

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»
Кафедра строительной механики

Игнатюк В.И., Сыроквашко И.С.

**О ВЕЛИЧИНЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕРАВНОМЕРНОСТИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
ПРИ ИЗГИБЕ**

Методические материалы

Брест, 2015

Содержание

Введение	4
Получение зависимостей и значений коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений для различных поперечных сечений при изгибе	5
1 Круглое сечение.....	5
2 Полукруглое сечение.....	5
3 Круглое сечение со срезанными сегментами.....	6
4 Сечение в виде правильного шестиугольника.....	8
5 Полое прямоугольное сечение.....	9
6 Полое ромбическое сечение.....	10
7 Двутавровое сечение, состоящее из прямоугольных полос.....	12
8 Треугольное сечение.....	14
9 Трапецеидальное сечение.....	14
10 Тавровое сечение.....	16
11 Кольцевое сечение.....	17
Заключение	19
Список использованных источников	20

Введение

При определении в изгибаемых системах потенциальной энергии, работы внутренних сил, перемещений от внутренних нагрузок с учётом влияния поперечных сил в расчёт вводится коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе, величина которого определяется выражением:

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_{омс.}^2}{b^2} dA, \quad (1)$$

где A , I – площадь и момент инерции поперечного сечения элемента; b – ширина (закон изменения ширины) поперечного сечения; $S_{омс.}$ – статический момент отсечённой части сечения относительно центральной оси.

В известной учебной и справочной литературе [1–23] по строительной механике и сопротивлению материалов значения коэффициента k приводятся для весьма ограниченного числа сечений – для прямоугольного сечения ($k = 1,2$), для прокатных двутавров (приближённая формула – $k = A/A_{см}$, где A – общая площадь поперечного сечения, а $A_{см}$ – площадь вертикальной стенки двутавра), для круглого поперечного сечения. Причём в ряде случаев для одинаковых сечений в разных литературных источниках приводятся разные, часто существенно отличающиеся, значения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений k . Так для круглого сечения в работах [1, 4–6, 13, 18, 21, 22] значение коэффициента k приведено равным $10/9$, в [3, 7, 9, 14, 16, 17, 20] – $k = 32/27$, в [8, 23] – $k = 32/37$. В работе [5] для двутавров (имеется в виду, вероятно, для прокатных двутавров) значение коэффициента k приведено равным $3,14$, в остальных работах для прокатных двутавров приводится приближённая формула $k = A/A_{см}$, при вычислении по которой величина k может существенно отличаться от $3,14$. В работах [5, 21] значение k для тонкостенного кольца приведено равным 2 , хотя о том, какое кольцо понимается под тонкостенным, ничего не говорится.

Цель данной работы уточнить значения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе k для круглого и двутаврового сечений и получить выражения для определения этого коэффициента, а также его значения для ряда поперечных сечений, не встречающихся в литературе.

Ниже приведены формы рассмотренных сечений и полученные для них выражения и значения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе.

Получение зависимостей и значений коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений для различных поперечных сечений при изгибе

1 Круглое сечение

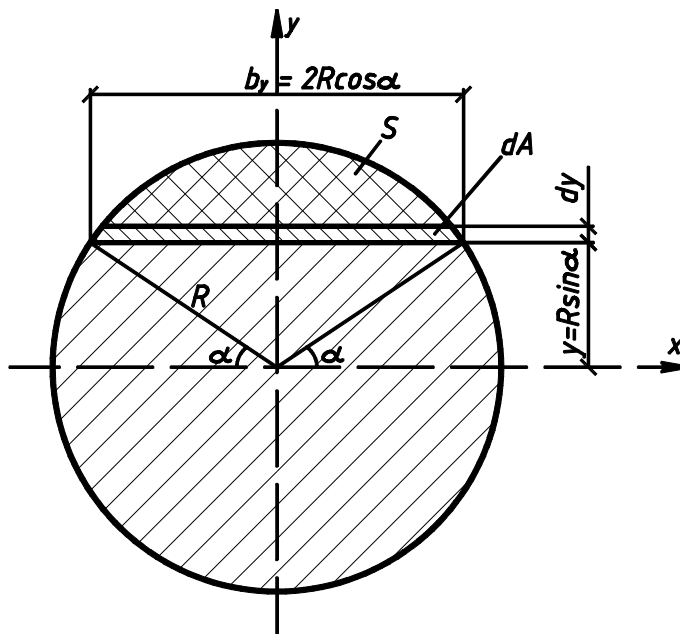


Рис. 1

$$S_{omc.} = \frac{2R^3 \cos^3 a}{3}; \quad A = pR^2; \quad I = \frac{pR^4}{4}; \quad \frac{A}{I^2} = \frac{16}{pR^6};$$

$$y = R \sin a; \quad dy = R \cos a da; \quad dA = b_y dy = b_y R \cos a da;$$

$$k = \frac{16}{pR^6} \int_y \frac{S_{omc.}^2}{b_y} dy = \frac{32R^6}{9pR^6} \int_{-p/2}^{p/2} \cos^6 a da = \frac{10}{9}. \quad (2)$$

2 Полуциркульное сечение

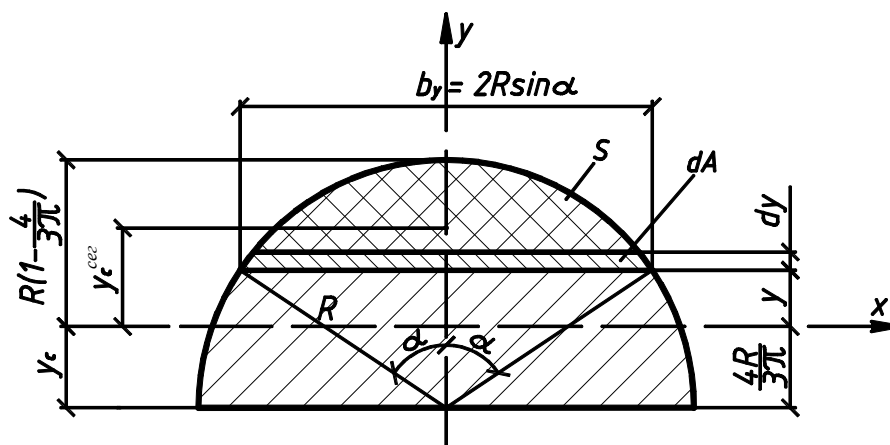


Рис. 2

$$A = \frac{pR^2}{2}; \quad I = \frac{pR^4}{8}; \quad \frac{A}{I^2} = \frac{32}{pR^6}; \quad y_c = \frac{4R}{3p};$$

$$S_{omc.} = y_c^{ce2} \cdot A_{omc.}$$

$$y_c^{cee} = \frac{aR^2 \cdot \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin 2a}{2a} - R \cos a \cdot R \sin a \cdot \frac{2}{3} R \cos a}{aR^2 - R^2 \sin a \cos a} - \frac{4R}{3p} =$$

$$= \frac{R \sin 2a \cdot (1 - \cos a)}{3(a - \frac{1}{2} \sin 2a)} - \frac{4R}{3p};$$

$$A_{omc.} = R^2(a - \frac{1}{2} \sin 2a);$$

$$b_y = 2R \sin a; \quad y = R \cos a; \quad dy = R \sin a da; \quad dA = b_y dy = b_y R \sin a da;$$

$$k = \frac{32}{pR^6} \int_y \frac{S_{omc.}^2}{b_y} dy = \frac{32}{pR^6} \int_0^{\frac{p}{2}} \left[\left(\frac{R \sin 2a \cdot (1 - \cos a)}{3(a - 0.5 \sin 2a)} - \frac{4R}{3p} \right) \cdot R^2(a - \frac{1}{2} \sin 2a) \right]^2 \times$$

$$\times R \sin a da = \frac{p \left(\frac{31p}{96} - \frac{551}{180p} \right)}{9 \left(\frac{p}{8} - \frac{8}{9p} \right)^2} = 1,1617. \quad (3)$$

3 Круглое сечение со срезанными сегментами

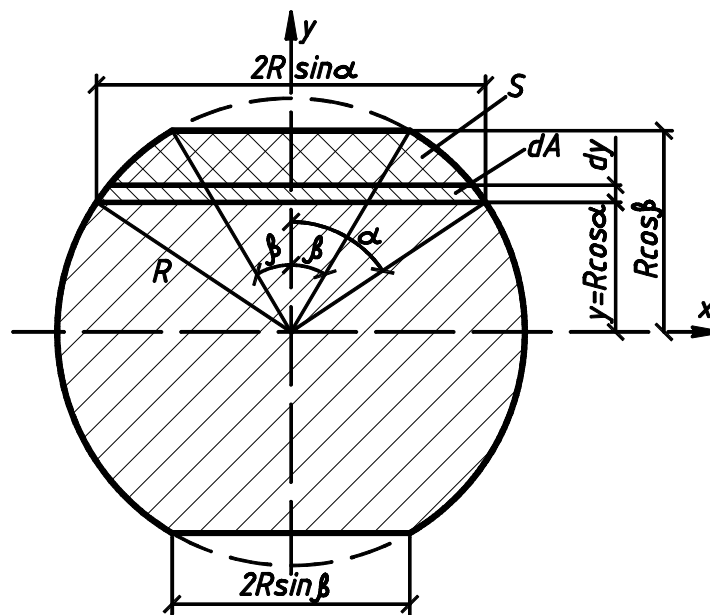


Рис. 3

$$A = R^2(p - 2(b - 0.5 \sin 2b));$$

$$A_{cez} = R^2(b - 0.5 \sin 2b);$$

$$y_c^{cee} = \frac{R \sin 2b(1 - \cos b)}{3(b - 0.5 \sin 2b)}$$

$$I = \frac{pR^4}{4} - 2 \frac{R^2 \sin^2 2b(1 - \cos b)^2}{9(b - 0.5 \sin 2b)^2} \cdot R^2(b - 0.5 \sin 2b) =$$

$$= R^4 \left(\frac{p}{4} - \frac{2 \sin^2 2b(1 - \cos b)^2}{9(b - 0.5 \sin 2b)} \right)$$

$$\frac{A}{I^2} = \frac{p - 2(b - 0.5 \sin 2b)}{R^6 \left(\frac{p}{4} - \frac{2 \sin^2 2b(1 - \cos b)^2}{9(b - 0.5 \sin 2b)} \right)^2};$$

$$S_{omc.} = \frac{R^3 \sin 2a \cdot (1 - \cos a)}{3} - \frac{R^3 \sin 2b \cdot (1 - \cos b)}{3} = \frac{R^3}{3} (\sin 2a \cdot (1 - \cos a) -$$

$$- \sin 2b \cdot (1 - \cos b));$$

$$b_y = 2R \sin a; \quad y = R \cos a; \quad dy = R \sin a \, da;$$

$$dA = b_y dy = b_y R \sin a \, da;$$

$$k = \frac{p - 2(b - 0.5 \sin 2b)}{R^6 \left(\frac{p}{4} - \frac{2 \sin^2 2b(1 - \cos b)^2}{9(b - 0.5 \sin 2b)} \right)^2} \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{R^3}{3} (\sin 2a \cdot (1 - \cos a) - \sin 2b \cdot (1 - \cos b)) \right)^2 \times$$

$$\frac{2R \sin a}{2R \sin a} \times R \sin a \, da = \frac{256(p - 2b + \sin 2b)}{9(2p - 4b + \sin 4b)^2} \left[\frac{5}{32}(p - 2b) + \frac{15 \sin 2b}{64} - \frac{3 \sin 4b}{64} + \frac{\sin 6b}{192} - \right.$$

$$\left. - 2 \sin^3 \left(\cos b - \frac{\cos^3 b}{3} \right) + \frac{\sin^6 b}{2} (p - 2b) \right]. \quad (4)$$

При $b = 0$ получим круглое поперечное сечение и $k = 10/9$.

При $b = p/6 - k = 1,132$.

4 Сечение в виде правильного шестиугольника

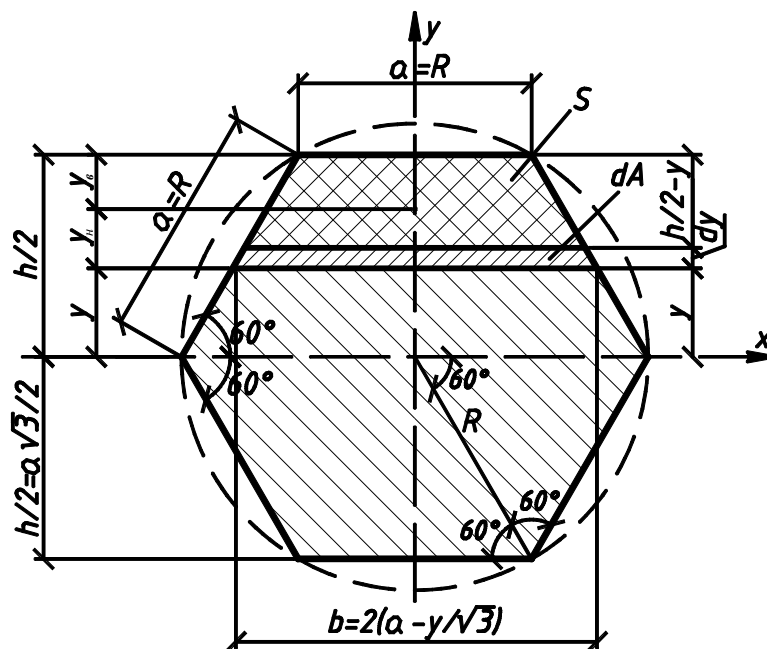


Рис. 4

$$A = 2 \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2};$$

$$I = \frac{ah^3}{12} + 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right) = \frac{5\sqrt{3}a^4}{16};$$

$$\frac{A}{I^2} = \frac{3\sqrt{3}a^2 \cdot 256}{2 \cdot 25a^8 \cdot 3} = \frac{128\sqrt{3}}{25a^6};$$

$$b_y = 2(a - y\sqrt{3});$$

$$S_{omc.} = A_{omc.} \cdot y_c^{omc.} = \frac{a}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{3}y \right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{2y}{3} \right);$$

$$dA = b_y dy;$$

$$k = \frac{128\sqrt{3}}{25a^6} \cdot 2 \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{\left(\frac{a}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{3}y \right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right) \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{2y}{3} \right) \right)}{2(a - y\sqrt{3})} dy =$$

$$= -\frac{384}{25} \left(\frac{97}{960} + \frac{\ln 0,5}{4} \right) = 1,1097. \quad (5)$$

5 Полое прямоугольное сечение

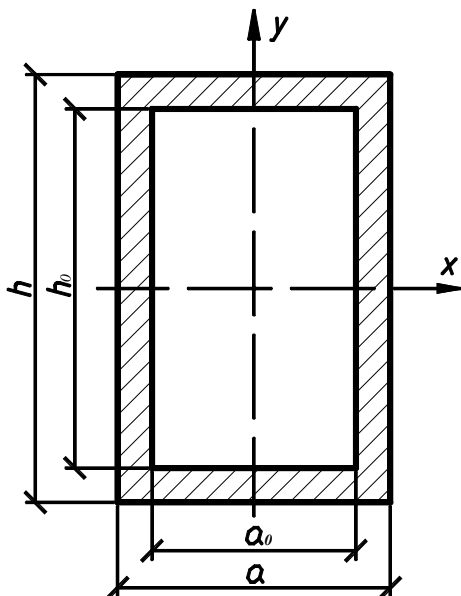


Рис. 5

$$A = ah - a_0h_0; \quad I = \frac{ah^3}{12} - \frac{a_0h_0^3}{12};$$

$$A_{omc.1} = a(h - y); \quad y_{c1}^{omc} = \frac{h/2 + y}{2} = \frac{h + 2y}{4}; \quad b_{y1} = a;$$

$$S_{omc.1} = A_{omc.1} \cdot y_{c1}^{omc} = a(h - y) \cdot \frac{h + 2y}{4};$$

$$A_{omc.2} = (a - a_0)(h_0 - y); \quad y_{c2}^{omc} = \frac{h_0 + 2y}{4}; \quad b_{y2} = a - a_0;$$

$$S_{omc.2} = A_{omc.2} \cdot y_{c2}^{omc} = (a - a_0)(h_0 - y) \cdot \frac{h_0 + 2y}{4};$$

$$dA = b_y dy;$$

$$k = \frac{(ah - a_0h_0) \cdot 144}{(ah^3 - a_0h_0^3)^2} \cdot \left(2 \int_{h_0}^h \frac{a^2(h - y)^2 \cdot \left(\frac{h + 2y}{4}\right)^2}{a} dy + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{h_0} \frac{(a - a_0)^2(h_0 - y)^2 \cdot \left(\frac{h_0 + 2y}{4}\right)^2}{a - a_0} dy \right) = \frac{6 \left(1 - \frac{a_0h_0}{ah}\right)}{5 \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \left(1 - \frac{a_0h_0^3}{ah^3}\right)^2} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{a_0}{a} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{15h_0}{h} - \frac{30h_0^3}{h^3} + \frac{7h_0^5}{h^5} + \frac{8a_0h_0^5}{ah^5} \right) \right] \right\}. \quad (6)$$

Данное выражение полностью совпадает с полученным для такого же сечения в [10].

Если принять $a_0 = 0$ и $h_0 = 0$, то будем иметь прямоугольное поперечное сечение и по выражению (6) получим $k = 6/5$.

Для $\frac{a_0}{a} = \frac{1}{4}$ и $\frac{h_0}{h} = \frac{1}{4}$ получим $k = 1,289$; для $\frac{a_0}{a} = \frac{1}{2}$ и $\frac{h_0}{h} = \frac{1}{2}$ – $k = 1,548$, а для $\frac{a_0}{a} = \frac{h_0}{h} = \frac{9}{10}$ – $k = 1,9603$.

6 Полое ромбическое сечение

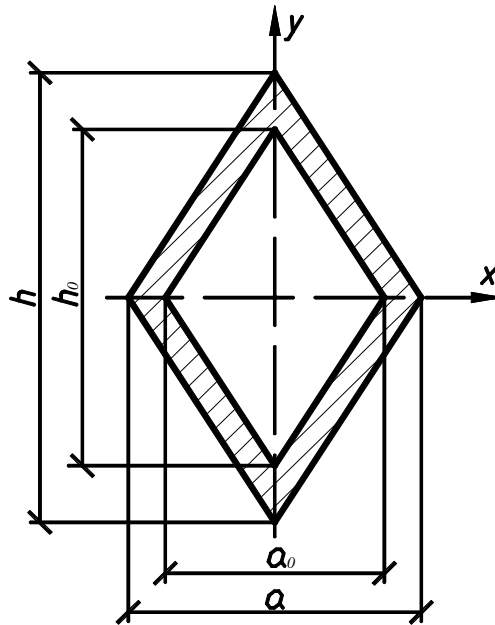


Рис. 6

$$A = ah - a_0h_0; \quad I = \frac{ah^3}{12} - \frac{a_0h_0^3}{12};$$

$$a_y = \frac{a(h-2y)}{h}; \quad a_{0y} = \frac{a_0(h_0-2y)}{h_0};$$

$$A_{омс.1} = \frac{1}{2} a_y \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(h-2y)}{h} \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

$$y_{с1}^{омс} = y + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{2}{3} y + \frac{h}{6}; \quad b_{y1} = a_y = \frac{a(h-2y)}{h};$$

$$S_{omc.1} = A_{omc.1} \cdot y_{c1}^{omc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(h-2y)}{h} \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{h}{6}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{a(h-2y)^2}{h} \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{h}{6}\right)$$

$$A_{omc.2} = \frac{1}{2} a_{0y} \left(\frac{h_0}{2} - y\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0(h_0-2y)}{h_0} \cdot \left(\frac{h_0}{2} - y\right);$$

$$y_{c2}^{omc} = y + \frac{1}{3} \left(\frac{h_0}{2} - y\right) = \frac{2}{3}y + \frac{h_0}{6}; \quad b_{y2} = a_y - a_{0y} = \frac{a(h-2y)}{h} - \frac{a_0(h_0-2y)}{h_0};$$

$$S_{omc.2} = A_{omc.2} \cdot y_{c2}^{omc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0(h_0-2y)}{h_0} \cdot \left(\frac{h_0}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{h_0}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{a_0(h_0-2y)^2}{h_0} \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{h_0}{6}\right)$$

$$dA = b_y dy;$$

$$k = \frac{(ah - a_0h_0) \cdot 144}{(ah^3 - a_0h_0^3)^2} \left[2 \int_{h_0}^h \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a(h-2y)^2}{h} \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{h}{6}\right)\right)^2}{\frac{a(h-2y)}{h}} dy + \right.$$

$$+ 2 \int_0^{h_0} \frac{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a_0(h_0-2y)^2}{h_0} \cdot \left(\frac{2}{3}y + \frac{h_0}{6}\right)\right)^2}{\frac{a(h-2y)}{h} - \frac{a_0(h_0-2y)}{h_0}} dy = \frac{\left(1 - \frac{a_0h_0}{ah}\right)}{3a \left(1 - \frac{a_0h_0^3}{ah^3}\right)^2} \left[31 + \frac{h_0}{h} \left(\frac{90h_0}{h} + \frac{160h_0^2}{h^2} + \right.\right.$$

$$\left. \left. + \frac{15h_0^3}{h^3} - \frac{48h_0^4}{h^4} + \frac{40h_0^5}{h^5}\right) - \frac{12a_0h_0}{ah} \times \left(5 + \frac{10h_0}{h} + \frac{5h_0^2}{h^2} + \frac{4h_0^4}{h^4}\right) \right]. \quad (7)$$

При $a_0 = h_0 = 0$, т.е. для сплошного ромбического сечения получим $k = \frac{31}{30}$.

Для $\frac{a_0}{a} = \frac{1}{2}$ и $\frac{h_0}{h} = \frac{1}{2}$ будем иметь $k = 1,11$.

7 Двутавровое сечение, состоящее из прямоугольных полос

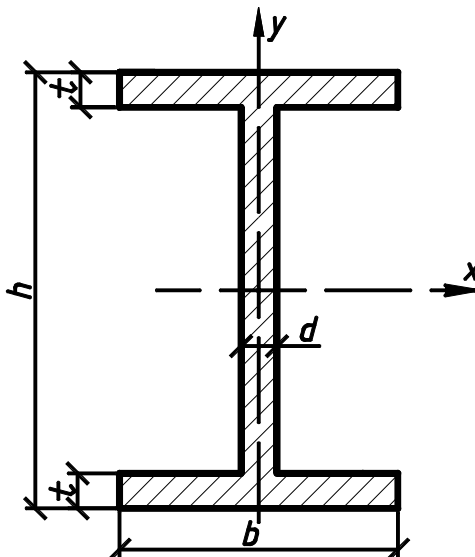


Рис. 7

$$A = 2tb + d(h - 2t) = 2tb \left(1 + \frac{d}{b} \left(\frac{h}{2t} - 1 \right) \right);$$

$$I = \frac{bh^3}{12} - 2 \left(\frac{\frac{(b-d)}{2} \cdot (h-2t)^3}{12} \right) = \frac{bt^3 \left(\frac{h^3}{t^3} - \left(1 - \frac{d}{b} \right) \cdot \left(\frac{h}{t} - 2 \right)^3 \right)}{12};$$

$$\frac{A}{I^2} = \frac{2tb \left(1 + \frac{d}{b} \left(\frac{h}{2t} - 1 \right) \right) \cdot 144}{b^2 t^6 \left(\frac{h^3}{t^3} - \left(1 - \frac{d}{b} \right) \cdot \left(\frac{h}{t} - 2 \right)^3 \right)^2};$$

$$A_{omc.1} = b \left(\frac{h}{2} - y \right);$$

$$y_{c1}^{omc} = \frac{h}{4} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad b_{y1} = b;$$

$$S_{omc.1} = A_{omc.1} \cdot y_{c1}^{omc} = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - y \right)^2;$$

$$A_{omc.2} = bt + d \left(\frac{h}{2} - t - y \right);$$

$$b_{y2} = d;$$

$$S_{omc.2} = \frac{1}{2} \left(bt(h-t) + d \left(\frac{h}{2} - t - y \right) \left(\frac{h}{2} - t + y \right) \right);$$

$$dA = b_y dy;$$

$$k = \frac{2tb \left(1 + \frac{d}{b} \left(\frac{h}{2t} - 1 \right) \right) \cdot 144}{b^2 t^6 \left(\frac{h^3}{t^3} - \left(1 - \frac{d}{b} \right) \left(\frac{h}{t} - 2 \right)^3 \right)^2} \left(2 \int_{\frac{h}{2}-t}^{\frac{h}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - y \right)^2 \right)^2}{b} dy + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{\frac{h}{2}-t} \frac{\left(\frac{1}{2} \left(bt(h-t) + d \left(\frac{h}{2} - t - y \right) \left(\frac{h}{2} - t + y \right) \right) \right)^2}{d} dy = \right. \\ \frac{24 \left[1 + \frac{d}{b} \left(\frac{h}{2t} - 1 \right) \right]}{5 \left[\frac{h^3}{t^3} - \left(1 - \frac{d}{b} \right) \left(\frac{h}{t} - 2 \right)^3 \right]^2} \left[6 - \frac{h}{t} \left(15 - \frac{10h}{t} \right) + \frac{30b}{d} \left(\frac{h}{t} - 1 \right)^2 \left(\frac{h}{2t} - 1 \right) + \right. \\ \left. + 40 \left(\frac{h}{t} - 1 \right) \left(\frac{h}{2t} - 1 \right)^3 + \frac{16d}{b} \left(\frac{h}{2t} - 1 \right)^5 \right]. \quad (8)$$

При $t = \frac{h}{2}$ или $d = b$ будем иметь прямоугольное поперечное сечение, для которого получим $k = 6/5 = 1,2$.

Для $h = 20$ см, $b = 10$ см, $t = 0,84$ см и $d = 0,52$ см, что соответствует прокатному двутавру № 20, по выражению (8) получим $k \approx 2,573$. По формуле $k \approx \frac{A}{A_{cm}}$ для этого же двутавра будем иметь $k \approx \frac{26,8}{20 \cdot 0,52} \approx 2,576$.

Аналогично, например, для прокатного двутавра № 40 получим $k \approx 2,18675$, для двутавра № 50 – $k \approx 2,00$ и т.д.

Утверждение в [5], что для двутавров $k = 3,14$, неверно.

Заметим, что результаты вычисления коэффициента k по формуле (8) для двутаврового сечения и по формуле (6) для полого прямоугольного сечения при $h_0 = h - 2t$ и $a_0 = a - d$ полностью совпадают.

8 Треугольное сечение

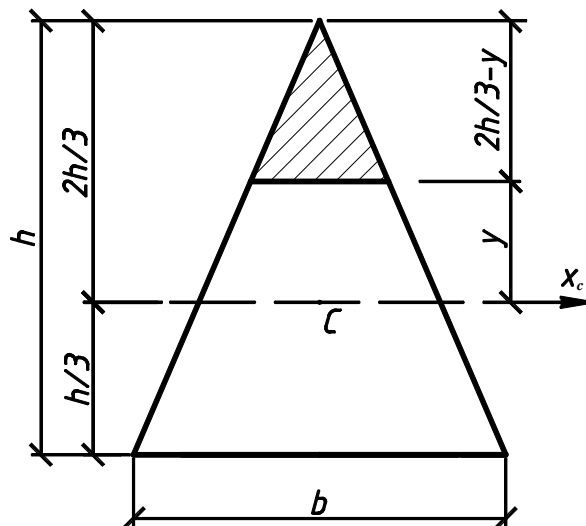


Рис. 8

$$A = \frac{bh}{2}; \quad I = \frac{bh^3}{36};$$

$$b_y = \frac{b}{h} \left(\frac{2}{3}h - y \right);$$

$$S_{omc.} = \frac{b}{3h} \left(\frac{2}{3}h - y \right)^2 \left(\frac{h}{3} + y \right);$$

$$k = \frac{648}{bh^5} \int_{\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{S_{omc.}^2}{b_y} dy = \frac{648}{bh^5} \int_{\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{b}{9h} \left(\frac{2h}{3} - y \right)^3 \left(\frac{h}{3} + y \right)^2 dy = 1,2. \quad (9)$$

9 Трапецидальное сечение

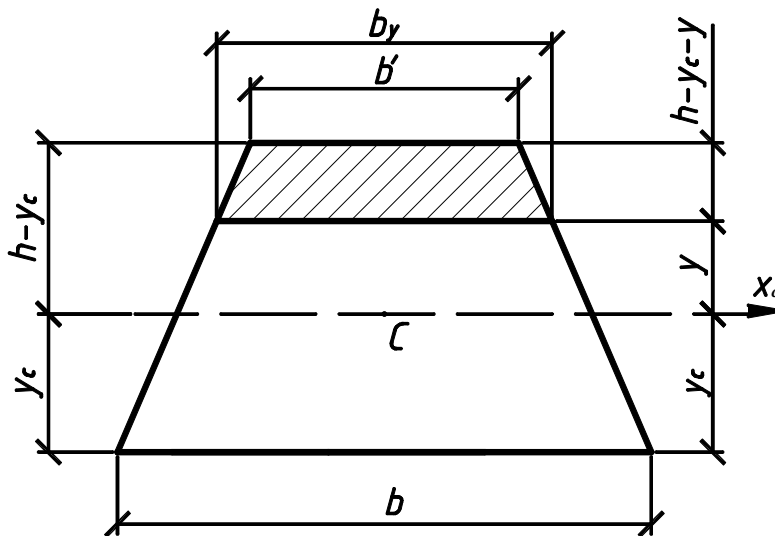


Рис. 9

$$A = \frac{bh}{2} \left(1 + \frac{b'}{b} \right);$$

$$\bar{b}_y = \frac{b_y}{b} = \frac{y + y_c}{h} \left(\frac{b'}{b} - 1 \right) + 1; \quad \bar{y}_c = \frac{y_c}{h} = \frac{1}{3} \frac{\left(1 + 2 \frac{b'}{b} \right)}{\left(1 + \frac{b'}{b} \right)};$$

$$I = \frac{bh^3}{2} \left[\frac{1}{18} \left(1 + \frac{b'}{b} \right) + \left(\frac{y_c}{h} - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{b'}{b} \left(\frac{y_c}{h} - \frac{2}{3} \right)^2 \right];$$

$$S_{omc.} = \frac{b'}{6} (h - y_c - y) [y + 2(h - y_c)] + \frac{b}{6} \left[\frac{y_c + y}{h} \left(\frac{b'}{b} - 1 \right) + 1 \right] (h - y_c - y) \times \\ \times [2y + (h + y_c)];$$

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S_{omc.}^2}{b_y^2} dA = \frac{1}{18} \frac{(1+a)}{\left[\frac{1}{18}(1+a) + \left(\bar{y}_c - \frac{1}{3} \right)^2 + a \left(\bar{y}_c - \frac{2}{3} \right)^2 \right]^2} \left\{ \frac{2}{3} (a-1) \times \right. \\ \times \left[(1 - \bar{y}_c)^6 - \bar{y}_c^6 \right] + \frac{8}{5} [1 + \bar{y}_c (a-1)] \cdot \left[(1 - \bar{y}_c)^5 + \bar{y}_c^5 \right] + \frac{1}{4} [(1 - \bar{y}_c) \cdot (-a - 1 - \bar{y}_c \times \\ \times (a-1))] \cdot (-a - 1 - \bar{y}_c (a-1))] + \frac{k_0}{a} \left[(1 - \bar{y}_c)^4 - \bar{y}_c^4 \right] + \frac{1}{3} [k_1 - 5(1 - \bar{y}_c)^2 \times \\ \times (2a + \bar{y}_c (a-1) + 1)] \cdot \left[(1 - \bar{y}_c)^3 + \bar{y}_c^3 \right] + \frac{1}{2} \left[(1 - \bar{y}_c)^3 (3a + \bar{y}_c (a-1) + 1) - k_2 \right] \times \\ \left. \times (1 - 2\bar{y}_c) + (1 - \bar{y}_c)^4 \cdot [4a + 1 + \bar{y}_c (a-1)] - k_3 + k_4 \ln a \frac{k_0}{a} \right\}. \quad (10)$$

В (10) обозначено:

$$a = \frac{b'}{b}; \quad k_0 = \frac{a^2}{a-1}; \quad k_1 = k_0 [2(1 - \bar{y}_c) - b];$$

$$k_2 = 3k_0 (1 - \bar{y}_c)^2 + b k_1; \quad k_3 = 4k_0 (1 - \bar{y}_c)^3 + b k_2;$$

$$k_4 = 4k_0 (1 - \bar{y}_c)^4 + b k_3; \quad \bar{y}_c = \frac{1 + 2a}{3(1+a)},$$

где $b = \bar{y}_c + \frac{1}{a-1} = \frac{2}{3} \frac{a^2 + a + 1}{(a+1)(a-1)}$.

Вычисление коэффициента k по приведённой формуле показывает, что при изменении a от 0 до 1 ($0 < a < 1$), то есть в пределах между граничными для трапеции случаями, соответствующими треугольному и прямоугольному сечениям, коэффициент неравномерности распределения касательных

напряжений изменяется от 1,2 до 1,2 с небольшим увеличением этого значения в промежутке; при этом максимальное значение k достигается при $a \approx 0,2$, которое при этом равно 1,2042785 и, как видим, отличается от значения 1,2 на 0,357%, то есть незначительно. Поэтому в практических расчётах значение коэффициента k для любых трапецидальных сечений может приниматься равным 1,2.

Заметим, что непосредственно из выражения (10) нельзя получить величины коэффициента k для прямоугольного и треугольного сечений, так как в процессе получения этого выражения производились преобразования, недопустимые при $a = 1$ и $a = 0$. Однако при выполнении преобразований исходных соотношений (10) с учётом $a = 1$ и $a = 0$ в каждом из этих случаев отдельно получим значения k соответственно для прямоугольного и треугольного сечений, равные в обоих случаях 1,2.

10 Тавровое сечение

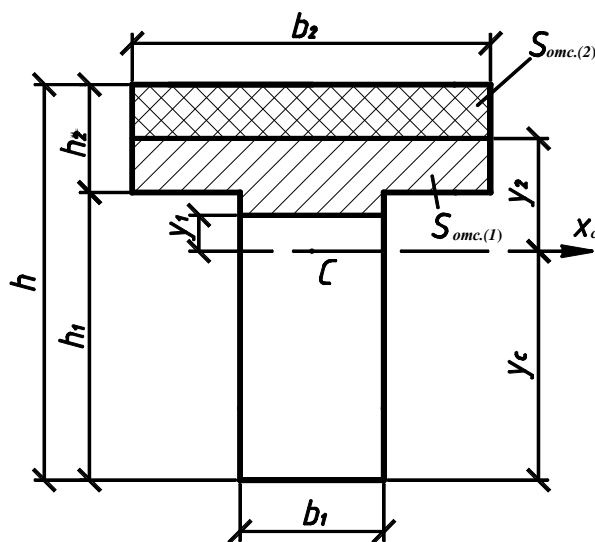


Рис. 10

$$A = b_1 h_1 + b_2 h_2; \quad y_c = \frac{h_1}{2} + \frac{b_2 h_2}{2} \frac{h}{A};$$

$$I = \frac{(b_1 h_1^2 - b_2 h_2^2)^2 + 4b_1 h_1 b_2 h_2 h^2}{12A};$$

$$b_{y1} = b_1; \quad b_{y2} = b_2;$$

$$S_{omc.(1)} = b_2 h_2 \left[(h_1 - y_c) + \frac{h_2}{2} \right] + \frac{b_1}{2} [(h_1 - y_c)^2 - y_1^2];$$

$$S_{omc.(2)} = \frac{b_2}{2} [(h - y_c)^2 - y_2^2];$$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{A}{I^2} \left[\int_{-y_c}^{h_1-y_c} \frac{S_{omc.(1)}^2}{b_{y1}} dy_1 + \int_{h_1-y_c}^{h-y_c} \frac{S_{omc.(2)}^2}{b_{y2}} dy_2 \right] = \\
&= 144 \frac{\left(1 + \frac{b_1 h_1}{b_2 h_2}\right)^3}{\left\{ \left[\frac{b_1}{b_2} \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1 \right]^2 - 4 \frac{b_1 h_1}{b_2 h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^2 \right\}^2} \cdot \left\{ \frac{b_2 h_1}{b_1 h_2} \left[\left(\frac{h_1 - y_c}{h_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right]^2 + \right. \\
&+ \frac{h_1}{3h_2} \left(\frac{h_1 - y_c}{h_2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{h_1 - y_c}{h_2}\right) \cdot \left(\frac{2h_1 - y_c}{h_2}\right) - \frac{y_c^2}{h_2^2} \right] + \frac{b_1 h_1}{12b_2 h_2} \left(\frac{h_1 - y_c}{h_2}\right)^2 \times \\
&\times \left(\frac{h_1^2}{h_2^2} - \frac{3y_c^2}{h_2^2}\right)^2 + \frac{b_1}{20b_2} \left[\left(\frac{h_1 - y_c}{h_2}\right)^5 + \left(\frac{y_c}{h_2}\right)^5 \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{h - y_c}{h_2}\right)^4 - \frac{1}{6} \left(\frac{h - y_c}{h_2}\right)^2 \times \\
&\times \left[\left(\frac{h - y_c}{h_2}\right)^3 - \left(\frac{h_1 - y_c}{h_2}\right)^3 \right] + \frac{1}{20} \left[\left(\frac{h - y_c}{h_2}\right)^5 - \left(\frac{h_1 - y_c}{h_2}\right)^5 \right] \left. \right\}. \quad (11)
\end{aligned}$$

При $b_1 = b_2$, а также при $b_1 = 0$, $h_1 = 0$ и при $b_2 = 0$, $h_2 = 0$, получаем прямоугольное сечение и $k = 1,2$. Для $b_1 = 2\text{см}$, $h_1 = 7\text{см}$; $b_2 = 8,75\text{см}$, $h_2 = 2\text{см}$ коэффициент k получаем равным 1,83265, а для $b_1 = 1\text{см}$, $h_1 = 12\text{см}$; $b_2 = 4\text{см}$, $h_2 = 6\text{см}$ – $k = 1,8$.

11 Кольцевое сечение

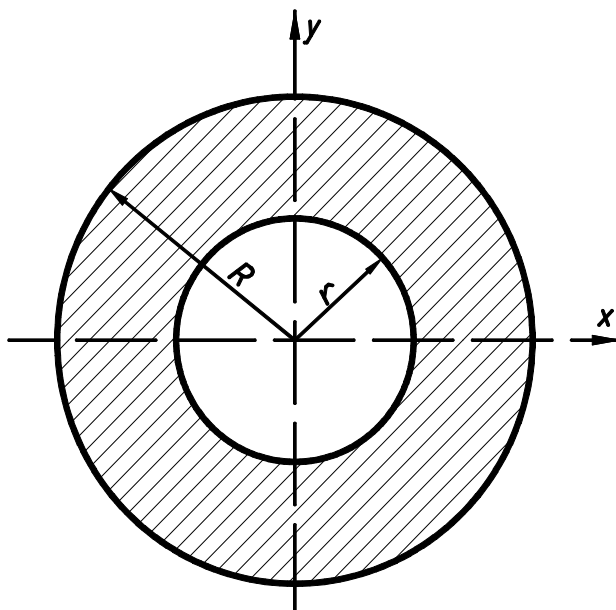


Рис.11

$$A = pR^2 - pr^2 = p(R^2 - r^2);$$

$$I = \frac{pR^4}{4} - \frac{pr^4}{4} = \frac{p}{4}(R^4 - r^4);$$

$$\frac{A}{I^2} = \frac{16(R^2 - r^2)}{p(R^4 - r^4)^2};$$

$$\sin a_1 = \frac{y}{R}; \quad \sin a_2 = \frac{y}{r}; \quad a_1 = \arcsin\left(\frac{r}{R} \sin a_2\right);$$

$$S_{omc.1} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \cos^3 a_1; \quad S_{omc.2} = \frac{2}{3} \left(R^3 \cdot \cos^3 \left(\arcsin\left(\frac{r}{R} \sin a_2\right) \right) - r^3 \cos^3 a_2 \right);$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{16(R^2 - r^2)}{p(R^4 - r^4)^2} \left(2 \int_{\arcsin\left(\frac{r}{R}\right)}^{\frac{h}{2}} \frac{\left(\frac{2}{3} R^3 \cdot \cos^3 a_1\right)^2}{2R \cos a_1} r \cdot \cos a_1 da_1 + \right. \\ &+ 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\left(\frac{2}{3} \left(R^3 \cdot \cos^3 \left(\arcsin\left(\frac{r}{R} \sin a_2\right) \right) - r^3 \cos^3 a_2 \right)\right)^2}{2(R \cos a_1 - r \cos a_2)} r \cdot \cos a_2 da_2 = \\ &= \frac{16}{9p} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} \cdot \left\{ p \left[\frac{5}{8} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^4 - \frac{3}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^6 \right] + \arcsin \frac{r}{R} \cdot \right. \\ &+ \left[\frac{5}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^4 - \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{16} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right] \sin \left(2 \arcsin \frac{r}{R} \right) + \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \cdot \\ &\left. \cdot \sin \left(4 \arcsin \frac{r}{R} \right) - \frac{1}{48} \sin \left(6 \arcsin \frac{r}{R} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^3 \cdot \cos^3 \left(\arcsin \frac{r}{R} \right) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

При $r = 0$ по этой формуле получаем для сплошного круглого сечения $k = 10/9 = 1,1111$. Для кольцевых сечений при $r/R = 0,1$ получаем $k = 1,1191$; при $r/R = 0,5$ получаем $k = 1,3176$; при $r/R = \sqrt{3}/2 = 0,866$ – $k = 1,486$; при $r/R = 0,95$ – $k = 1,4981$ и при $r/R \rightarrow 1$ получаем, что коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе стремиться к 1,5.

Заключение

Анализируя представленные выше результаты, можно утверждать, что, действительно, величина коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе для простых сечений зависит только от формы поперечных сечений, что отмечается во многих работах [2,4,11,12,14,15], и является для каждой из таких форм сечений постоянной величиной, равной:

- для прямоугольного и треугольного сечений – $k = 1,2$;
- для круглого сечения – $k = 10/9$;
- для полукруглого сечения – $k = 1,1617$;
- для правильного шестиугольного сечения – $k = 1,1097$;
- для ромбического сечения – $k = 31/30$;
- для трапецидального сечения – $k \approx 1,2$.

Для сложных сечений, состоящих из нескольких простых фигур, таких как двутавровое, тавровое, полое прямоугольное, полое ромбическое, кольцевое, круглое со срезанными сегментами и т.п., величина коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе k зависит от соотношений размеров простых фигур, составляющих такие сечения.

В работе получены выражения для вычисления коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе для двутаврового (8), таврового (11), полого прямоугольного (6), полого ромбического (7), круглого со срезанными сегментами (4) и кольцевого (12) сечения.

Заметим, что если для сложных сечений под сечениями определённой формы понимать такие, для которых при изменении размеров сечений остаются неизменными соотношения между размерами составляющих их простых фигур, а при изменении этих соотношений считать, что изменяется форма сечений, то можно говорить, что и для сложных сечений величина коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе зависит только от формы поперечных сечений. Для каждого из таких сечений определённой формы независимо от их размеров величина коэффициента k будет константой, значение которой несложно определить по представленным выше выражениям, подставив в них соответствующие заданной форме сечения соотношения между размерами простых элементов.

Список использованных источников

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – Москва: Гостехиздат, 1965. – 856 с.
2. Бурчаков, Ю.И. Строительная механика / Ю.И. Бурчаков, В.Е. Гнедин, В.М. Денисов. – Москва: Высшая школа, 1983. – 255 с.
3. Дарков, А.В. Статика сооружений / А.В. Дарков, В.П. Кузнецов. – Москва: Трансжелдориздат, 1951. – 530 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – Москва: Высшая школа, 1969. – 734 с.
5. Долинский, Ф.В. Краткий курс сопротивления материалов / Ф.В. Долинский, М.Н. Михайлов. – Москва: Высшая школа, 1969. – 432 с.
6. Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г.М. Ицкович, А.И. Винокуров, Л.С. Минин. – Москва: Высшая школа, 1970. – 544 с.
7. Киселов, В.А. Строительная механика. Общий курс / А.В. Киселов. – Москва: Стройиздат, 1986. – 520 с.
8. Мухин, Н.В. Статика сооружений / Н.В. Мухин, А.Н. Першин, Б.А. Шишман. – Москва: Высшая школа, 1980. – 343 с.
9. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов [и др.]. – Москва: Высшая школа, 1985. – 399 с.
10. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов [и др.]. – Москва: Высшая школа, 1969. – 482 с.
11. Рабинович, И.М. Курс строительной механики стержневых систем: в 2 ч. / И.М. Рабинович. – Т. II: Статически неопределимые системы. – Москва: Госстройиздат, 1954. – 392 с.
12. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – Москва: Высшая школа, 1991. – 438 с.
13. Рудицын, М.Н. Справочное пособие по сопротивлению материалов / М.Н. Рудицын, П.Я. Артемов, М.И. Любошиц. – Минск: Вышэйшая школа, 1970. – 628 с.
14. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) / под ред. Г.К. Клейна. – Москва: Высшая школа, 1980. – 318 с.
15. Снитко, Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – Москва: Высшая школа, 1980. – 431 с.
16. Сопротивление материалов / под ред. Г.С. Пасаренко. – Киев: Вища школа, 1986. – 775 с.

17. Справочник проектировщика промышленных, жилых, общественных зданий и сооружений. Расчётно-теоретический: в 2 кн. / под ред. А.А. Уманского. – Москва: Стройиздат, 1977. – 415 с.
18. Строительная механика / под ред. А.В. Даркова. – Москва: Высшая школа, 1976. – 600 с.
19. Строительная механика летательных аппаратов / под ред. И.Ф. Образцова. – Москва: Машиностроение, 1986. – 536 с.
20. Тимко, И.А. Статика сооружений / И.А. Тимко. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 1969. – 372 с.
21. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1979. – 559 с.
22. Фесик, С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Будівельник, 1982. – 280 с.
23. Шишман, Б.А. Статика сооружений / Б.А. Шишман. – Москва: Стройиздат, 1988. – 384 с.