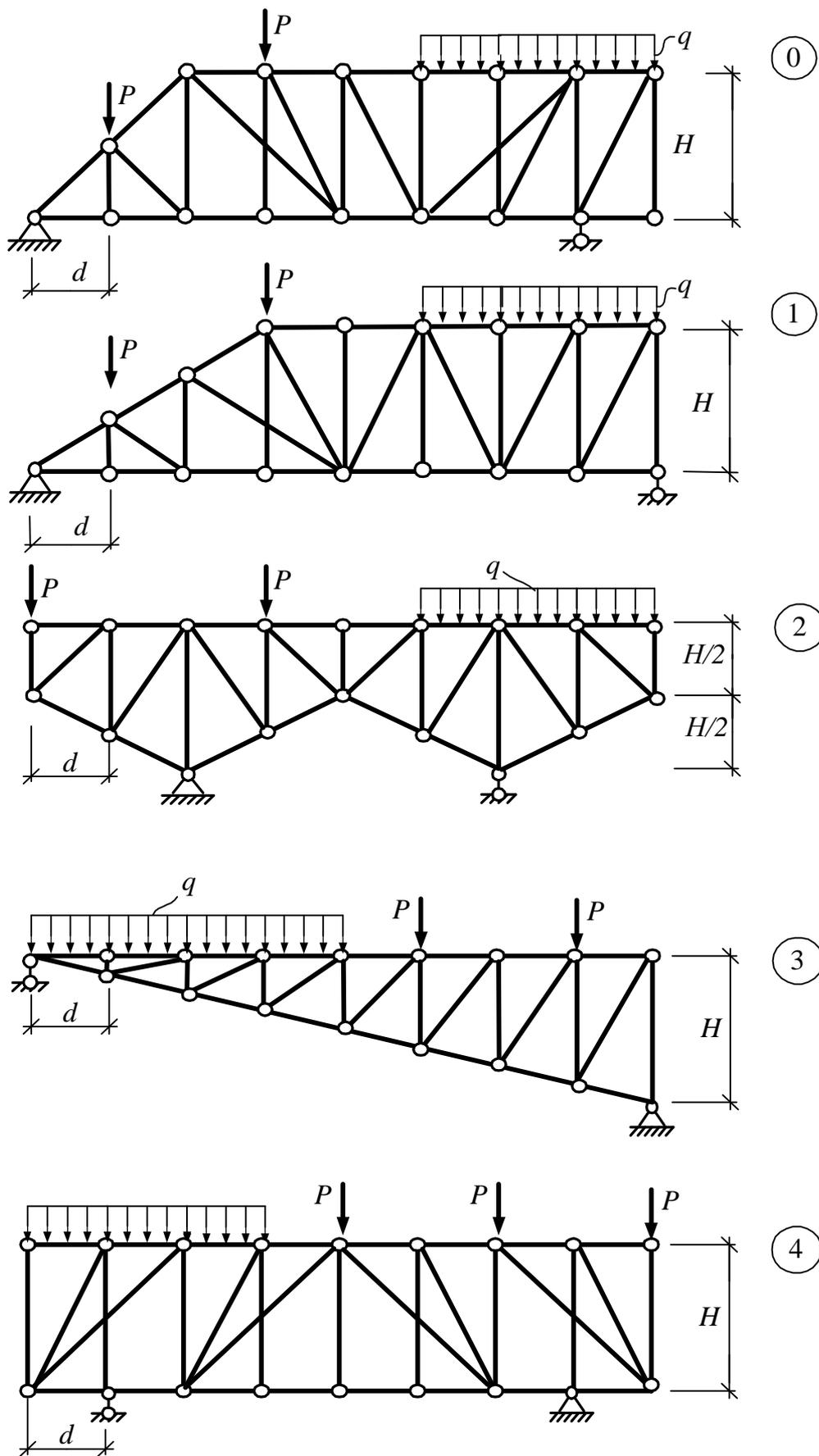


Рис. 9

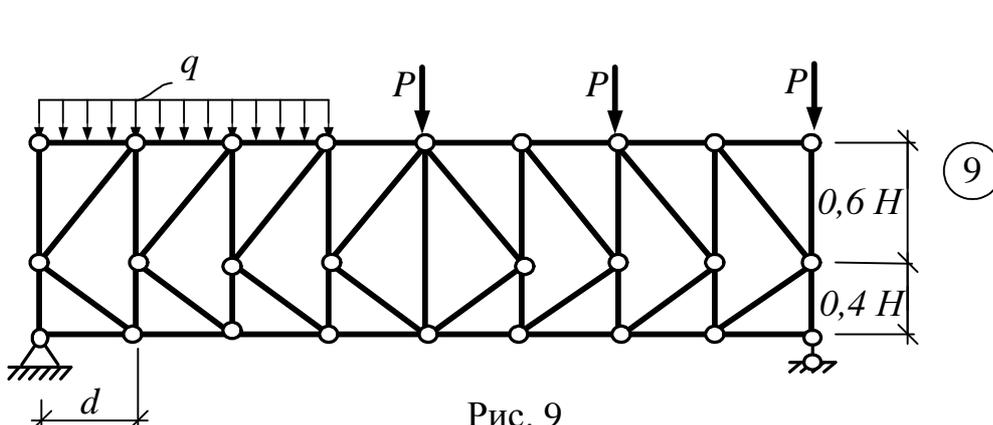
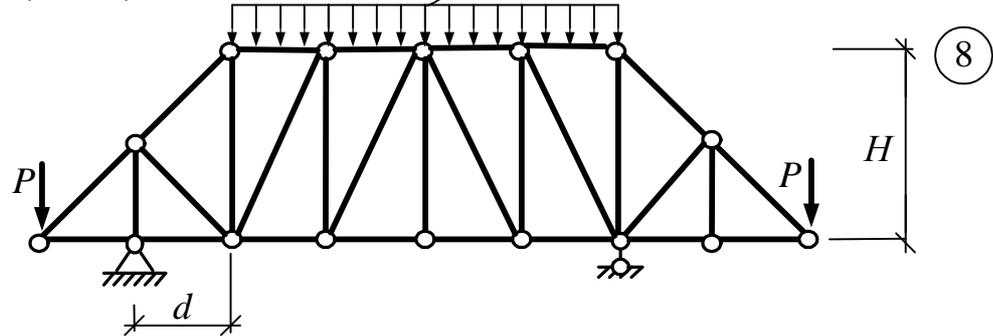
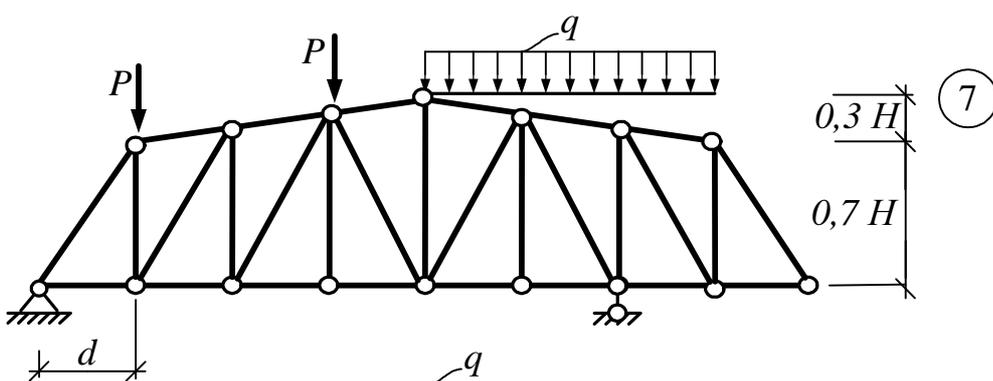
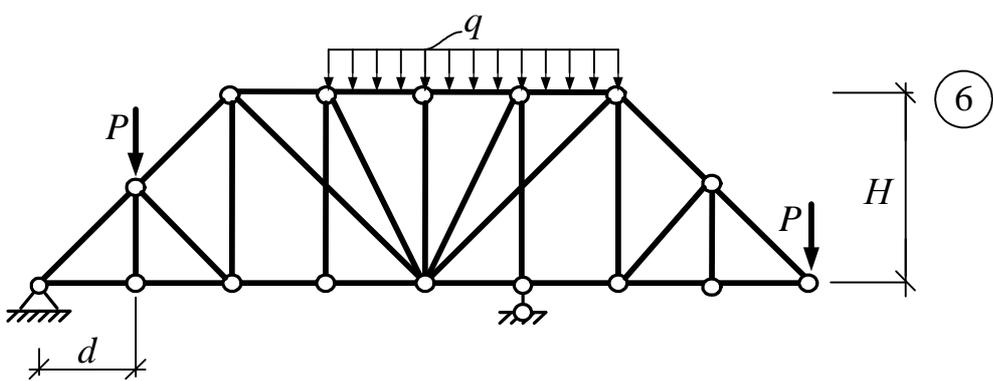
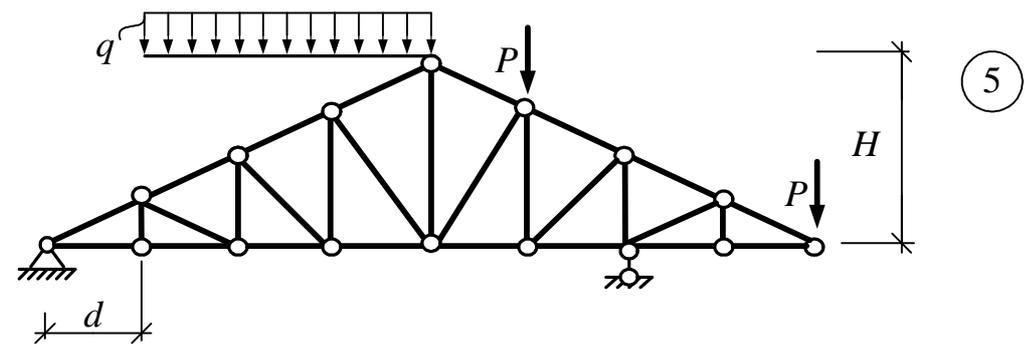
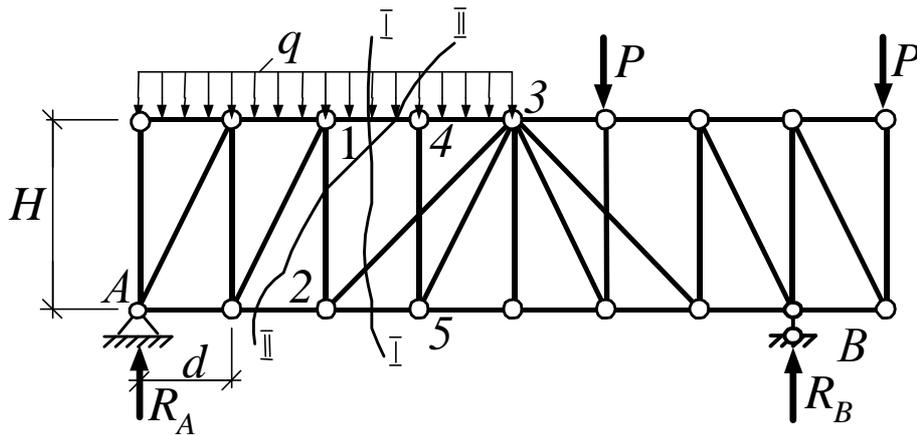


Рис. 9

Пример расчета



$$d=3 \text{ м}; \quad H=4\text{м}; \quad P=12 \text{ кН}; \quad q=2 \text{ кН/м}.$$

Определить усилия в стержнях 3-ей панели.

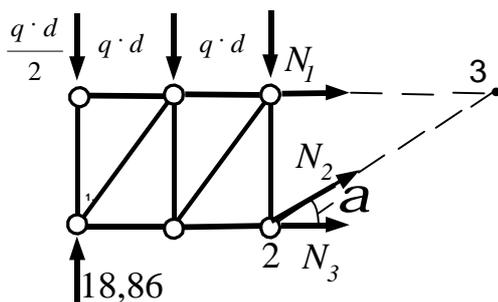
Определяем опорные реакции

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & q \cdot 4d \cdot 2d + P \cdot 5d + P \cdot 8d - R_B \cdot 7d = 0; \\ & 2 \cdot 12 \cdot 6 + 12 \cdot 15 + 12 \cdot 24 - R_B \cdot 21 = 0; \quad R_B = 29,14 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; \quad & R_A \cdot 21 - 2 \cdot 12 \cdot 15 - 12 \cdot 6 + 12 \cdot 3 = 0; \quad R_A = 18,86 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; \quad 2 \cdot 12 + 2 \cdot 12 - 29,14 - 18,86 = 0.$$

Для определения усилий в стержнях 3-ей панели фермы проводим сечение I-I и рассматриваем левую часть фермы. Распределенную нагрузку заменяем сосредоточенными силами, приложенными в узлах фермы. Составляем уравнение равновесия



$$\begin{aligned} \sum M_2^{лев} = 0; \\ 18,86 \cdot 2d - \frac{q \cdot d}{2} - 2d - q \cdot d \cdot d + N_1 \cdot H = 0 \\ 18,86 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 3 + N_1 \cdot 4 = 0; \\ N_1 = -19,29 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак (-) указывает, что стержень сжат.

Для определения усилия N_2 моментной точки нет, т.е. 2 других стержня не пересекаются, составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = 0; \quad 18,86 - \frac{q \cdot d}{2} - 2 \cdot q \cdot d + N_2 \cdot \sin a = 0;$$

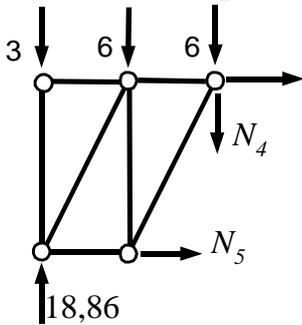
$$\operatorname{tg} a = \frac{4}{6} = 0,667; \quad \sin a = 0,555; \quad N_2 = \frac{-18,86 + 3 + 12}{0,55} = -6,95 \text{ кН.}$$

Стержень сжат.

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; \quad 18,86 \cdot 4d - \frac{q \cdot d}{2} \cdot 4d - q \cdot d \cdot 2d - N_3 \cdot H = 0;$$

$$18,86 \cdot 12 - 36 - 54 - 36 - N_1 \cdot 4 = 0; \quad N_3 = 25,08 \text{ кН.}$$

Далее для определения усилия в стойке 1-2 проводим сечение II-II и рассматриваем равновесие левой части.

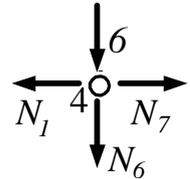


$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad 1 N_1; \quad 18,86 - 3 - 6 - 6 - N_4 = 0; \quad N_4 = 3,36 \text{ кН.}$$

Усилие в стойке 4-5 находим из вырезания

узла 4: $\sum Y = 0;$

$$-N_6 - 6 = 0. \quad N_6 = -6 \text{ кН.}$$



Стержень сжат.

ЗАДАЧА № 6.

Расчет рам методом сил.

Для заданной рамы и внешней нагрузки согласно шифру (табл.6, рис.10) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
2. Выполнить проверки правильности построения эпюр.

Таблица 6.

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра	Номер схемы рамы	l_1 , м	Вторая цифра шифра	l_2 , м	h_1 , м	Третья цифра шифра	h_2 , м	P , кН	Четвертая цифра шифра	q , $\frac{кН}{м}$
0	1	6,0	0	5,2	4,0	0	3,8	10	0	2,0
1	2	6,2	1	5,4	4,5	1	4,2	12	1	2,5
2	3	6,4	2	5,6	5,0	2	4,4	14	2	3,0
3	4	6,6	3	5,8	5,2	3	4,5	15	3	3,2
4	5	6,8	4	6,0	5,4	4	4,8	16	4	3,5
5	6	7,0	5	6,2	5,6	5	4,9	17	5	4,0
6	7	7,2	6	6,4	5,8	6	5,0	18	6	4,2
7	8	7,4	7	6,6	6,0	7	5,2	19	7	4,4
8	9	7,6	8	6,8	6,5	8	5,5	20	8	4,5
9	0	7,8	9	7,0	7,0	9	6,0	22	9	5,0

Методические указания.

Перед расчетом рамы следует установить степень ее статической неопределимости.

Следует обратить особое внимание на выбор основной системы, в качестве которой принимается статически определимая система, полученная из заданной путем отбрасывания «лишних» связей. Особое внимание следует обратить, чтобы основная система была геометрически неизменяемой и такой, чтобы она была наиболее простой. Заменяв отброшенные «лишние» связи реактивными усилиями в них, получаем основную систему метода сил. Реактивные усилия в отброшенных связях определяют из решения системы канонических уравнений:

$$\begin{cases} d_{11} \cdot X_1 + d_{12} \cdot X_2 + \mathbf{L} + d_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ d_{21} \cdot X_1 + d_{22} \cdot X_2 + \mathbf{L} + d_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \mathbf{LLLLLLLLLLLLLLLLLLLL}; \\ d_{n1} \cdot X_1 + d_{n2} \cdot X_2 + \mathbf{L} + d_{nn} \cdot X_n + \Delta_{np} = 0. \end{cases}$$

Схемы рам.

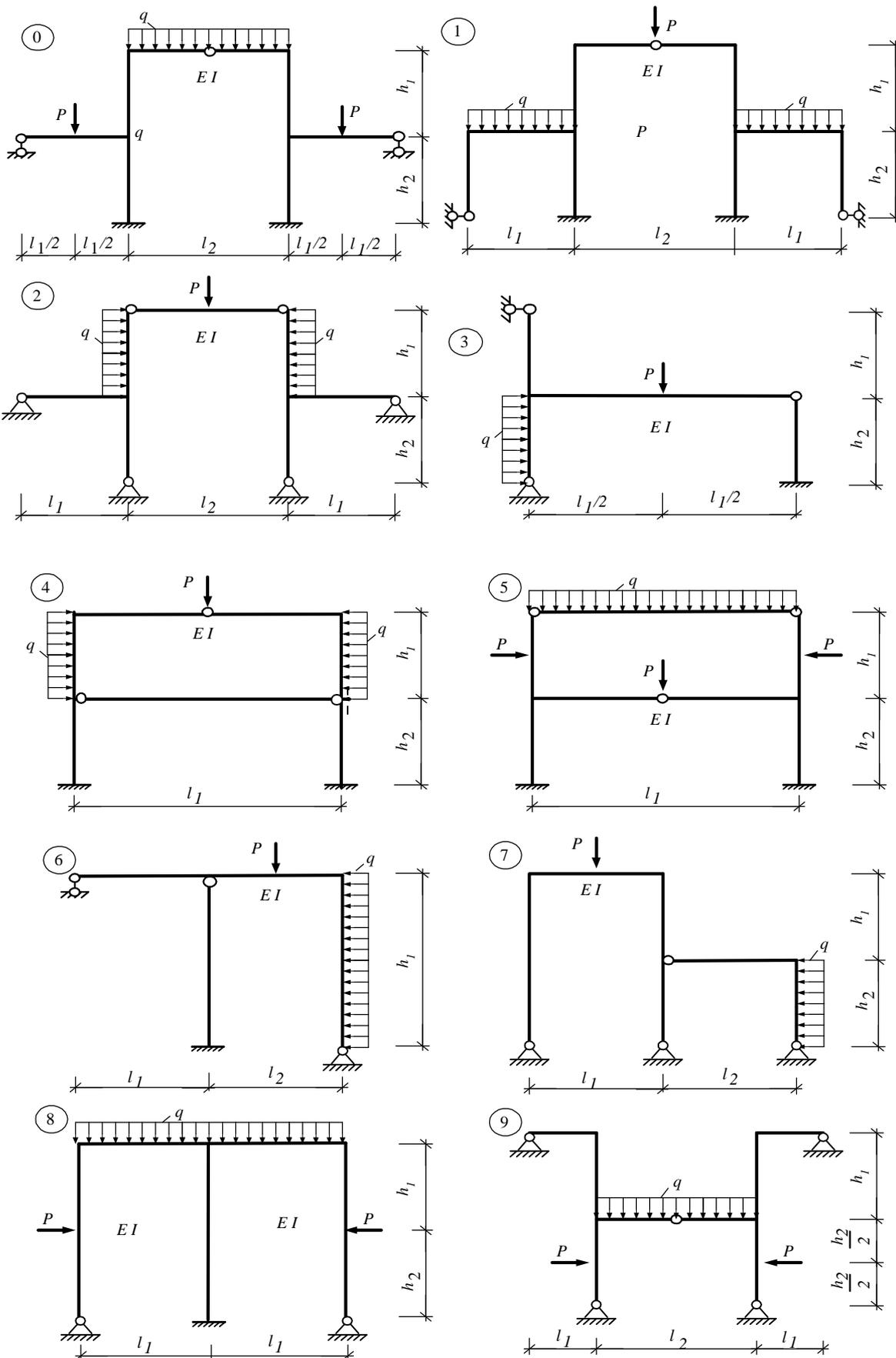


Рис.10

Для вычисления единичных δ_{ik} и грузовых Δ_{iP} перемещений строятся эпюры изгибающих моментов от поочередного приложения единичных основных неизвестных $X_i=1$ и от внешней нагрузки. Все эти эпюры строятся в основной системе. Единичные и грузовые перемещения определяются путем перемножения соответствующих эпюр.

$$d_{ik} = \sum \int_0^1 \frac{M_i \cdot M_k \cdot ds}{EJ}; \quad \Delta_{iP} = \sum \int_0^1 \frac{M_i \cdot M_P \cdot ds}{EJ}.$$

Определив из решения системы канонических уравнений основные неизвестные метода сил, можно построить окончательную эпюру изгибающих моментов:

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \mathbf{L} + M_n \cdot X_{n1} + M_P.$$

По эпюре изгибающих моментов строят эпюру поперечных сил "Q". На участках, где нет распределенной нагрузки:

$$Q = \frac{dM}{dX} = \operatorname{tg} \alpha_M.$$

На участках с распределенной по длине участка нагрузкой:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{np} - M_{лев}}{l}.$$

По эпюре поперечных сил с учетом узловой внешней нагрузки путем вырезания и уравнивания узлов определяются величины продольных сил в стержнях и строится эпюра «N»

Пример расчета.

Рассчитать раму методом сил (рис. 11а).

Степень статической неопределимости рамы:

$$L = 3 \cdot K - III = 3 \cdot 3 - 6.$$

С учетом того, что на симметричную раму действует симметричная нагрузка, можно предположить, что реакции на опоре А и на опоре В будут равны между собой. Поэтому, считая их «лишними» неизвестными, обозначаем их одной неизвестной X_1 . Второй неизвестной будем считать величину изгибающего момента в среднем сечении ригеля.

Выбираем основную систему метода сил (рис. 11б).

В основной системе строим эпюры изгибающих моментов от единичных значений основных неизвестных (рис. 11в,г) и от внешней нагрузки (рис. 11е).

Для проверки построим суммарную единичную эпюру $M_s = M_1 + M_2$ (рис. 11д).

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} d_{11} \cdot X_1 + d_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ d_{21} \cdot X_1 + d_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0; \end{cases}$$

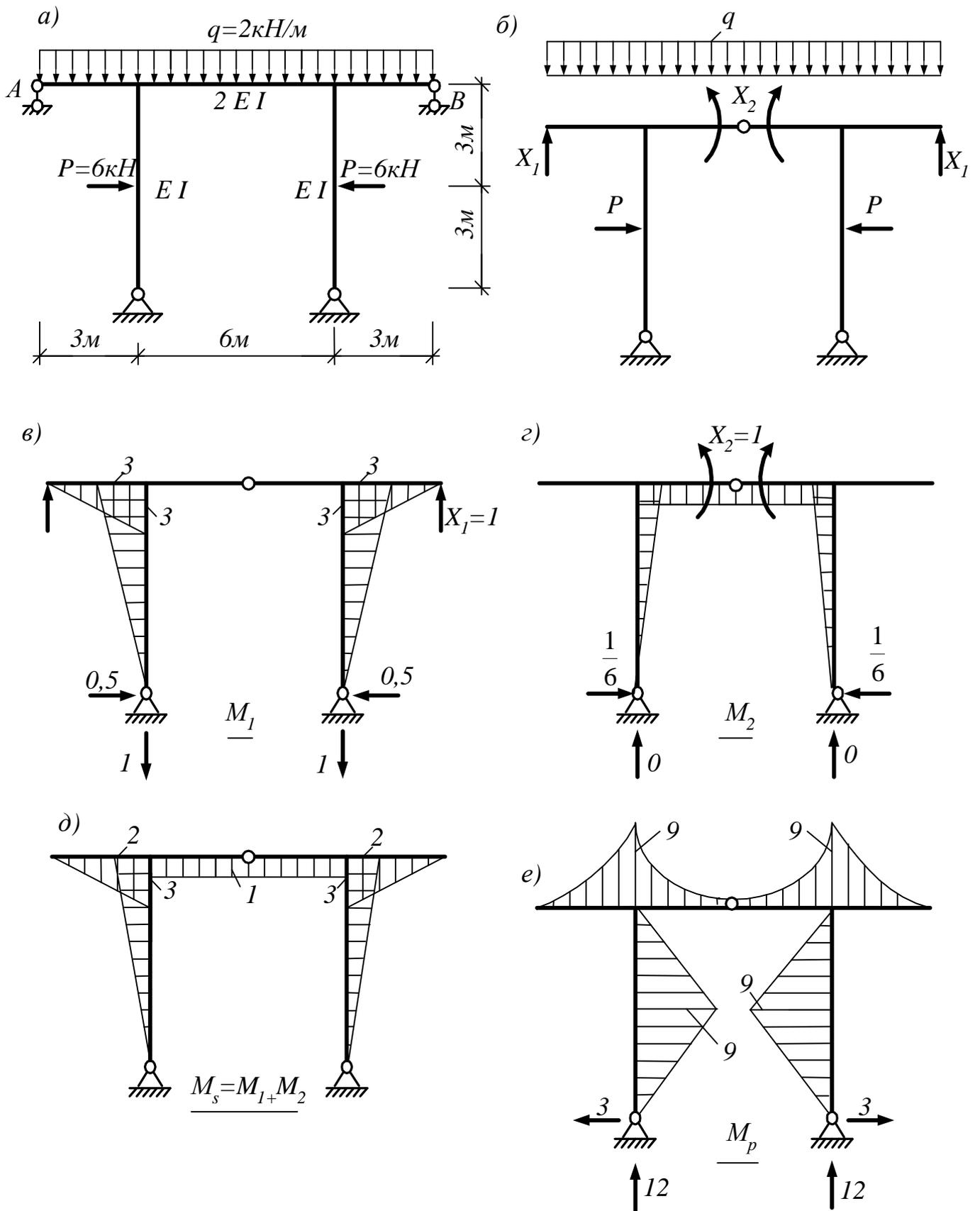


Рис.11

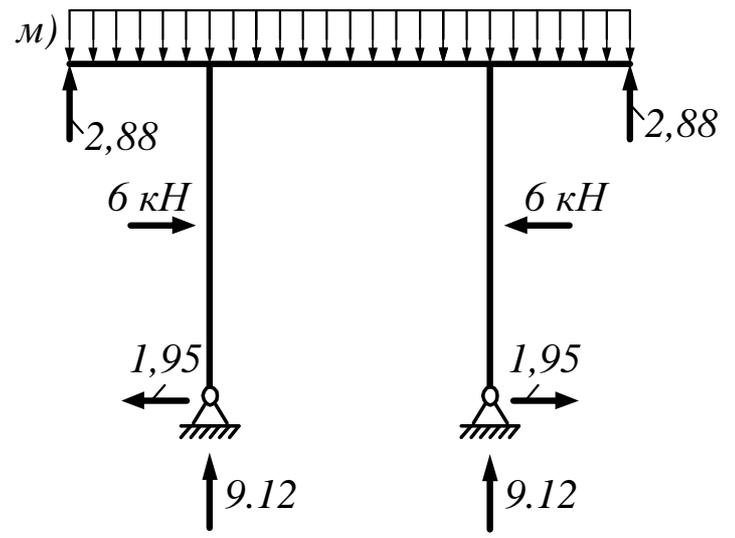
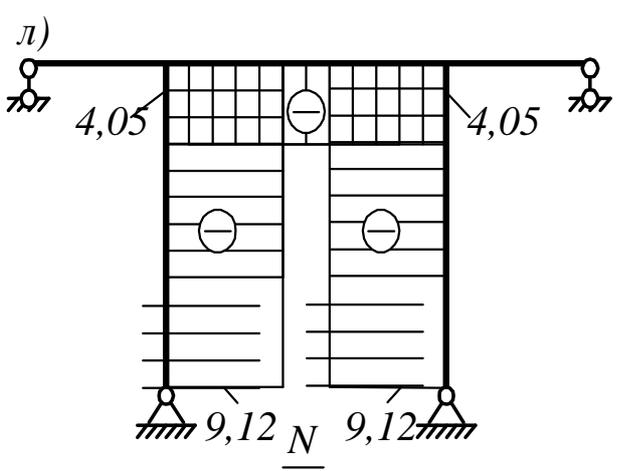
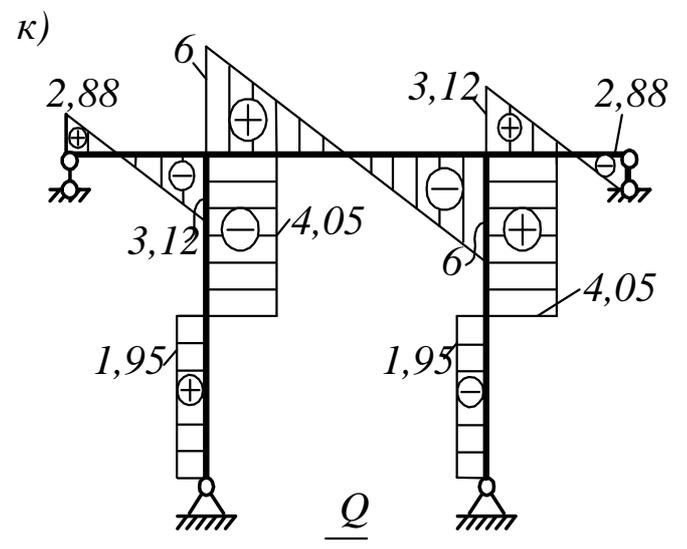
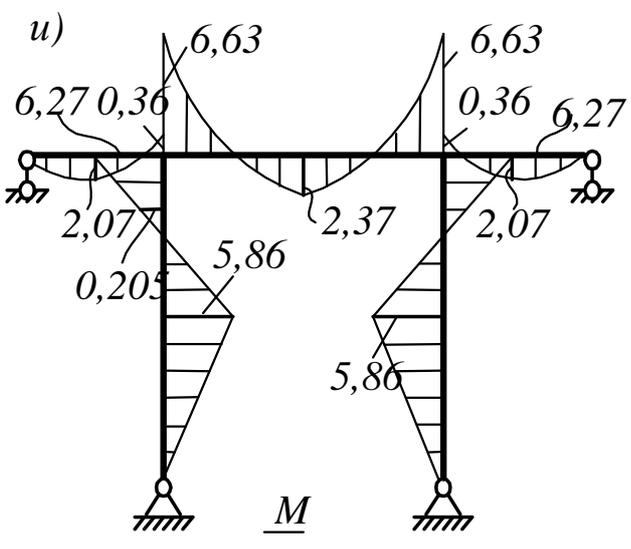
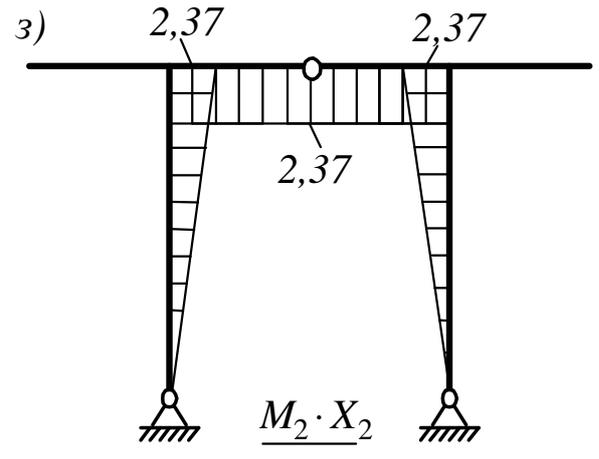
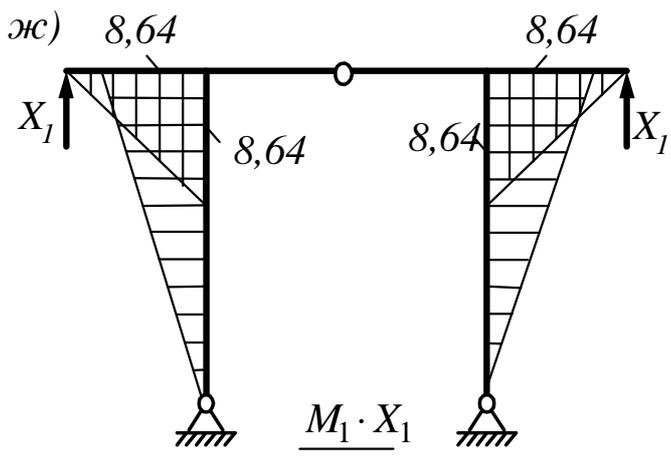


Рис.11

Определяем коэффициенты и свободные члены уравнений

$$d_{11} = \sum_0^1 \int \frac{M_1^2 \cdot ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 \right) \cdot 2 = \frac{45}{EJ};$$

$$d_{12} = \sum_0^1 \int \frac{M_1 \cdot M_2 \cdot ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{12}{EJ};$$

$$d_{22} = \sum_0^1 \int \frac{M_2^2 \cdot ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \right) = \frac{7}{EJ}.$$

Проверка:

$$d_{ss} = \sum_0^1 \int \frac{M_s^2 \cdot ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{28}{EJ} = d_{11} + d_{12} + d_{21} + d_{22};$$

$$\Delta_{1p} = \sum_0^1 \int \frac{M_1 \cdot M_p \cdot ds}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 2 -$$

$$- \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot (1,5 + 0,5) \cdot 2 = -\frac{101,25}{EJ};$$

$$\Delta_{2p} = \sum_0^1 \int \frac{M_2 \cdot M_p \cdot ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \left(0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \cdot 2 \right) -$$

$$- \frac{6}{12EJ} \cdot (9 \cdot 1 + 9 \cdot 1) = \frac{18}{EJ};$$

Проверка:

$$\Delta_{sp} = \sum_0^1 \int \frac{M_s \cdot M_p \cdot ds}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{6}{12EJ} \cdot (9 \cdot 1 + 9 \cdot 1) -$$

$$- \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot 2 = -\frac{83,25}{EJ} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p}.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 45 \cdot X_1 - 12 \cdot X_2 - 101,25 = 0; & X_1 = 2,28; \\ -12 \cdot X_1 + 7 \cdot X_2 + 18 = 0. & X_2 = 2,37. \end{cases}$$

Строим «исправленные» единичные эпюры $M_1 \cdot X_1$ и $M_2 \cdot X_2$ (рис. 11 ж, з).

Окончательную эпюру изгибающих моментов получаем как сумму (рис. 11 и).

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + M_p.$$

Выполняем деформационную проверку эпюры "M":

$$\sum_0^1 \int \frac{M \cdot M_s \cdot ds}{EJ} = \frac{3}{12EJ} \cdot (4 \cdot 2,07 \cdot 1,5 - 0,36 \cdot 3) \cdot 2 + \frac{3}{6EJ} \cdot (2 \cdot 6,27 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,205 - 1 \cdot 5,86) \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,86 \cdot 2 + \frac{6}{12EJ} \cdot (-6,63 \cdot 1 + 4 \cdot 2,37 \cdot 1 - 1 \cdot 6,63) = 0;$$

По эпюре "M" строим эпюру поперечных сил "Q" (рис. 11к).

На левом ригеле

$$Q_A = \frac{q \cdot 1}{2} + \frac{M_{np} - M_{лев}}{1} = \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{-0,36 - 0}{3} = 2,88 \text{ кН.}$$

$$Q_1 = -\frac{q \cdot 1}{2} + \frac{M_{np} - M_{лев}}{1} = \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{-0,36 - 0}{3} = -3,12 \text{ кН.}$$

На участке 1-2

$$Q_1 = \frac{2 \cdot 6}{2} + \frac{-6,63 - (-6,63)}{6} = 6 \text{ кН.}$$

$$Q_2 = -\frac{2 \cdot 6}{2} + \frac{-6,63 - (-6,63)}{6} = -6 \text{ кН.}$$

На участке C-3

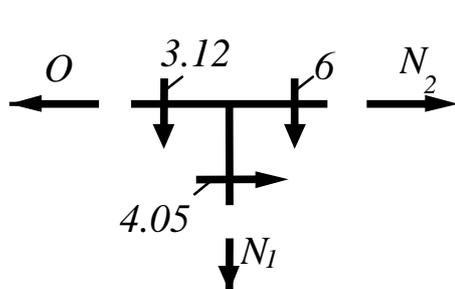
$$Q = \frac{5,86}{3} = 1,95 \text{ кН.}$$

На участке 3-1

$$Q = -\frac{6,25 + 5,86}{3} = -4,05 \text{ кН.}$$

По эпюре "Q" строим эпюру продольных сил "N" путем вырезания и уравновешивания узлов (рис. 11л).

Узел 1.



$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ N_1 &= -6 - 3,12 = -9,12 \text{ кН;} \\ \sum X &= 0; \\ N_2 &= -4,05 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Общая статическая проверка равновесия рамы в целом (рис. 11м).

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & 6 - 1,95 - 6 + 1,95 &= 0. \\ \sum Y &= 0; & -2 \cdot 12 + 2,88 \cdot 2 + 9,12 \cdot 2 &= 0. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА № 7

Расчет неразрезной балки

Для выбранной согласно шифру балки (табл. 7 рис. 12) требуется

1. От заданной постоянной равномерно распределенной нагрузки с помощью уравнений 3-х моментов построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил и определить опорные реакции.
2. От загрузки каждого пролета временной нагрузкой с помощью моментных фокусных отношений построить эпюры изгибающих моментов.
3. Построить объемлющую эпюру изгибающих моментов во втором пролете балки.

Таблица 7

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра	№ схемы балки	l_1 , м	P_1 , кН	Вторая цифра шифра	l_2 , м	P_2 , кН	№ схемы нагрузки	Третья цифра шифра	q , $\frac{кН}{м}$	m , кН · м	Четвертая цифра шифра	l_3 , м	q_1 , $\frac{кН}{м}$	q_2 , $\frac{кН}{м}$
1	1	6,6	6,0	1	5,8	9,0	0	1	2,0	10,0	1	6,0	3,0	4,0
2	2	5,0	5,0	2	6,0	8,0	1	2	2,2	12,0	2	6,2	2,0	3,0
3	3	6,4	4,0	3	6,2	7,0	2	3	2,4	14,0	3	5,4	4,0	5,0
4	4	6,6	7,0	4	6,4	6,0	3	4	2,6	16,0	4	5,2	2,5	3,5
5	5	6,8	8,0	5	6,6	4,0	4	5	2,8	8,0	5	5,0	3,0	2,0
6	6	7,0	9,0	6	6,8	5,0	5	6	3,0	6,0	6	5,8	2,2	3,2
7	7	5,6	10,0	7	7,0	12,0	6	7	3,2	18,0	7	6,2	4,0	3,5
8	8	5,8	12,0	8	7,2	10,0	7	8	3,4	20,0	8	5,4	5,0	2,8
9	9	5,4	14,0	9	7,1	11,0	8	9	3,6	22,0	9	6,8	1,6	2,8
0	0	5,2	11,0	0	7,6	14,0	9	0	4,0	14,0	0	7,0	2,2	3,0

Методические указания.

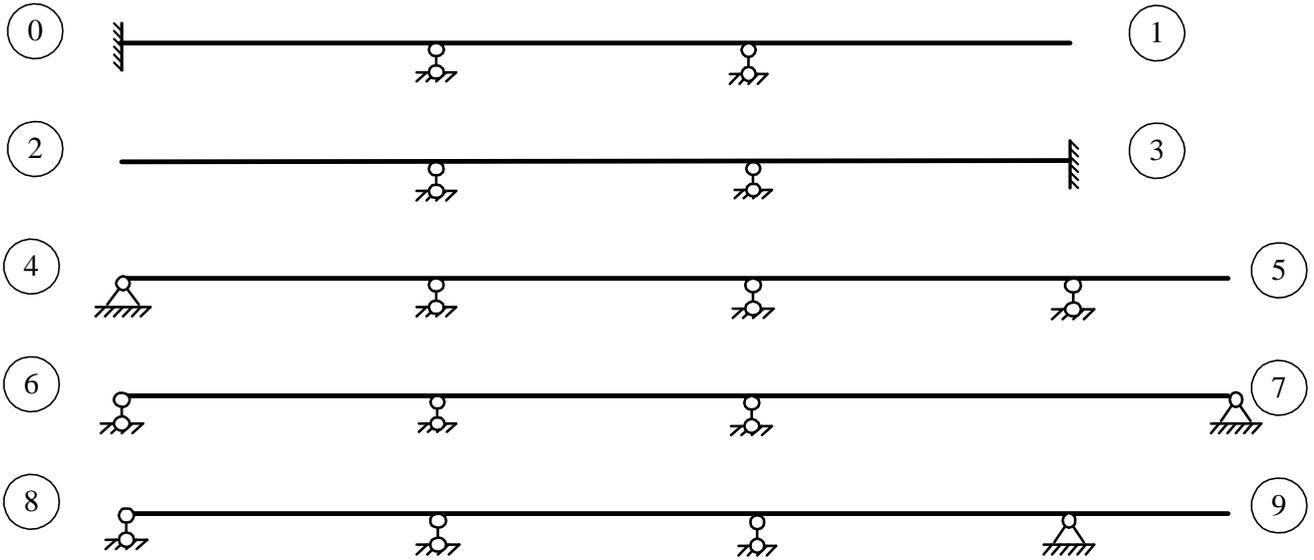
Неразрезной балкой называется брус, перекрывающий несколько пролетов и не прерывающийся нигде шарнирами.

Расчет балки на постоянную нагрузку проводится с помощью уравнений 3-х моментов. Число таких уравнений равно числу лишних неизвестных в балке. Число лишних неизвестных определяется по формуле:

$$L = C_0 - 3, \quad \text{где } C_0 - \text{число опорных связей.}$$

Если пронумеровать опоры балки от 0 до n , то уравнение 3-х моментов для опоры n запишется в виде (при постоянной жесткости балки во всех пролетах):

Схемы балок.



Схемы нагрузок

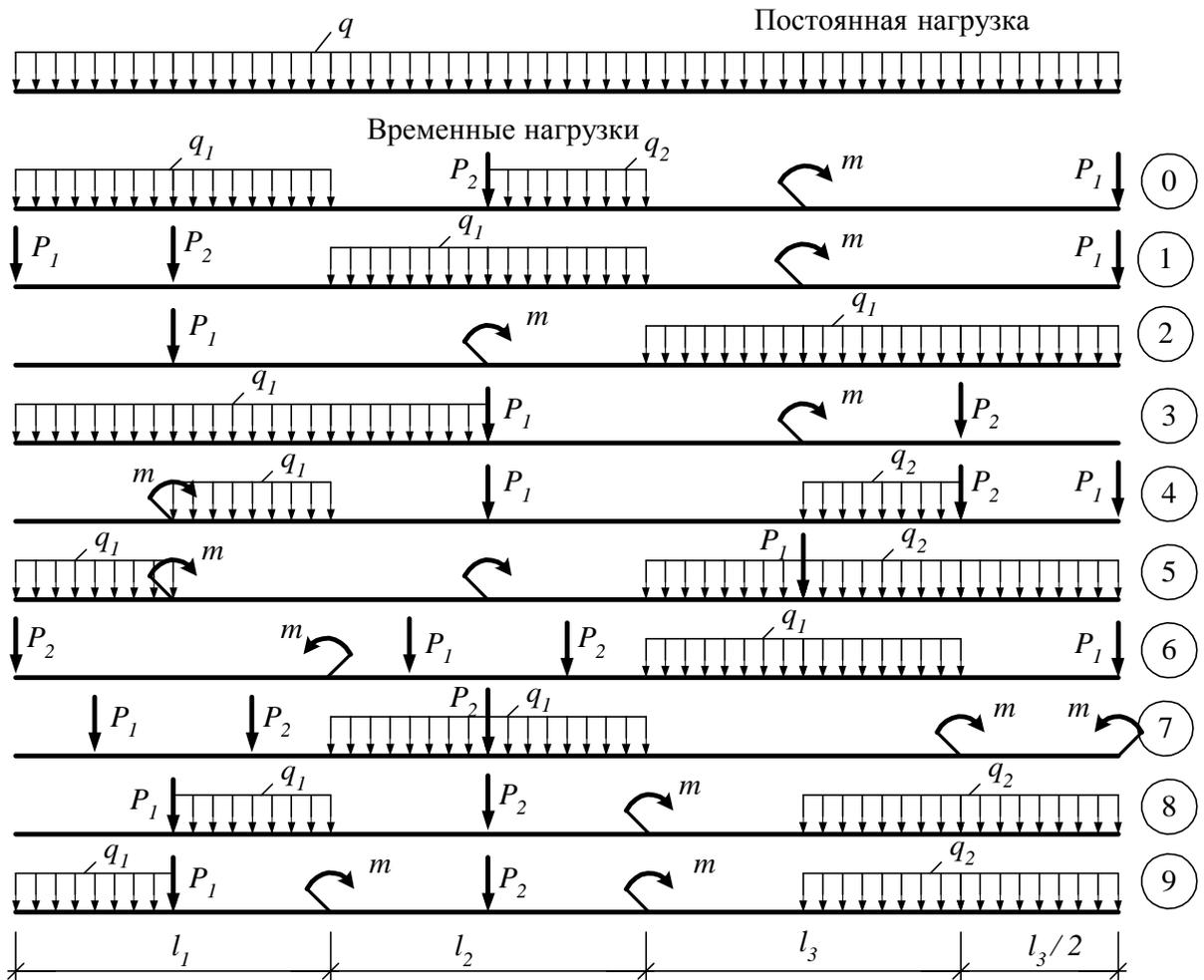


Рис.12

$$l_{n-1} \cdot M_{n-1} + 2 \cdot (l_n + l_{n+1}) \cdot M_n + l_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6(B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi),$$
 где B_n^Φ и A_{n+1}^Φ соответственно правая фиктивная реакция пролета n и левая фиктивная реакция пролета $n + 1$ (номер пролета определяется по правой опоре). Фиктивная опорная реакция – это реакция опоры в основной системе от фиктивной нагрузки в пролете в виде эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки M_p .

Основная система метода сил для неразрезной балки выбирается путем подстановки шарниров во всех опорах с неизвестными моментами. Для этой основной системы в виде ряда однопролетных балок строится эпюра M_p от внешней нагрузки.

Определив величины опорных моментов из решения системы уравнений 3-х моментов, строят линию опорных моментов, соединяя ординаты эпюры моментов с найденными из решения системы уравнений 3-х моментов.

К линии опорных моментов “подвешивают” эпюру M_p в основной системе и получается окончательная эпюра изгибающих моментов “ M ”.

По эпюре моментов “ M ” строится эпюра поперечных сил “ Q ” и определяются опорные реакции как величины скачков на эпюре “ Q ”.

Для расчета балки на временные нагрузки поочередно загружают каждый пролет балки своей временной нагрузкой.

Основная система принимается такой же, как и при расчете на постоянную нагрузку.

Расчет ведется с помощью моментных фокусных отношений. В каждом пролете балки имеются 2 фокусные точки – левая и правая.левой (правой) фокусной точкой называется нулевая точка эпюры моментов в незагруженном пролете при условии, что вся внешняя нагрузка расположена справа (слева) от рассматриваемого пролета.

Фокусное отношение – это модуль отношения опорных моментов по концам незагруженного пролета.

Левое фокусное отношение для n -го пролета:

$$K_n = \left| \frac{M_n}{M_{n-1}} \right|; \quad \text{Правое} - K'_n = \left| \frac{M_{n-1}}{M_n} \right|;$$

Левое фокусное отношение 1-го пролета с 1-ой шарнирной опорой $K_1 = \infty$, с 1-ой опорой в виде жесткой заделки $K_1 = 2$. Также для последнего пролета балки с последней шарнирной опорой правое фокусное отношение $K'_n = \infty$, с последней опорой в виде жесткой заделки $K'_n = 2$.

Зная левое фокусное отношение для n -го пролета можно определить левое фокусное отношение каждого последующего (идя слева) по формуле:

$$K_{n+1} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{K_n} \right)$$

Зная правое фокусное отношение последнего пролета находят правые фокусные отношения для каждого предыдущего пролета по формуле:

$$K'_n = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{K'_{n+1}} \right)$$

Загрузив каждый пролет в отдельности временной нагрузкой, в основной системе строят “грузовую” эпюру M_p , находят фиктивные опорные реакции и находят опорные моменты по концам загруженного пролета.

Если загружен пролет n , то опорные моменты по концам загруженного пролета определяется по формулам:

$$M_{n-1} = -6 \frac{A_n^\Phi \cdot K'_n - B_n^\Phi}{l_n (K'_n \cdot K'_n - 1)}; \quad M_n = -6 \frac{B_{\Pi}^\Phi \cdot K_n - A_n^\Phi}{l_n (K'_n \cdot K'_n - 1)}.$$

Опорные моменты слева или справа от загруженного пролета определяются по левым или правым фокусным отношениям:

$$M_{n-2} = \left| -\frac{M_n}{K_{n-1}} \right|; \quad M_{n+1} = \left| -\frac{M_n}{K'_{n-1}} \right|.$$

Построив линию опорных моментов, к ней “подвешивают” эпюру M_p и получают эпюру изгибающих моментов от загрузки n -го пролета внешней временной нагрузкой.

После построения эпюр изгибающих моментов от постоянной и временных нагрузок строят объемлющую (огibaющую) эпюру моментов. Объемлющая эпюра показывает наибольшие и наименьшие величины изгибающих моментов в сечениях балки.

В каждом пролете балки обычно намечаются 5-6 сечений и для каждого из них находят значения минимальных и максимальных изгибающих моментов.

Учитывая, что отрицательными считаются изгибающие моменты, если растянуты верхние волокна в сечении балки (ординаты эпюры откладываются со стороны растянутых волокон), то значения минимальных и максимальных изгибающих моментов в каждом сечении балки определяется по формулам:

$$M_{\min} = M_{\text{ном}} + \Sigma M_{\text{вр}}^{\ominus}; \quad M_{\max} = M_{\text{ном}} + \Sigma M_{\text{вр}}^{\oplus}$$

ЗАДАЧА № 8.

Расчет рам методом перемещений.

Для заданной статически неопределимой рамы и внешней нагрузки согласно шифру (табл. 8, рис. 13) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
2. Выполнить деформационную и статическую проверки правильности построения эпюр.

Таблица 8

Таблица исходных данных

Первая цифра шифра	Номер варианта	l_1 , м	q , $\frac{кН}{м}$	Вторая цифра шифра	l_2 , м	h_1 , м	Третья цифра шифра	h_2 , м	Четвертая цифра шифра	Номер схемы рамы	P , кН
0	1	3,6	2,0	0	4,0	3,0	0	4,2	0	0	10
1	2	3,8	2,2	1	4,2	3,5	1	4,4	1	1	12
2	1	4,0	2,4	2	4,4	3,8	2	4,8	2	2	14
3	2	4,2	2,6	3	4,6	3,6	3	5,0	3	3	16
4	1	4,4	2,8	4	4,8	4,0	4	5,6	4	4	13
5	2	4,6	3,0	5	5,0	4,2	5	4,6	5	5	15
6	1	4,8	3,2	6	5,2	4,4	6	5,2	6	6	17
7	2	5,0	3,4	7	5,4	5,0	7	5,4	7	7	18
8	1	5,2	3,6	8	5,6	5,6	8	6,0	8	8	19
9	2	5,4	3,8	9	5,8	5,2	9	6,2	9	9	20

Методические указания.

За основные неизвестные метода перемещений принимаются углы поворота жестких узлов и линейные смещения узлов. Таким образом, число неизвестных метода перемещений определяется как сумма $\Pi = \Pi_y + \Pi_n$, где Π_y – число жестких узлов рамы, Π_n – число возможных линейных смещений узлов.

Основная система метода перемещений получается путем постановки во все жесткие узлы дополнительных заделок, препятствующих угловым поворотам узлов и постановки дополнительных опорных стержней, препятствующих линейным смещениям узлов.

Схемы рам. Вариант 1.

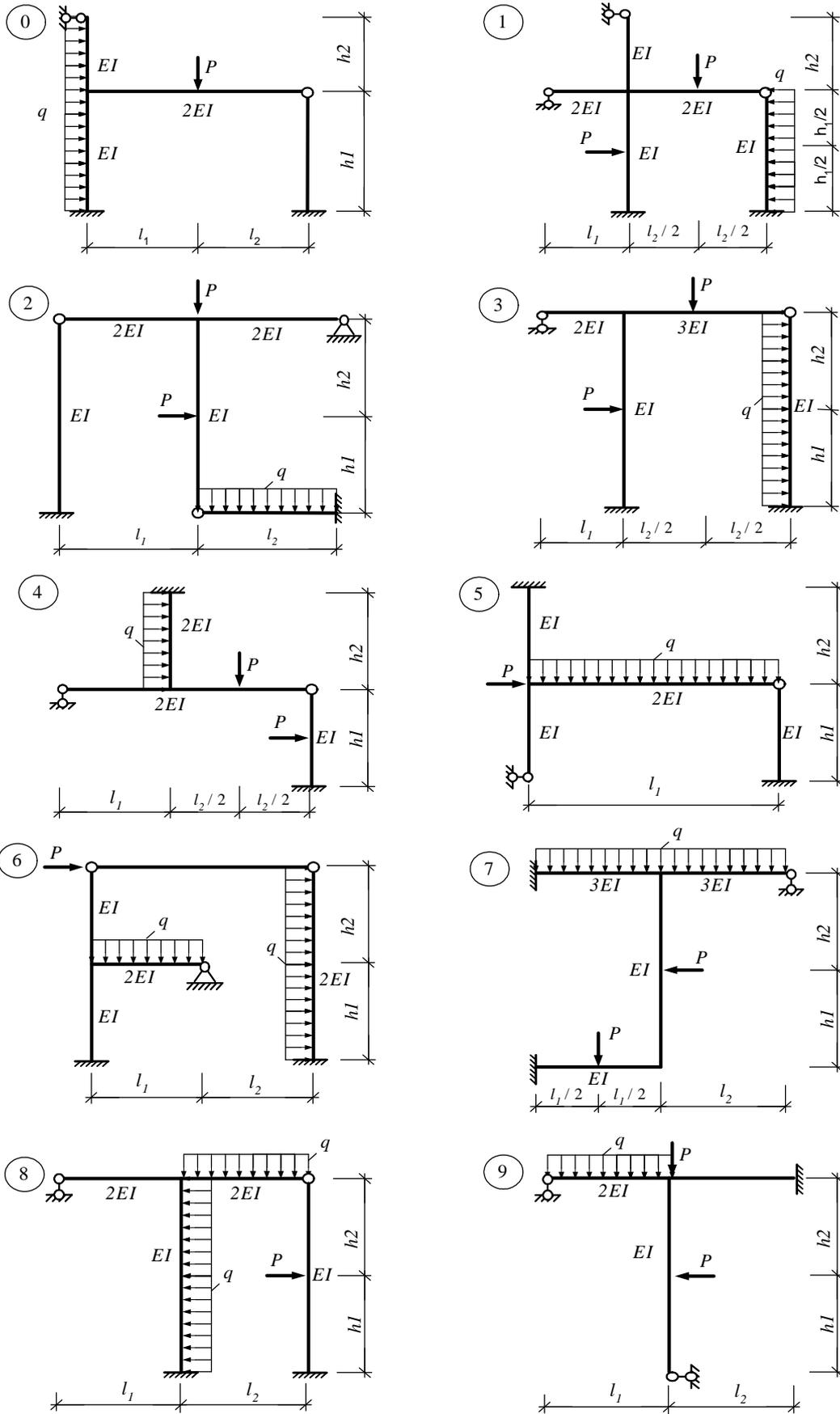


Рис. 13

Схемы рам. Вариант 2

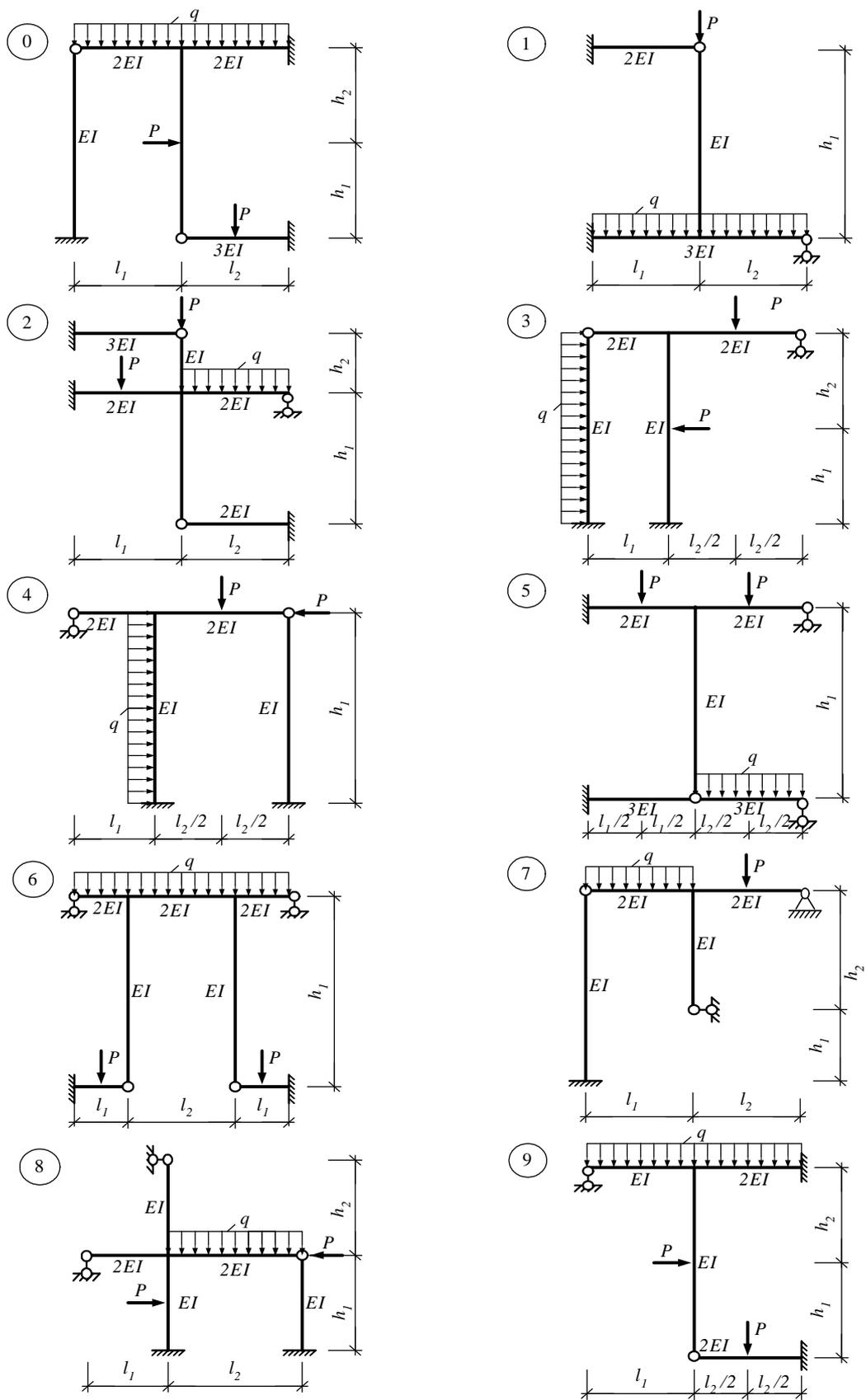


Рис.13

После выбора основной системы следует построить единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов. Единичные эпюры « M_i » строятся от поочередного (углового или линейного) смещения соответствующего узла на величину, равную единице. Грузовая эпюра изгибающих моментов строится в основной системе от заданной внешней нагрузки.

Канонические уравнения метода перемещений имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + \mathbf{L} + r_{1n} \cdot Z_n + R_{1p} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + \mathbf{L} + r_{2n} \cdot Z_n + R_{2p} = 0; \\ \mathbf{L L L L L L L L L L L L L L L L L L}; \\ r_{n1} \cdot Z_1 + r_{n2} \cdot Z_2 + \mathbf{L} + r_{nn} \cdot Z_n + R_{np} = 0. \end{cases}$$

Здесь r_{ik} – реактивное усилие в i -ой дополнительной связи от единичного смещения (углового или линейного) связи k ;

R_{ip} – реактивное усилие в i -ой дополнительной связи от внешней нагрузки.

Если реактивное усилие r_{ik} или R_{ip} является моментом в дополнительной заделке, то оно находится из вырезания и уравнивания соответствующего узла на эпюре M_k или M_p . Если это реакция в дополнительном опорном стержне, то она находится из равновесия отсеченной части рамы по уравнениям $\sum X = 0$ или $\sum Y = 0$ (сечения проводят так, чтобы выделить часть рамы с дополнительным опорным стержнем).

После определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений решается система уравнений и находятся значения неизвестных ранее углов поворотов и линейных смещений узлов Z_i .

Окончательная эпюра изгибающих моментов строится как сумма «исправленных» единичных эпюр и грузовой эпюры моментов

$$M = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + \mathbf{L} + M_n \cdot Z_n + M_p.$$

По эпюре моментов строятся эпюры поперечных и продольных сил таким же образом, как и в методе сил.

Пример.

Для рамы, изображенной на рис. 14 а, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и выполнить их проверки.

Определяем число основных неизвестных метода перемещений

$$\Pi = \Pi_y + \Pi_l = 1 + 1 = 2.$$

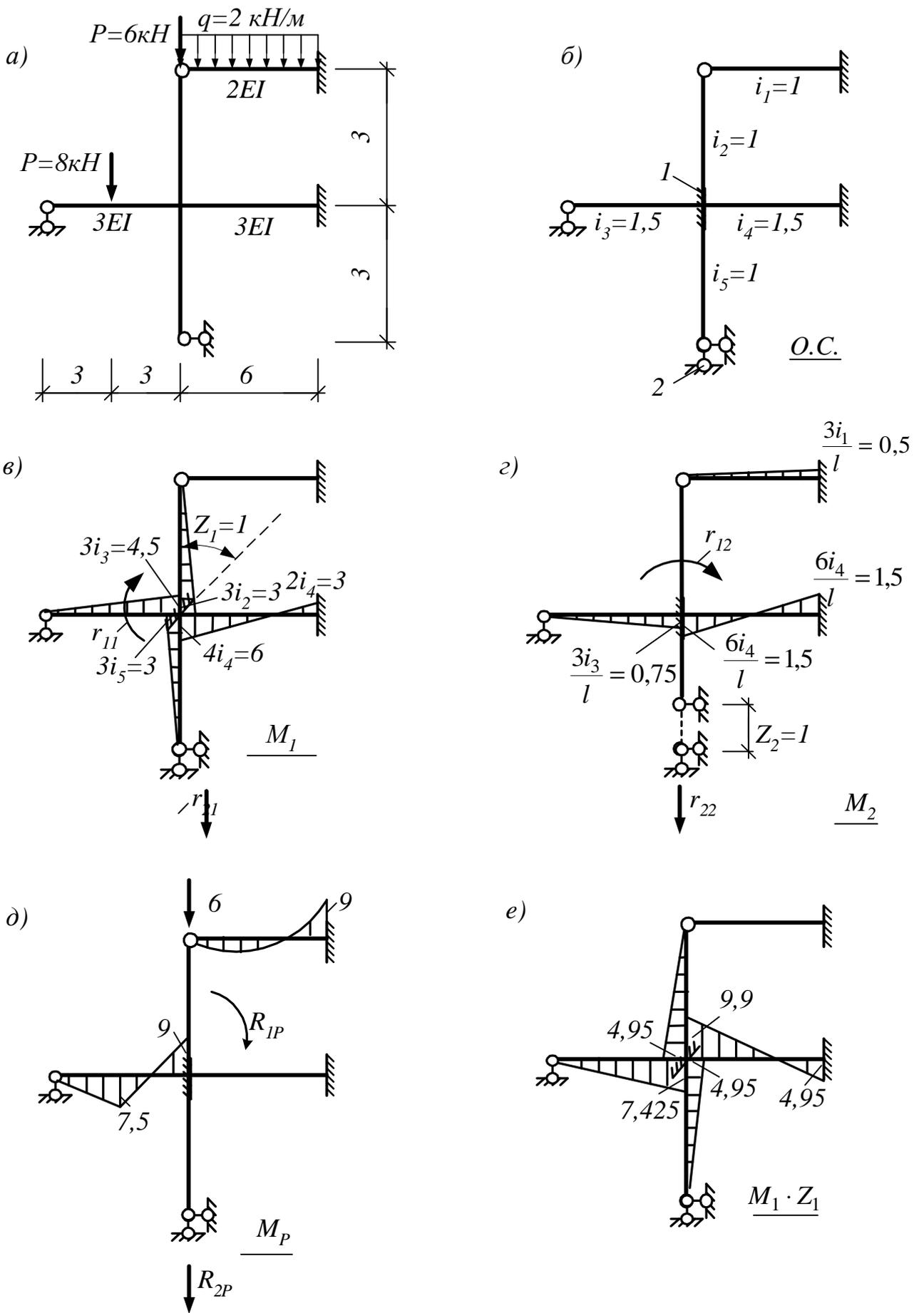


Рис. 14

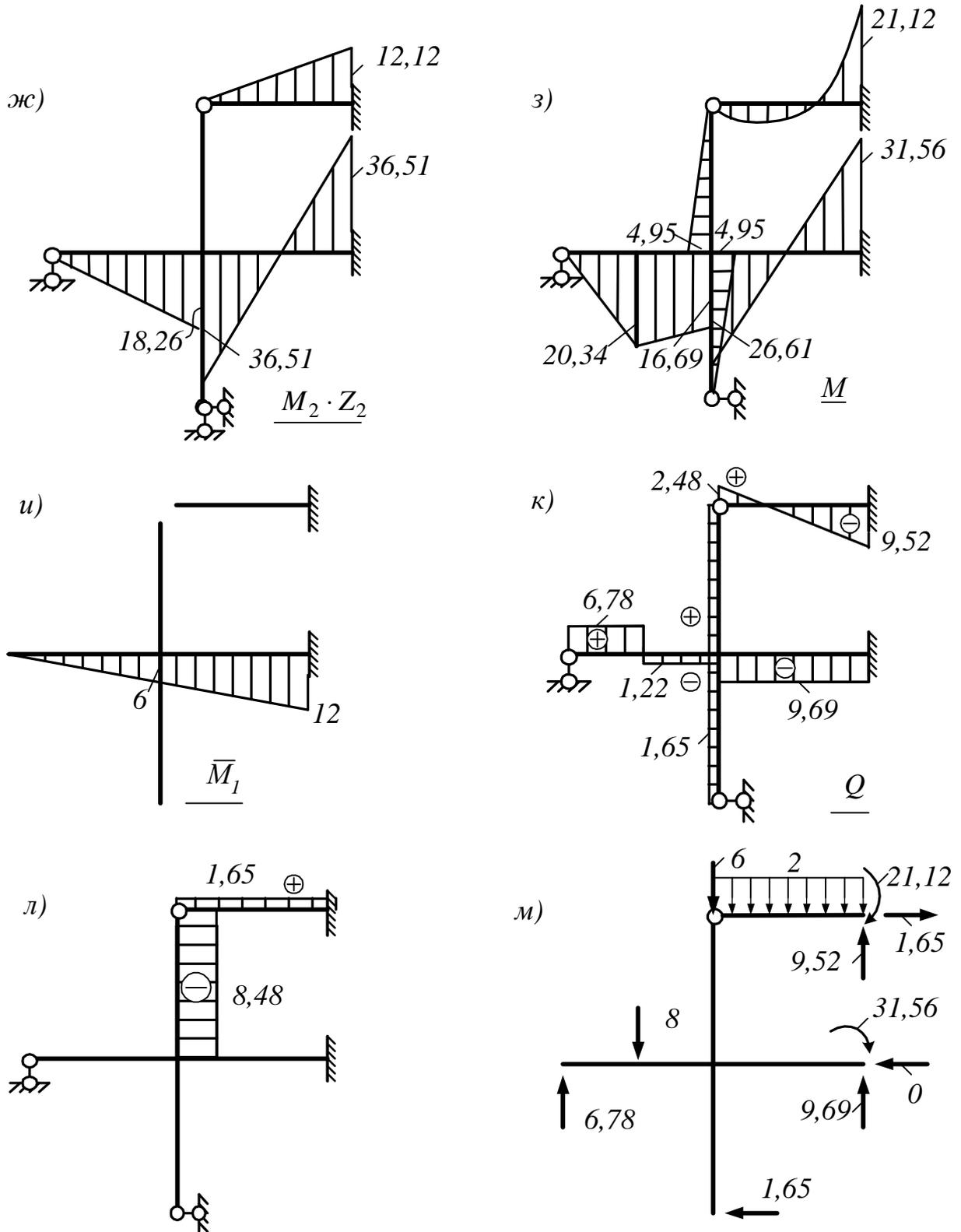


Рис. 14

Изображаем основную систему (рис. 14 б). Приняв $EJ = 3$, вычисляем погонные жесткости стержней i .

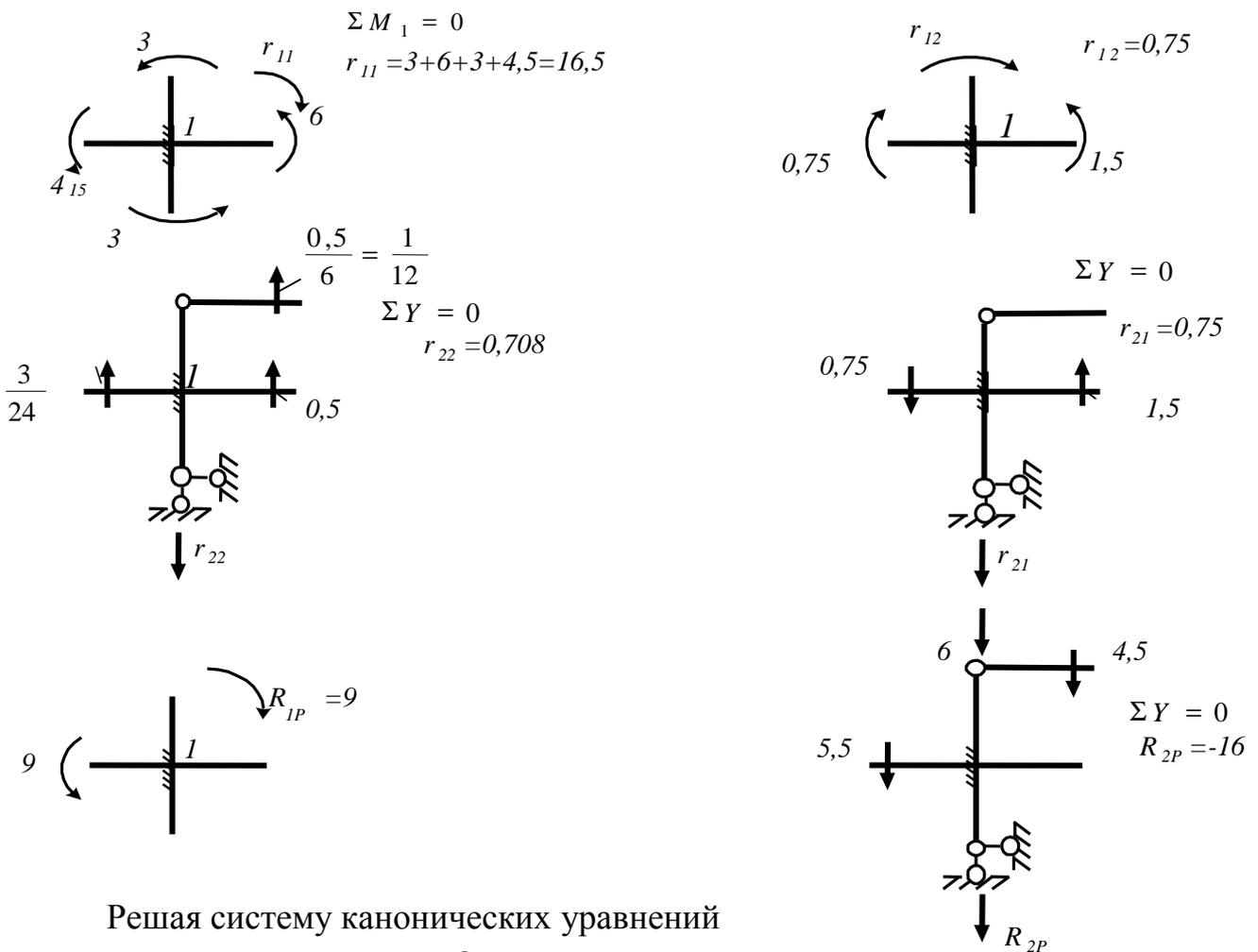
Поворачивая дополнительную заделку 1 на угол $Z_1 = 1$, строим по таблицам эпюру M_1 (рис. 14 в).

Смещая дополнительный опорный стержень вниз на величину $Z_2 = 2$, строим эпюру M_2 (рис. 14 г).

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

Определяем коэффициенты и свободные члены уравнений



Решая систему канонических уравнений

$$\begin{cases} 16,5 \cdot Z_1 + 0,75 \cdot Z_2 + 9 = 0; \\ 0,75 \cdot Z_1 + 0,708 \cdot Z_2 - 16 = 0. \end{cases}$$

получаем

$$Z_1 = -1,65; ; Z_2 = 24,35.$$

Строим «исправленные» единичные эпюры $M_1 \cdot Z_1$ и $M_2 \cdot Z_2$ (рис. 14 е, ж).

Окончательную эпюру « M » строим по формуле:

$$M = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + M_P \text{ (рис. 14з).}$$

Для проверки правильности эпюры « M » строим в основной системе метода сил единичную эпюру « \bar{M}_1 » (рис. 14 и). Результат перемножения эпюр « M » и « \bar{M}_1 » должен быть равен нулю.

$$\sum_0^1 \int \frac{M \cdot M_i ds}{EJ} = \frac{1}{3EJ} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20,34 + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 20,34 \cdot 3 + 2 \cdot 16,69 \cdot 6 + 20,34 \cdot 6 + 16,69 \cdot 3) + \frac{6}{6} (2 \cdot 26,61 \cdot 6 - 2 \cdot 31,56 \cdot 12 + 26,61 \cdot 12 - 31,56 \cdot 6) \right] = 0,07$$

По эпюре изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил « Q » (рис. 14к) и по эпюре « Q » строим эпюру продольных сил « N » (рис. 14 л).

Приложив к раме внешнюю нагрузку, отбросив опорные связи и заменив их реакциями, выполняем статическую проверку равновесия рамы в целом

$$\sum X = 0; \quad 1,65 - 1,65 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 6 + 8 + 2 \cdot 6 - 9,52 - 9,69 - 6,78 = 0.$$

Учебное издание

Составитель: Сыроквашко Иван Степанович

Методические указания
к расчетно-проектировочным работам
по строительной механике

Ответственный за выпуск Сыроквашко И.С.

Редактор Строкач Т.В.

Технический редактор Никитчик А.Д.

Корректор Никитчик Е.В.

Подписано к печати 09.12.2003 г. Формат 60×84/16. Бумага Писч.. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 2,9. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 150 экз. Заказ №934. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул Московская, 267.