Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Брестский государственный технический университет”

Кафедра высшей математики

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Практикум по дисциплине
”Экономико-математические методы и модели”
для студентов экономических специальностей

Брест 2005

УДК 330.115(075.8)
ББК 65.050я73
Г96

Учреждение образования
"Брестский государственный технический университет"
Кафедра высшей математики

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Брестского государственного технического университета

С о с т а в и т е л и :
Гусева С.Т., доцент
Махнист Л.П., к.т.н., доцент
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент
Шамовская Г.В., ассистент

Р е ц е н з е н т :
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Брестского государственного университета,
канд. физ.-мат.наук, доцент Савчук В.Ф.

Гусева С.Т., Махнист Л.П., Рубанов В.С., Шамовская Г.В.
Г96 Экономико-математические методы и модели: Практикум по дисциплине "Экономико-математические методы и модели" для студентов экономических специальностей. – Брест: УО "БГТУ", 2005. – 92 с.

В учебном пособии предложены задачи по линейным моделям, моделям динамического программирования, моделям управления запасами, цепям Маркова, элементам теории массового обслуживания по дисциплине "Экономико-математические методы и модели" для студентов экономических специальностей дневной и заочной форм обучения. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Для студентов экономических специальностей.

УДК 330.115(075.8)
ББК 65.050я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с рабочей учебной программой по дисциплине “Экономико-математические методы и модели”, утвержденной в УО «Брестский государственный технический университет» для специальностей:

- “Бухгалтерский учет, анализ и аудит”,
- “Коммерческая деятельность”,
- “Маркетинг”,
- “Мировая экономика”,
- “Финансы и кредит”,
- “Экономика и управление на предприятии”.

на основе Государственных образовательных стандартов в области высшей математики, экономико-математических методов и моделей для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям.

Круг тем, рассматриваемых в учебном пособии, опирается на знания основных разделов дисциплины “Высшая математика”, таких как “Математическое программирование”, “Теория вероятностей и математическая статистика”, “Линейная алгебра”, “Математический анализ”. Основное содержание этих тем заключается в раскрытии понятий и методов математического моделирования экономических систем и процессов. В пособии, в соответствие с требованиями общеобразовательных стандартов, рассматриваются, прежде всего, общесистемные экономико-математические методы и модели, общие для всех перечисленных специальностей, такие как линейные модели, модели динамического программирования, управления запасами, марковских случайных процессов, систем массового обслуживания.

Круг вопросов определяет структуру пособия и содержание его глав. В разделе I “Экономико-математические методы и модели” предложены задания по линейным моделям, моделям динамического программирования, управления запасами, марковских случайных процессов, систем массового обслуживания.

Глава 1 посвящена линейным моделям: межотраслевого баланса, равновесных цен, обмена.

В главе 2 “Модели динамического программирования” рассматриваются задачи о распределении средств между предприятиями, о выборе маршрута, о замене оборудования, оптимизации управления поставками и запасами ресурсов, решаемые методом динамического программирования.

В главе 3 “Модели управления запасами” предлагаются задания по определению оптимального размера партии при мгновенном и непрерывном поступлении заказа с условиями допущения и отсутствия дефицита.

Глава 4 “Цепи Маркова” посвящена регулярным и поглощающим марковским цепям, а также марковским процессам с доходами.

В главе 5 “Элементы теории массового обслуживания” рассматриваются задачи массового обслуживания: многоканальная СМО с отказами, одноканальная и многоканальная СМО с неограниченной очередью.

В разделе II “Решения типовых задач” приводится подробное решение заданий, даются некоторые методические рекомендации полезные для успешного их выполнения.

При написании издания авторами широко использовались книги: “Экономико-математические методы и модели”, “Высшая математика. Математическое программирование”, “Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование” под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова [18, 11, 12], “Исследование операций в экономике” под ред. проф. Н.Ш. Кремера [10], “Теория игр. Исследование операций” Костевича Л.С., Лапко А.А. [8] и источники [3, 6, 15, 16].

Учебное издание подготовлено преподавателями кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета на основе курса лекций и практических занятий по дисциплине “Экономико-математические методы и модели” для студентов экономических специальностей: зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. *Рубановым В.С.*, канд. техн. наук, доц. *Махнистом Л.П.*, доцентом кафедры *Гусевой С.Т.*, ассистентом *Шамовской Г.В.*

РАЗДЕЛ I. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1.1. Модель межотраслевого баланса

Задание № 1.1.1-1.1.30

В таблице представлен межотраслевой баланс модели хозяйства:

Отрасли производ-ства	Отрасли потребления				
	x_{ij}			Конечный продукт, y_i	Валовый Продукт, x_j
	I	II	III		
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3
Затраты труда	b_1	b_2	b_3		

Требуется:

а) найти структурную матрицу и коэффициенты полных затрат;

б) найти полные затраты труда на обеспечение вектора конечного продукта $Y=(y_1, y_2, y_3)$;

в) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если объемы конечного продукта на первой и второй отрасли увеличить на α %, а конечное потребление в третьей отрасли уменьшить на β %

Данные к задаче приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Вар.	**1, 16**	**2, 17**	**3, 18**	**4, 19**	**5, 20**	**6, 21**	**7, 22**	**8, 23**	**9, 24**	**10, 25**	**11, 26**	**12, 27**	**13, 28**	**14, 29**	**15, 30**
x_{11}	7	3	4	17	13	14	15	21	21	5	10	6	10	5	10
x_{12}	21	13	23	14	7	16	23	15	15	8	13	14	13	13	50
x_{13}	13	5	50	23	14	30	21	15	30	4	11	5	17	12	60
x_{21}	12	5	10	30	15	34	18	30	30	6	17	4	14	11	90
x_{22}	15	10	15	16	16	17	13	14	40	9	9	7	12	5	70
x_{23}	14	4	30	15	17	10	14	13	10	12	8	14	4	4	40
x_{31}	21	4	13	21	21	8	21	12	10	7	5	15	16	8	45
x_{32}	30	20	40	15	8	31	17	17	40	10	14	13	5	6	25
x_{33}	20	7	10	12	5	15	15	20	15	13	13	25	19	7	40

Вар.	**1, 16**	**2, 17**	**3, 18**	**4, 19**	**5, 20**	**6, 21**	**7, 22**	**8, 23**	**9, 24**	**10, 25**	**11, 26**	**12, 27**	**13, 28**	**14, 29**	**15, 30**
x_1	100	50	120	100	50	100	100	100	200	30	50	50	100	50	300
x_2	100	100	100	100	80	80	80	100	200	40	50	60	80	50	300
x_3	100	80	100	80	50	100	100	100	100	50	50	80	60	30	250
y_1	59	29	43	46	16	40	41	49	134	13	16	25	60	20	180
y_2	59	81	45	39	32	19	35	43	120	13	16	35	50	30	100
y_3	29	49	37	32	16	46	47	51	35	20	18	27	20	9	140

1.2. Модель равновесных цен

Задание № 1.2.1-1.2.30

Производственная сфера народного хозяйства состоит из трёх отраслей и характеризуется структурной матрицей $A = (a_{i\,j}),\ i, j = \overline{1{,}3}$. Рассчитать равновесные цены по отраслям при заданном векторе норм добавленной стоимости $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Как изменятся цены на продукцию, если норму добавленной стоимости по i-ой отрасли увеличить на p %?

Данные к задаче приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Вар.	**1, 16**	**2, 17**	**3, 18**	**4, 19**	**5, 20**	**6, 21**	**7, 22**	**8, 23**	**9, 24**	**10, 25**	**11, 26**	**12, 27**	**13, 28**	**14, 29**	**15, 30**
a_{11}	0,4	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,4	0,4	0,2	0,5	0,1
a_{12}	0,3	0,3	0,2	0,4	0,3	0,4	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4
a_{13}	0,2	0,2	0,1	0,2	0,4	0,4	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
a_{21}	0,5	0,2	0,5	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1
a_{22}	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,5	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3	0,2	0,3	0,2
a_{23}	0,2	0,3	0,2	0,3	0,5	0,2	0,5	0,1	0,4	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3
a_{31}	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,5	0,4	0,3	0,5	0,2	0,2	0,4	0,1	0,3
a_{32}	0,2	0,1	0,1	0,5	0,2	0,2	0,2	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1
a_{33}	0,2	0,4	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1	-	0,1	0,4	0,2
v_1	2	4	10	8	4	6	5	3	7	6	8	9	7	2	3
v_2	4	5	8	7	2	12	5	4	10	5	9	16	9	10	4
v_3	10	2	6	3	8	10	4	6	4	3	5	6	5	4	7
i	2	3	1	3	3	1	1	2	2	3	3	2	2	3	1
$p\%$	3	2	4	5	3	2	3	5	3	3	2	4	5	3	4

1.3. Линейная модель обмена

<u>Задание № 1.3.1-1.3.30</u>

Осуществляется сбалансированная бездефицитная торговля четырёх стран со структурной матрицей $A = (a_{i\,j})$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$. Найти бюджеты стран при условии, что сумма бюджетов составляет S условных единиц.

Вар. 1, 16. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 22204.	**Вар. 2, 17.** $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 16254.	**Вар. 3, 18.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$, S = 59480.
Вар. 4, 19. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$, S = 89110.	**Вар. 5, 20.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 49880.	**Вар. 6, 21.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 59616.
Вар. 7, 22. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$, S = 50920.	**Вар. 8, 23.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$, S = 47584.	**Вар. 9, 24.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 52920.
Вар. 10, 25. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 38120.	**Вар. 11, 26.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 40680.	**Вар. 12, 27.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 40920.
Вар. 13, 28. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$, S = 63210.	**Вар. 14, 29.** $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$, S = 55090.	**Вар. 15, 30.** $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$, S = 58590.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Задача о распределении средств между предприятиями

Задание № 2.1.1-2.1.30

Производственному объединению из четырех предприятий выделяется банковский кредит в сумме 100 млн. ден. ед. для увеличения выпуска продукции. Значения $z_i(u_i)$ ($i=\overline{1.4}$) дополнительного дохода, получаемого объединением в зависимости от выделенной суммы u_i, приведены в табл. 2.1.

Требуется:

1) распределить кредит между предприятиями так, чтобы дополнительный доход объединения был максимальным;

2) используя выполненное решение основной задачи найти оптимальное распределение 80 млн. ден. ед. между данными предприятиями.

Таблица 2.1

Вариант №	**Номер пред-приятия**	**Получаемый доход $z_i(u_i)$ на i–ом предприятии, в зависимости от выделенной суммы u_i (млн. ден. ед.)**					
		$z_i(u_i)/u_i$	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**
1, 16	1	$z_1(u_i)$	9	18	24	38	50
	2	$z_2(u_i)$	11	19	30	44	59
	3	$z_3(u_i)$	16	32	40	57	70
	4	$z_4(u_i)$	13	27	44	69	73
2, 17	1	$z_1(u_i)$	9	17	29	38	47
	2	$z_2(u_i)$	11	34	46	53	75
	3	$z_3(u_i)$	13	28	37	49	61
	4	$z_4(u_i)$	12	35	40	54	73
3, 18	1	$z_1(u_i)$	7	29	37	41	59
	2	$z_2(u_i)$	9	19	28	37	46
	3	$z_3(u_i)$	17	27	37	48	66
	4	$z_4(u_i)$	13	30	42	65	81
4, 19	1	$z_1(u_i)$	9	20	35	44	57
	2	$z_2(u_i)$	12	25	34	46	57
	3	$z_3(u_i)$	11	20	32	48	61
	4	$z_4(u_i)$	14	23	40	50	58
5, 20	1	$z_1(u_i)$	9	18	29	41	60
	2	$z_2(u_i)$	8	19	30	47	58
	3	$z_3(u_i)$	12	25	51	58	69
	4	$z_4(u_i)$	7	15	52	59	60

Вариант №	Номер пред-приятия	Получаемый доход $z_i(u_i)$ на i–ом предприятии, в зависимости от выделенной суммы u_i (млн. ден. ед.)					
		$z_i(u_i)/u_i$	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**
6, 21	1	$z_1(u_i)$	11	21	40	54	62
	2	$z_2(u_i)$	13	20	42	45	61
	3	$z_3(u_i)$	12	22	34	55	60
	4	$z_4(u_i)$	10	17	33	57	69
7, 22	1	$z_1(u_i)$	12	26	40	60	72
	2	$z_2(u_i)$	16	21	36	49	63
	3	$z_3(u_i)$	9	17	35	51	65
	4	$z_4(u_i)$	15	25	51	62	70
8, 23	1	$z_1(u_i)$	14	24	37	45	58
	2	$z_2(u_i)$	12	30	42	58	71
	3	$z_3(u_i)$	3	15	45	62	70
	4	$z_4(u_i)$	7	33	46	60	68
9, 24	1	$z_1(u_i)$	16	28	36	49	60
	2	$z_2(u_i)$	10	29	42	50	74
	3	$z_3(u_i)$	15	25	46	58	65
	4	$z_4(u_i)$	17	23	38	53	67
10, 25	1	$z_1(u_i)$	12	28	39	47	69
	2	$z_2(u_i)$	14	26	40	51	68
	3	$z_3(u_i)$	11	24	43	51	68
	4	$z_4(u_i)$	16	21	36	49	72
11, 26	1	$z_1(u_i)$	14	24	33	49	50
	2	$z_2(u_i)$	10	30	42	51	75
	3	$z_3(u_i)$	16	22	42	44	70
	4	$z_4(u_i)$	10	27	43	57	78
12, 27	1	$z_1(u_i)$	12	23	40	41	55
	2	$z_2(u_i)$	12	21	34	39	58
	3	$z_3(u_i)$	9	20	51	49	70
	4	$z_4(u_i)$	10	30	42	59	80
13, 28	1	$z_1(u_i)$	9	25	41	48	54
	2	$z_2(u_i)$	13	21	41	49	55
	3	$z_3(u_i)$	13	17	50	49	65
	4	$z_4(u_i)$	16	31	39	58	68
14, 29	1	$z_1(u_i)$	7	28	41	43	61
	2	$z_2(u_i)$	8	29	38	49	69
	3	$z_3(u_i)$	12	25	45	51	68
	4	$z_4(u_i)$	8	24	48	50	71
15, 30	1	$z_1(u_i)$	16	18	39	40	63
	2	$z_2(u_i)$	14	27	40	45	68
	3	$z_3(u_i)$	13	30	37	48	67
	4	$z_4(u_i)$	11	30	50	54	70

2.2. Задача о выборе маршрута

<u>Задание № 2.2.1-2.2.30</u>

На сети дорог имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10 (рис. 1). Известны стоимости c_{ij} доставки единицы груза из пункта в пункт (табл. 2.2).

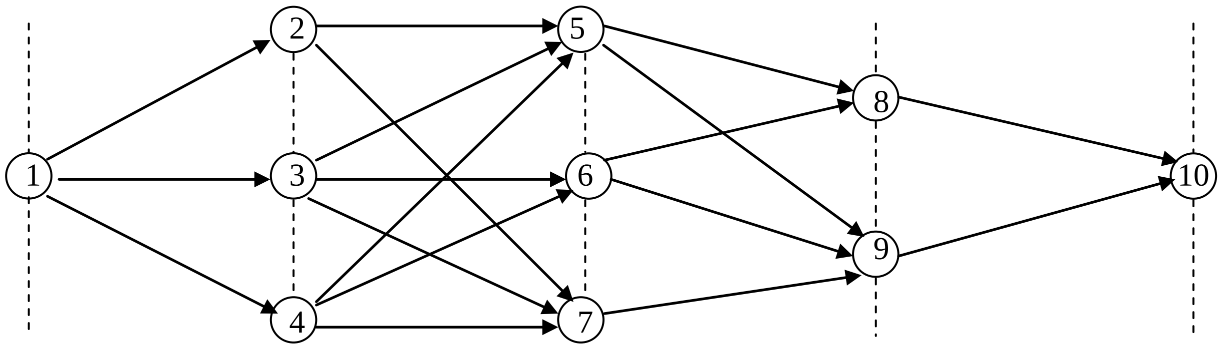

Рис. 1

Требуется:

а) методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и соответствующие ему затраты;

б) выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать отвечающие им минимальные затраты на доставку.

Таблица 2.2

Вар. №	1, 16	2, 17	3, 18	4, 19	5, 20	6, 21	7, 22	8, 23	9, 24	10, 25	11, 26	12, 27	13, 28	14, 29	15, 30
C_{12}	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4	4	8	2	6	8
C_{13}	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6	7	3	5	3	2
C_{14}	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1	4	4	3	7	5
C_{25}	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3	7	4	4	2	8
C_{27}	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5	2	6	4	6	2
C_{35}	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7	8	5	7	8	7
C_{36}	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3	4	7	7	2	8
C_{37}	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6	5	7	5	7	5
C_{45}	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2	4	2	8	6	5
C_{46}	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5	7	4	3	9	3
C_{47}	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9	3	6	8	2	6
C_{58}	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1	6	7	6	3	2
C_{59}	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8	4	8	4	5	8

Вар. №	**1, 16**	**2, 17**	**3, 18**	**4, 19**	**5, 20**	**6, 21**	**7, 22**	**8, 23**	**9, 24**	**10, 25**	**11, 26**	**12, 27**	**13, 28**	**14, 29**	**15, 30**
C_{68}	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2	8	2	5	8	4
C_{69}	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3	7	3	2	5	6
C_{79}	4	1	5	4	9	2	8	6	1	5	2	6	3	9	3
$C_{8,10}$	3	7	9	6	2	5	1	7	9	3	6	8	6	3	5
$C_{9,10}$	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8	3	4	2	7	8

2.3. Задача о замене оборудования

Задание № 2.3.1-2.3.30

В начале планового периода продолжительностью в N лет имеется оборудование возраста t. Известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием этого оборудования; ежегодные расходы $\lambda(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость s; стоимость p нового оборудования (сюда же включены затраты, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования) (табл. 2.3).

Требуется:

1) пользуясь функциональными уравнениями, составить матрицу максимальных прибылей $F_n(t)$ за N лет;

2) сформировать по матрице максимальных прибылей оптимальные стратегии замены оборудования данных возрастов T и T_1 лет в плановом периоде продолжительностью соответственно N и N_1 лет.

Таблица 2.3

Вар. №		**Возраст оборудования**										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1, 16	$r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
	$\lambda(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
	N=	10	N_1=	8	T=	7	T_1=	1	$s(t)$=	1	p=	10
2, 17	$r(t)$	22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18
	$\lambda(t)$	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18
	N=	10	N_1=	6	T=	7	T_1=	4	$s(t)$=	2	p=	11
3, 18	$r(t)$	25	24	24	23	22	21	21	21	21	20	20
	$\lambda(t)$	13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20
	N=	10	N_1=	7	T=	8	T_1=	5	$s(t)$=	2	p=	13
4, 19	$r(t)$	28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21
	$\lambda(t)$	16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21
	N=	10	N_1=	8	T=	6	T_1=	5	$s(t)$=	0	p=	10
5, 20	$r(t)$	21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15
	$\lambda(t)$	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
	N=	10	N_1=	6	T=	8	T_1=	4	$s(t)$=	3	p=	10

Вар. №		**Возраст оборудования**										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
6, 21	$r(t)$	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
	$\lambda(t)$	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
	N=	10	N_1=	9	T=	7	T_1=	6	$s(t)$=	0	p=	8
7, 22	$r(t)$	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21
	$\lambda(t)$	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
	N=	10	N_1=	8	T=	6	T_1=	5	$s(t)$=	5	p=	17
8, 23	$r(t)$	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13
	$\lambda(t)$	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
	N=	10	N_1=	7	T=	9	T_1=	4	$s(t)$=	2	p=	12
9, 24	$r(t)$	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
	$\lambda(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
	N=	10	N_1=	9	T=	6	T_1=	8	$s(t)$=	0	p=	6
10, 25	$r(t)$	23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18
	$\lambda(t)$	11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18
	N=	10	N_1=	6	T=	9	T_1=	3	$s(t)$=	1	p=	12
11, 26	$r(t)$	22	22	22	21	20	20	19	18	17	16	16
	$\lambda(t)$	12	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16
	N=	10	N_1=	6	T=	8	T_1=	1	$s(t)$=	1	p=	10
12, 27	$r(t)$	27	26	25	25	25	24	24	23	22	22	21
	$\lambda(t)$	15	16	17	17	18	18	19	20	20	21	21
	N=	10	N_1=	8	T=	7	T_1=	3	$s(t)$=	0	p=	8
13, 28	$r(t)$	25	24	24	24	24	23	22	22	21	21	20
	$\lambda(t)$	12	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20
	N=	10	N_1=	6	T=	6	T_1=	4	$s(t)$=	4	p=	9
14, 29	$r(t)$	30	29	29	28	27	26	25	23	21	20	19
	$\lambda(t)$	12	13	13	14	14	15	15	16	17	18	19
	N=	10	N_1=	7	T=	9	T_1=	4	$s(t)$=	0	p=	10
15, 30	$r(t)$	29	28	28	27	25	25	24	23	22	21	21
	$\lambda(t)$	14	14	15	16	17	17	18	19	20	21	21
	N=	10	N_1=	6	T=	6	T_1=	3	$s(t)$=	4	p=	14

2.4. Задача оптимизации управления поставками и запасами ресурсов

Задание № 2.4.1-2.4.30

Для ритмичной работы предприятия необходимо систематическое пополнение запаса ресурса *R*, расходуемого при производстве продукции. Потребность ресурса в рассматриваемый плановый период, состоящий из четырех месяцев, характеризуется по месяцам следующими числами: 150, 50, 100 и 100 ед. На начало первого месяца на складах предприятия имеется запас ресурса в объеме 100 ед. Складские помещения ограничены, и хранить можно к концу месяца не более 300 ед. ресурса *R*. По завершении планового периода предприятие переходит на выпуск новой продукции и потребность в ресурсе R отпадет, а поэтому к концу четвертого месяца весь его запас должен быть израсходован. Регулярное пополнение запаса в плановом периоде связано с определенными затратами, зависящими от объема u_i партии поставки. Эта зависимость – функция $K_i(u_i)$ затрат на пополнение запаса (затраты на организацию заказа, оплата заказа, транспортные расходы) заданы в табл. 2.4. Пополнение запаса производится партиями поставок в объемах кратных 50 ед. (вагон, автомашина, и т. п.). Хранение запасенного ресурса также требует соответствующих затрат, величина которых в i-м месяце зависит от среднего объема m_i запаса, хранимого в этом месяце. Функция $\varphi_i(m_i)$ затрат на хранение задана в табл. 2.4.

Требуется так организовать процесс пополнения и хранения запаса ресурса R на предприятии в плановом периоде, чтобы суммарные затраты на пополнение запаса и его хранение были минимальными при непрерывном условии бесперебойного выпуска продукции.

Замечание. Если объем m_i *запаса превосходит максимальную величину, приводимую в табл. 2.4, то значение функции* $\varphi_i(m_i)$ *принять соответствующей этому значению.*

Таблица 1.4

Вар. №	u_i / m_i	**0**	**25**	**50**	**75**	**100**	**125**	**150**	**175**	**200**	**225**	**250**	**275**	**300**
1, 16	$K_i(u_i)$	0	51	49	45	41	37	33	28	25	23	22	22	21
	$\varphi_i(m_i)$	0	4	9	16	31	37	42	47	51	52	53	54	55
2, 17	$K_i(u_i)$	0	51	49	45	41	37	33	28	25	23	22	22	21
	$\varphi_i(m_i)$	0	5	10	17	32	38	43	48	52	53	54	55	56
3, 18	$K_i(u_i)$	0	51	49	45	41	37	33	28	25	23	22	22	21
	$\varphi_i(m_i)$	0	6	11	18	33	39	44	49	53	54	55	56	57
4, 19	$K_i(u_i)$	0	51	49	45	41	37	33	28	25	23	22	22	21
	$\varphi_i(m_i)$	0	7	12	19	34	40	45	50	54	55	56	57	58
5, 20	$K_i(u_i)$	0	51	49	45	41	37	33	28	25	23	22	22	21
	$\varphi_i(m_i)$	0	8	13	20	35	41	46	51	55	56	57	58	59
6, 21	$K_i(u_i)$	0	52	50	46	42	38	34	29	26	24	23	23	22
	$\varphi_i(m_i)$	0	4	9	16	31	37	42	47	51	52	53	54	55
7, 22	$K_i(u_i)$	0	52	50	46	42	38	34	29	26	24	23	23	22
	$\varphi_i(m_i)$	0	5	10	17	32	38	43	48	52	53	54	55	56
8, 23	$K_i(u_i)$	0	52	50	46	42	38	34	29	26	24	23	23	22
	$\varphi_i(m_i)$	0	6	11	18	33	39	44	49	53	54	55	56	57
9, 24	$K_i(u_i)$	0	52	50	46	42	38	34	29	26	24	23	23	22
	$\varphi_i(m_i)$	0	7	12	19	34	40	45	50	54	55	56	57	58
10, 25	$K_i(u_i)$	0	52	50	46	42	38	34	29	26	24	23	23	22
	$\varphi_i(m_i)$	0	8	13	20	35	41	46	51	55	56	57	58	59

Вар. №	u_i / m_i	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
11, 26	$K_i(u_i)$	0	53	51	47	43	39	35	30	27	25	24	24	23
	$\varphi_i(m_i)$	0	4	9	16	31	37	42	47	51	52	53	54	55
12, 27	$K_i(u_i)$	0	53	51	47	43	39	35	30	27	25	24	24	23
	$\varphi_i(m_i)$	0	5	10	17	32	38	43	48	52	53	54	55	56
13, 28	$K_i(u_i)$	0	53	51	47	43	39	35	30	27	25	24	24	23
	$\varphi_i(m_i)$	0	6	11	18	33	39	44	49	53	54	55	56	57
14, 29	$K_i(u_i)$	0	53	51	47	43	39	35	30	27	25	24	24	23
	$\varphi_i(m_i)$	0	7	12	19	34	40	45	50	54	55	56	57	58
15, 30	$K_i(u_i)$	0	53	51	47	43	39	35	30	27	25	24	24	23
	$\varphi_i(m_i)$	0	8	13	20	35	41	46	51	55	56	57	58	59

ГЛАВА 3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1. Модель определения оптимального размера партии при мгновенном поступлении заказа без дефицита

Задание № 3.1.1-3.1.30

Построить экономико-математическую модель формирования запасов, в которой минимизируются расходы на организацию заказа и хранение запасов. Партия поставки q вычисляется при следующих допущениях:

1) уровень запасов снижается равномерно в соответствии с равномерно поступающими требованиями ν (спрос);

2) дефицит не допускается;

3) уровень запасов восстанавливается до значения, равного q.

Предполагается, что спрос на продукцию составляет ν единиц в год. Накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине K (тыс. руб.). Издержки хранения единицы продукции в год равны s (тыс. руб.). Среднее время реализации заказа до момента его появления у потребителя – θ (дней) (табл. 3.1).

Требуется:

1) определить оптимальную партию поставки;

2) определить периодичность возобновления поставки;

3) определить минимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов;

4) определить точку размещения заказа;

5) определить минимальный начальный запас;

6) определить моменты размещения заказов;

7) нарисовать график изменения запасов;

8) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов при увеличении (уменьшении) оптимальной партии поставки на α%;

9) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов с изменением оптимальной партии поставки при увеличении (уменьшении)

а) издержек хранения единицы продукции на β%;

б) накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ%;

10) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов без изменения оптимальной партии поставки при увеличении (уменьшении)

а) издержек хранения единицы продукции на β%;

б) накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ%.

Таблица 3.1

Вар. №	ν	K	s	θ	α	β	γ
1, 16	4000	400	15	28	10	75	80
2, 17	3500	190	25	20	15	65	70
3, 18	4500	80	5	20	25	55	60
4, 19	5500	100	10	20	30	45	50
5, 20	7000	150	14	24	35	35	40
6, 21	6000	150	10	25	40	25	30
7, 22	6500	150	14	24	45	15	20
8, 23	5000	100	10	20	50	80	10
9, 24	7500	50	15	22	55	70	75
10, 25	4500	400	15	28	60	60	65
11, 26	8000	200	21	27	65	50	55
12, 27	4000	80	5	20	70	40	45
13, 28	8500	250	12	25	75	30	35
14, 29	3000	190	25	20	80	20	25
15, 30	9000	200	20	25	85	10	15

3.2. Модель определения оптимального размера партии при непрерывном поступлении заказа

Задание № 3.2.1-3.2.30

Предположим, что спрос составляет ν единиц товара в год, которые поставляются равномерно и непрерывно со склада. Организационные издержки составляют K (у. е.) за одну партию, а издержки хранения равны s (у. е.) в расчете на одну единицу товара в год. Запасы на складе пополняются с некоторой производственной линии, которая работает со скоростью λ единиц товара в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено q единиц товара (табл. 3.2).

Требуется:

1) найти размер партии, который минимизирует все затраты;

2) минимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и содержание запасов;

3) вычислить время, в течение которого продолжается поставка;

4) вычислить продолжительность цикла;

5) найти максимальный и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

6) нарисовать график изменения запасов;

7) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов при увеличении (уменьшении) оптимальной партии поставки на α%;

8) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов с изменением оптимальной партии поставки при увеличении (уменьшении) издержек хранения единицы продукции на β% и накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ%;

9) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов без изменения оптимальной партии поставки при увеличении (уменьшении) издержек хранения единицы продукции на β% и накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ%.

Таблица 3.2

Вар. №	λ	ν	K	s	α	β	γ
1, 16	6000	2000	20	0,1	85	75	80
2, 17	5900	2100	25	0,2	80	65	70
3, 18	5800	2200	30	0,3	75	55	60
4, 19	5700	2300	35	0,4	70	45	50
5, 20	5600	2400	40	0,5	65	35	40
6, 21	5500	2500	45	0,6	60	25	30
7, 22	5400	2600	50	0,7	55	15	20
8, 23	5300	2700	55	0,8	50	80	10
9, 24	5200	2800	60	0,9	45	70	75
10, 25	5100	2900	65	1,0	40	60	65
11, 26	5000	3000	70	1,1	35	50	55
12, 27	4900	3100	75	1,2	30	40	45
13, 28	4800	3200	80	1,3	25	30	35
14, 29	4700	3300	85	1,4	20	20	25
15, 30	4600	3400	90	1,5	15	10	15

3.3. Модель определения оптимального размера партии при мгновенном пополнении запаса и допущении дефицита

Задача № 3.3.1-3.3.30

Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет N деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Неудовлетворенный спрос покрывается немедленно после поступления следующей партии. Хранение детали на складе стоит s ден. ед в сутки, а поставка партии – K ден. ед. Отсутствие на сборке каждой детали приносит в сутки убытки в размере c ден. ед. (табл. 3.3).

Требуется:

1) определить наиболее экономичный объем партии, который минимизирует затраты, связанные с заказыванием, хранением запасов и потерями от дефицита;

2) определить оптимальный интервал между поставками;

3) определить объем запаса, который минимизирует затраты, связанные с заказыванием, хранением запасов и потерями от дефицита;

4) найти суммарные затраты на заказывание, хранение запасов и потери от дефицита в единицу времени;

5) найти плотность убытков от неудовлетворенного спроса;

6) определить сколько % времени между поставками детали на сборке будут отсутствовать;

7) нарисовать график изменения запасов;

8) определить на сколько % изменится (увеличится или уменьшится) оптимальный объем партии при условии, что дефицит не допускается;

9) определить на сколько % изменится (увеличится или уменьшится) оптимальный интервал между поставками при условии, что дефицит не допускается;

10) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) суммарные затраты в единицу времени при условии, что дефицит не допускается.

Таблица 3.3

Вариант №	***N***	***K***	***s***	***c***
1, 16	150000	7000	1	9
2, 17	145000	7500	0,95	8,5
3, 18	140000	8000	0,9	8
4, 19	135000	8500	0,85	7,5
5, 20	130000	9000	0,8	7
6, 21	125000	9500	0,75	6,5
7, 22	120000	10000	0,7	6
8, 23	115000	10500	0,65	5,5
9, 24	110000	11000	0,6	5
10, 25	105000	11500	0,55	4,5
11, 26	100000	12000	0,5	4
12, 27	95000	12500	0,45	3,5
13, 28	90000	13000	0,4	3
14, 29	85000	13500	0,35	2,5
15, 30	80000	14000	0,3	2

3.4. Модель определения оптимального размера партии при непрерывном пополнении запаса и допущении дефицита

Задача № 3.4.1-3.4.30

Завод бытовой химии выпускает партиями краску пяти типов. Производительность – λ кг в сутки. Средний объем потребления каждого типа краски – ν кг в сутки. Стоимость переналадки оборудования при переходе от одного типа краски к другому составляет K ден. ед. Стоимость хранения одного кг краски – s ден. ед. в сутки. Неудовлетворенные требования берутся на учет. Удельные издержки дефицита – *с* ден. ед. за один кг краски в сутки (табл. 3.4).

Требуется:

1) определить наиболее экономичный объем партии, который минимизирует затраты, связанные с переналадкой оборудования, хранением продукции и потерями от дефицита;

2) определить оптимальный интервал перехода к новому типу продукции;

3) определить время, затраченное на производство продукции каждого типа;

4) определить время, в течение которого не производиться поставка продукции;

5) определить время, в течение которого может производиться переналадка оборудования;

6) определить объем запаса, который минимизирует затраты, связанные с переналадкой оборудования, хранением продукции и потерями от дефицита;

7) определить максимальный уровень дефицита;

8) найти суммарные затраты на переналадку оборудования, хранение запасов и потери от дефицита в сутки;

9) нарисовать график изменения производственного процесса.

Таблица 3.4

Вариант №	λ	ν	K	s	c
1, 16	1600	250	1000	0,03	0,15
2, 17	1700	300	1050	0,04	0,2
3, 18	1800	350	1100	0,05	0,25
4, 19	1900	400	1150	0,06	0,3
5, 20	2000	450	1200	0,07	0,35
6, 21	2100	500	1250	0,08	0,4
7, 22	2200	550	1300	0,09	0,45
8, 23	2300	600	1350	0,1	0,5
9, 24	2400	650	1400	0,11	0,55
10, 25	2500	700	1450	0,12	0,6
11, 26	2600	750	1500	0,13	0,65
12, 27	2700	800	1550	0,14	0,7
13, 28	2800	850	1600	0,15	0,75
14, 29	2900	900	1650	0,16	0,8
15, 30	3000	950	1700	0,17	0,85

ГЛАВА 4. ЦЕПИ МАРКОВА

4.1. Регулярные марковские цепи

Задание № 4.1.1-4.1.30

Предприятие A независимо от выполнения плана в предыдущем месяце в следующем план перевыполнит с вероятностью p, не выполнит с вероятностью q и выполнит план на 100% с вероятностью $r=1-p-q$. Предприятие B план перевыполнит с вероятностью $p+\varepsilon$, p, $p-\varepsilon$ соответственно, если в предыдущем месяце план перевыполнен, выполнен на 100% и не выполнен. Вероятности не выполнения плана при этом будут равны $q-\varepsilon$, q, $q+\varepsilon$ (табл. 4.1). Найти финальные вероятности для A и B и исследовать их.

Таблица 4.1

Вариант №	*p*	*q*	*ε*
1, 16	0,1	0,1	0,05
2, 17	0,2	0,15	0,05
3, 18	0,15	0,2	0,05
4, 19	0,2	0,15	-0,05
5, 20	0,15	0,2	-0,05
6, 21	0,2	0,2	-0,05
7, 22	0,25	0,15	0,1
8, 23	0,15	0,25	0,1
9, 24	0,25	0,15	-0,1
10, 25	0,15	0,25	-0,1
11, 26	0,15	0,15	0,1
12, 27	0,15	0,15	-0,1
13, 28	0,25	0,2	0,1
14, 29	0,25	0,2	-0,1
15, 30	0,2	0,25	0,1

4.2. Поглощающие марковские цепи

Задание № 4.2.1-4.2.30

Студент проходит двухгодичный курс обучения для получения диплома. Каждый год он сдает экзамены, на которых решается, прошел он годовой курс или нет. Вероятность сдачи экзаменов на первом курсе равна p_1. Если экзамен сдан, то студент переходит на второй курс. Если студент проваливается на экзаменах на первом курсе, то он повторяет годовой курс с вероятностью q_1 или отчисляется из учебного заведения без права восстановления с вероятностью 1-p_1-q_1. Вероятность успеха студента при сдаче экзаменов на втором курсе – p_2 (в этом случае студент получает диплом и покидает учебное заведение). В случае если студент не сдаст экзамены на втором курсе, то он повторяет годовой курс с вероятностью q_2 или отчисляется из учебного заведения без права восстановления с вероятностью 1-p_2-q_2 (табл. 4.2). Составить матрицу переходов для ежегодных передвижений студентов и привести ее к канонической форме. Определить среднее время обучения в учебном заведении до его окончания или отчисления. Какова вероятность закончить обучение для первокурсника и студента выпускного курса?

Таблица 4.2

Вариант №	p_1	q_1	p_2	q_2
1, 16	0,6	0,3	0,6	0,2
2, 17	0,6	0,2	0,6	0,1
3, 18	0,7	0,1	0,8	0,1
4, 19	0,8	0,1	0,7	0,1
5, 20	0,6	0,1	0,7	0,1
6, 21	0,6	0,2	0,8	0,1
7, 22	0,7	0,2	0,6	0,2
8, 23	0,6	0,2	0,7	0,2
9, 24	0,6	0,3	0,8	0,1
10, 25	0,7	0,1	0,6	0,3
11, 26	0,8	0,1	0,6	0,2
12, 27	0,7	0,2	0,7	0,2
13, 28	0,8	0,1	0,6	0,3
14, 29	0,7	0,2	0,6	0,3
15, 30	0,8	0,1	0,7	0,2

3.3. Марковские процессы с доходами

Задание № 4.3.1-4.3.30

Машина может находиться в одном из двух состояний: ε_1 – машина работает хорошо и ε_2 – машина нуждается в регулировке. На следующий день работы машина меняет свое состояние в соответствии с матрицей переходных вероятностей (p_{ij}).

Пусть, если машина работает нормально до перехода и после перехода, мы имеем прибыль r_{11} у. е.; в тех случаях, когда она начинает работу в нормальном состоянии, но затем требует регулировки (либо наоборот), прибыль равна r_{12}=r_{21} у. е.; наконец, если машина не отрегулирована ни до, ни после перехода, то потери составят r_{22} у. е. (табл.

4.3). Найти ожидаемую прибыль за четыре перехода и стационарное ожидаемое вознаграждение за один переход.

Таблица 4.3

Вариант №	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	r_{11}	$r_{12}=r_{21}$	r_{22}
1, 16	0,7	0,3	0,6	0,4	60	30	30
2, 17	0,8	0,2	0,7	0,3	50	30	30
3, 18	0,9	0,1	0,8	0,2	30	20	20
4, 19	0,6	0,4	0,9	0,1	20	15	15
5, 20	0,5	0,5	0,9	0,1	15	5	5
6, 21	0,7	0,3	0,8	0,2	60	30	30
7, 22	0,8	0,2	0,9	0,1	50	30	30
8, 23	0,9	0,1	0,7	0,3	30	20	20
9, 24	0,6	0,4	0,8	0,2	20	15	15
10, 25	0,5	0,5	0,8	0,2	15	5	5
11, 26	0,7	0,3	0,9	0,1	60	30	30
12, 27	0,8	0,2	0,6	0,4	50	30	30
13, 28	0,9	0,1	0,6	0,4	30	20	20
14, 29	0,6	0,4	0,7	0,3	20	15	15
15, 30	0,5	0,5	0,7	0,3	15	5	5

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

5.1. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Задание № 4.1.1-4.1.30

Устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, продолжающийся заранее неизвестное случайное время. Возможные состояния системы:

S_0 – оба узла исправны;

S_1 – первый узел ремонтируется;

S_2 – второй узел ремонтируется;

S_3 – оба узла ремонтируются.

Все переходы рассматриваемой системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i, j=0,1,2,3) (табл. 5.1).

Требуется:

1) построить размеченный граф состояний описанного случайного процесса;

2) найти предельные вероятности для системы S;

3) найти средний чистый доход в единицу времени от эксплуатации в стационарном режиме системы S, если известно, что исправная работа первого и второго узлов приносит доход соответственно в R_1 и R_2 ден. ед., а их ремонт требует затрат соответственно r_1 и r_2 ден. ед.;

4) оценить экономическую эффективность имеющейся возможности уменьшения вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов, если при этом будут увеличены вдвое затраты на ремонт каждого узла.

Таблица 5.1

Вар. №	λ_{01}	λ_{02}	λ_{10}	λ_{13}	λ_{20}	λ_{23}	λ_{31}	λ_{32}	R_1	R_2	r_1	r_2
1, 16	2	3	3	3	4	2	4	3	10	6	4	2
2, 17	8	9	10	9	11	8	11	10	16	12	10	8
3, 18	3	4	4	4	5	3	5	4	11	7	5	3
4, 19	7	8	9	8	10	7	10	9	15	11	9	7
5, 20	4	5	5	5	6	4	6	5	12	8	6	4
6, 21	6	7	8	7	9	6	9	8	14	10	8	6
7, 22	5	6	6	6	7	5	7	6	13	9	7	5
8, 23	5	6	7	6	8	5	8	7	17	13	11	9
9, 24	6	7	7	7	8	6	8	7	14	10	8	6
10, 25	4	5	6	5	7	4	7	6	12	8	6	4
11, 26	7	8	8	8	9	7	9	8	15	11	9	7
12, 27	3	4	5	4	6	3	6	5	11	7	5	3
13, 28	8	9	9	9	10	8	10	9	16	12	10	8
14, 29	2	3	4	3	5	2	5	4	10	6	4	2
15, 30	9	10	10	10	11	9	11	10	17	13	11	9

5.2. Многоканальная СМО с отказами

Задание № 5.2.1-5.2.30

Имеется станция связи с n каналами, интенсивность потока заявок λ (заявки в минуту); среднее время обслуживания одной заявки $t_{об}$ (мин.), все потоки событий – простейшие (табл. 5.2). Найти финальные вероятности p_i (i=0, 1, 2, ..., n) состояний и характеристики эффективности СМО:

A – абсолютную пропускную способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени);

Q – относительную пропускную способность (среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой);

$P_{отк}$ – вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслуженной);

$N_з$ – среднее число занятых каналов;

$N_п$ – среднее число простаивающих каналов;

$k_з$ – коэффициент загрузки каналов;

$k_п$ – коэффициент простоя каналов.

Сколько требуется каналов для того, чтобы удовлетворить не менее q % поступающих заявок? И какая доля каналов при этом будет простаивать?

Таблица 5.2

Вариант №	***n***	***λ***	***$t_{об}$***	***q***
1, 16	4	3	3	50
2, 17	4	4	1	85
3, 18	4	3,5	2	60
4, 19	4	3,5	1	90
5, 20	4	2,5	3	60
6, 21	4	5	3	35
7, 22	4	4	2,5	50
8, 23	4	4	2	60
9, 24	4	3	3,5	45
10, 25	4	4	3	40
11, 26	5	5	1	85
12, 27	5	4,5	3	45
13, 28	5	3	1	95
14, 29	5	3	1,5	90
15, 30	4	4	3,5	35

5.3. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

<u>Задание № 5.3.1-5.3.30</u>

Одноканальная СМО представляет собой железнодорожную сортировочную станцию, на которую поступает простейший поток составов с интенсивностью λ (состава в час). Обслуживание (расформирование) состава длится случайное (показательное) время со средним значением $t_{об}$ (мин.). В парке прибытия станции имеются n путей, на которых могут ожидать обслуживания прибывающие составы; если все пути заняты, составы вынуждены ждать на внешних путях (табл. 5.3).

Требуется найти (для предельного стационарного режима работы станции):

- среднее число составов $L_{сист}$, связанных со станцией,

- среднее время $W_{\text{сист}}$ пребывания состава при станции (на внутренних путях, на внешних путях и под обслуживанием),
- среднее число $L_{\text{оч}}$ составов, ожидающих очереди на расформирование (все равно, на каких путях),
- среднее время $W_{\text{оч}}$ пребывания состава на очереди,
- среднее число составов, ожидающих расформирования на внешних путях $L_{\text{внеш}}$,
- среднее время этого ожидания $W_{\text{внеш}}$ (две последние величины связаны формулой Литтла,
- суммарный суточный штраф *Ш*, который придется заплатить станции за простой составов на внешних путях, если за один час простоя одного состава станция платит штраф 100 у.е.,
- суммарный суточный штраф *Ш*, который придется заплатить станции за простой составов на внешних путях, если среднее значение времени обслуживания состава уменьшиться на $\Delta t_{\text{об}}$ (мин.),
- суммарный суточный штраф *Ш*, который придется заплатить станции за простой составов на внешних путях, если количество путей в парке прибытия станции увеличить на единицу.

Таблица 5.3

Вариант №	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{t_{об}}$	$\boldsymbol{n}$	$\Delta t_{\text{об}}$
1, 16	2,5	18	2	2
2, 17	2,5	16	3	2
3, 18	2,5	14	4	2
4, 19	2,5	12	5	2
5, 20	2,5	10	6	2
6, 21	3	12	2	1
7, 22	3	10	3	1
8, 23	3	8	4	1
9, 24	3	15	5	1
10, 25	3	18	6	1
11, 26	3,5	15	2	2
12, 27	3,5	12	3	2
13, 28	3,5	10	4	1
14, 29	3,5	8	5	1
15, 30	3,5	14	6	1

5.4. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Задание № 5.4.1-5.4.30

Касса по продаже билетов с n окошками представляет собой n-канальную СМО с неограниченной очередью, устанавливающейся сразу к n окошкам (если одно окошко освобождается, ближайший в очереди пассажир его занимает). Касса продает билеты в n пунктов: A_i (i=1, 2, ..., n). Интенсивность потока заявок (пассажиров, желающих купить билет) для всех пунктов A_i одинакова и равна λ (пассажира в минуту), а в сумме они образуют общий поток заявок с интенсивностью $n\lambda$. Кассир тратит на обслуживание пассажира в среднем $t_{об}$ минут (табл. 5.4). Опыт показывает, что у кассы скапливаются очереди, пассажиры жалуются на медленность обслуживания. Поступило рационализаторское предложение: вместо одной кассы, продающей билеты во все пункты A_i, создать n специализированных касс (по одному окошку в каждой), каждая из которых будет продавать билеты только в один из пунктов A_i. Разумность этого предложения вызывает споры - кое-кто утверждает, что очереди останутся прежними. Требуется проверить полезность предложения расчетом, для чего рассчитать характеристики СМО для существующего и предлагаемого вариантов организации продажи билетов, и сравнить найденные величины.

Таблица 5.4

Вариант №	λ	$t_{об}$	n
1, 16	0,55	1,5	5
2, 17	0,6	1,5	6
3, 18	0,5	1,5	4
4, 19	0,45	1,5	6
5, 20	0,4	1,5	5
6, 21	0,45	2	6
7, 22	0,35	2,5	4
8, 23	0,3	3	6
9, 24	0,25	3,5	5
10, 25	0,6	1,5	4
11, 26	0,45	2	7
12, 27	0,4	2	6
13, 28	0,3	3	7
14, 29	0,35	2,5	6
15, 30	0,25	3,5	7

РАЗДЕЛ II. РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

ГЛАВА 6. ЛИНЕЙНЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Модель межотраслевого баланса

Решение задания № 1.1.1-1.1.30

$x_{11} = 30$, $x_{12} = 30$, $x_{13} = 20$, $x_{21} = 40$, $x_{22} = 45$, $x_{23} = 20$,
$x_{31} = 32$, $x_{32} = 18$, $x_{33} = 40$, $y_1 = 120$, $y_2 = 45$, $y_3 = 160$,
$x_1 = 200$, $x_2 = 150$, $x_3 = 250$, $b_1 = 20$, $b_2 = 30$, $b_3 = 60$,
$\alpha = 6\%$, $\beta = 7\%$.

1) Коэффициенты прямых затрат a_{ij}, которые служат элементами структурной матрицы, найдем из равенства

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

В нашем случае будем иметь

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{30}{200} = 0{,}15; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{30}{150} = 0{,}2; \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0{,}08;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{40}{200} = 0{,}2; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{45}{150} = 0{,}3; \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0{,}08;$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{32}{200} = 0{,}16; \quad a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{18}{150} = 0{,}12; \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{40}{250} = 0{,}16.$$

Следовательно, структурная матрица примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}08 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}08 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85 & -0{,}20 & -0{,}08 \\ -0{,}20 & 0{,}70 & -0{,}08 \\ -0{,}16 & -0{,}12 & 0{,}84 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы Е-А находим определитель

$$\det(E-A)=0{,}85\cdot\begin{vmatrix}0{,}7 & -0{,}08\\ -0{,}12 & 0{,}84\end{vmatrix}-(-0{,}2)\cdot\begin{vmatrix}-0{,}2 & -0{,}08\\ -0{,}16 & 0{,}84\end{vmatrix}+(-0{,}08)\cdot\begin{vmatrix}-0{,}2 & 0{,}7\\ -0{,}16 & -0{,}12\end{vmatrix}=$$

$$=0{,}85\cdot\left(0{,}7\cdot 0{,}84-(-0{,}08)\cdot(-0{,}12)\right)+0{,}2\cdot\left(-0{,}2\cdot 0{,}84-(-0{,}08)\cdot(-0{,}16)\right)-$$
$$-0{,}08\cdot\left((-0{,}2)\cdot(-0{,}12)-0{,}7\cdot(-0{,}16)\right)=0{,}85\cdot 0{,}5784+0{,}20\cdot\left(-0{,}1808\right)+$$
$$+0{,}08\cdot 0{,}1360=0{,}466$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0{,}7 & -0{,}08\\ -0{,}12 & 0{,}84\end{vmatrix}=0{,}5784;\ A_{21}=-\begin{vmatrix}-0{,}2 & -0{,}08\\ -0{,}12 & 0{,}84\end{vmatrix}=0{,}1776;A_{31}=\begin{vmatrix}-0{,}2 & -0{,}08\\ 0{,}7 & -0{,}08\end{vmatrix}=0{,}072;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-0{,}2 & -0{,}08\\ -0{,}16 & 0{,}84\end{vmatrix}=0{,}1808;A_{22}=\begin{vmatrix}0{,}85 & -0{,}08\\ -0{,}16 & 0{,}84\end{vmatrix}=0{,}7012;A_{32}=-\begin{vmatrix}0{,}85 & -0{,}08\\ -0{,}2 & -0{,}08\end{vmatrix}=0{,}084;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-0{,}2 & 0{,}7\\ -0{,}16 & -0{,}12\end{vmatrix}=0{,}136;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}0{,}85 & -0{,}2\\ -0{,}16 & -0{,}12\end{vmatrix}=0{,}134;A_{33}=\begin{vmatrix}0{,}85 & -0{,}2\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{vmatrix}=0{,}5550.$$

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}466}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5784 & 0{,}1776 & 0{,}0720\\ 0{,}1808 & 0{,}7012 & 0{,}0840\\ 0{,}1360 & 0{,}1340 & 0{,}5550\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}241 & 0{,}381 & 0{,}155\\ 0{,}388 & 1{,}505 & 0{,}180\\ 0{,}292 & 0{,}287 & 1{,}191\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы S и будут коэффициентами полных затрат. При этом валовые объемы выпуска по отраслям на вектор $Y=(120;\,45;\,160)^T$ будут определяться матрицей

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1{,}241 & 0{,}381 & 0{,}155\\ 0{,}388 & 1{,}505 & 0{,}180\\ 0{,}292 & 0{,}287 & 1{,}191\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}120\\ 45\\ 160\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1{,}241\cdot 120+0{,}381\cdot 45+0{,}155\cdot 160\\ 0{,}388\cdot 120+1{,}505\cdot 45+0{,}180\cdot 160\\ 0{,}292\cdot 120+0{,}287\cdot 45+1{,}191\cdot 160\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}190{,}87\\ 143{,}09\\ 238{,}52\end{pmatrix}.$$

2) Вычислим коэффициенты прямых затрат труда

$$a_{41}=\frac{b_1}{x_1}=\frac{20}{200}=0{,}10;\qquad a_{42}=\frac{b_2}{x_2}=\frac{30}{150}=0{,}20;\qquad a_{43}=\frac{b_3}{x_3}=\frac{60}{250}=0{,}24.$$

Значит вектор прямых затрат труда запишется: $T=(0{,}10;\,0{,}20;\,0{,}24)$. Находим коэффициенты полных затрат

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,241 & 0,381 & 0,155 \\ 0,388 & 1,505 & 0,180 \\ 0,292 & 0,287 & 1,191 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,10 \cdot 1,241 + 0,20 \cdot 0,388 + 0,24 \cdot 0,292 \\ 0,10 \cdot 0,381 + 0,20 \cdot 1,505 + 0,24 \cdot 0,287 \\ 0,10 \cdot 0,155 + 0,20 \cdot 0,180 + 0,24 \cdot 1,191 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,41 & 0,53 \end{pmatrix}.$$

Полные затраты труда на обеспечение вектора конечного продукта $Y = (120;\ 45;\ 160)^T$ составят

$$(T \cdot S) \cdot Y = 0,27 \cdot 120 + 0,41 \cdot 45 + 0,53 \cdot 160 = 135,65.$$

3) Предположим, что объемы конечного продукта по первой и второй отраслям увеличены на 6%, а по третьей отрасли уменьшены на 7%. Это значит, что конечный продукт будет определяться вектором $Y_1 = (y_1, \quad y_2, \quad y_3)^T$, где

$$y_1 = 120 \cdot (1 + 0,06) = 127,2;$$
$$y_2 = 45 \cdot (1 + 0,06) = 47,7;$$
$$y_3 = 160 \cdot (1 - 0,07) = 148,8.$$

Тогда необходимый объем валового выпуска по отраслям на вектор конечного продукта $Y_1 = (127,2; \quad 47,7; \quad 148,8)^T$ будет равен:

$$X_1 = S \cdot Y_1 = \begin{pmatrix} 1,241 & 0,381 & 0,155 \\ 0,388 & 1,505 & 0,180 \\ 0,292 & 0,287 & 1,191 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 127,2 \\ 47,7 \\ 148,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199,09 \\ 147,93 \\ 228,05 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая компоненты векторов X и X_1, приходим к следующему заключению: если объемы конечного продукта по первой и второй отраслям увеличить на 6%, а по третьей отрасли уменьшить на 7%, то валовой объем по первой отрасли увеличится на 4,31% $\left(\dfrac{199,09}{190,87} \approx 1,0431\right)$, по второй – на 3,38% $\left(\dfrac{147,93}{143,09} \approx 1,0338\right)$, по третьей уменьшится на 4,39% $\left(\dfrac{228,05}{238,52} \approx 0,9561\right)$.

■

Модель равновесных цен

Решение задания № 1.2.1-1.2.30

$a_{11}=0;\quad a_{12}=0,2;\quad a_{13}=0,1;\quad a_{21}=0,4;\quad a_{22}=0,3;\quad a_{23}=0,2;$

$a_{31}=0,5;\quad a_{32}=0,1;\quad a_{33}=0,2;\quad v_1=6;\quad v_2=3;\quad v_3=8;\quad i=2;\quad p=7\%.$

Пусть $P=(p_1,\ p_2,\ p_3)^T$ есть вектор равновесных цен. Тогда

$$P=(E-A^T)^{-1}\cdot\bar{v},$$

где

$$\bar{v}=\begin{pmatrix}6\\3\\8\end{pmatrix} \text{ и } A^T=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,5\\0,2 & 0,3 & 0,1\\0,1 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}, \text{ так как } A=\begin{pmatrix}0 & 0,2 & 0,1\\0,4 & 0,3 & 0,2\\0,5 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу полных затрат $(E-A)^{-1}$.

Вычислим определитель матрицы $E-A=\begin{pmatrix}1,0 & -0,2 & -0,1\\-0,4 & 0,7 & -0,2\\-0,5 & -0,1 & 0,8\end{pmatrix}$:

$$\det(E-A)=\begin{vmatrix}1,0 & -0,2 & -0,1\\-0,4 & 0,7 & -0,2\\-0,5 & -0,1 & 0,8\end{vmatrix}=1,0\cdot\begin{vmatrix}0,7 & -0,2\\-0,1 & 0,8\end{vmatrix}+0,2\cdot\begin{vmatrix}-0,4 & -0,2\\-0,5 & 0,8\end{vmatrix}-$$

$$-0,1\cdot\begin{vmatrix}-0,4 & 0,7\\-0,5 & -0,1\end{vmatrix}=1,0\cdot 0,54+0,2\cdot(-0,42)-0,1\cdot 0,39=0,417.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $E-A$:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0,7 & -0,2\\-0,1 & 0,8\end{vmatrix}=0,54;\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}-0,4 & -0,2\\-0,5 & 0,8\end{vmatrix}=0,42;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-0,4 & 0,7\\-0,5 & -0,1\end{vmatrix}=0,39;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-0,2 & -0,1\\-0,1 & 0,8\end{vmatrix}=0,17;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1,0 & -0,1\\-0,5 & 0,8\end{vmatrix}=0,75;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1,0 & -0,2\\-0,5 & -0,1\end{vmatrix}=0,20;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-0,2 & -0,1\\0,7 & -0,2\end{vmatrix}=0,11;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1,0 & -0,1\\-0,4 & -0,2\end{vmatrix}=0,26;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1,0 & -0,2 \\ -0,4 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,62.$$

Следовательно, матрица полных затрат примет вид:

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,417} \cdot \begin{pmatrix} 0,54 & 0,17 & 0,11 \\ 0,42 & 0,75 & 0,26 \\ 0,39 & 0,20 & 0,62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,295 & 0,408 & 0,264 \\ 1,007 & 1,799 & 0,576 \\ 0,935 & 0,480 & 1,487 \end{pmatrix}.$$

Транспонируя эту матрицу, получим

$$(E-A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,295 & 1,007 & 0,935 \\ 0,408 & 1,799 & 0,480 \\ 0,264 & 0,576 & 1,487 \end{pmatrix}.$$

Теперь по заданному вектору норм добавленной стоимости $\overline{v}$ находим вектор равновесных цен.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,295 & 1,007 & 0,935 \\ 0,408 & 1,799 & 0,480 \\ 0,264 & 0,576 & 1,487 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,27 \\ 11,69 \\ 15,21 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 18,27, \\ p_2 = 11,69, \\ p_3 = 15,21. \end{cases}$$

Таким образом, $P = (18,27;\ \ 11,69;\ \ 15,21)^T$.

Допустим, что во второй отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 7%. Принимая во внимание, что $\overline{v_1} = (6;\ \ 3\cdot(1+0,07);\ \ 8)^T = (6;\ \ 3,21;\ \ 8)^T$, получим

$$P_1 = (E-A^T)^{-1}\cdot\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1,295 & 1,007 & 0,935 \\ 0,408 & 1,799 & 0,480 \\ 0,264 & 0,576 & 1,487 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3,21 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,48 \\ 12,06 \\ 15,33 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, продукция первой отрасли подорожала на 1,11% $\left(\frac{18,48}{18,27} \approx 1,0115\right)$, второй – на 3,17% $\left(\frac{12,06}{11,69} \approx 1,0317\right)$, третьей отрасли – на 0,79% $\left(\frac{15,33}{15,21} \approx 1,0079\right)$.

■

Линейная модель обмена

Решение задания № 1.3.1-1.3.30

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$S = 17289.$$

Решение. Пусть $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – вектор бюджетов торгующих стран. Тогда по условию задачи

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17289$$

С другой стороны, вектор X есть собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, удовлетворяющий уравнению

$$AX=X \quad \text{или} \quad (A-E)\,X=0$$

В координатной форме последнее уранение примет вид:

$$\begin{pmatrix} -0,7 & 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & -0,8 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & -0,8 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & -0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенства следует, что координаты x_1, x_2, x_3, x_4 вектора X являются ненулевыми решениями однородной линейной системы.

$$\begin{cases} -0,7x_1 + 0,5x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 = 0, \\ 0,1x_1 - 0,8x_2 + 0,4x_3 + 0,1x_4 = 0, \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 - 0,8x_3 + 0,3x_4 = 0, \\ 0,4x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 0,7x_4 = 0. \end{cases}$$

Будем решать систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -0,7 & 0,5 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,8 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & -0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 1 & 0 \\ 0 & 33 & -14 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 276 & -231 & 0 \\ 0 & 0 & -276 & 231 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 276 & -231 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 92 & -77 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен трем. Возьмем в качестве базисного минора матрицы системы минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 0 & -51 & 30 \\ 0 & 0 & 92 \end{vmatrix} = -51 \cdot 92 \neq 0.$$

Тогда переменные x_1, x_2, x_3 – базисные, а x_4 – свободная. При $x_4 = m \neq 0$, $m \in R$ система равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + \ 4x_3 = -m, \\ \quad -51x_2 + 30x_3 = -10m, \\ \qquad\qquad 92x_3 = 77m. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x_3 = \frac{77}{92}m, \qquad x_2 = \frac{3230}{4692}m, \qquad x_1 = \frac{5440}{4692}m, \quad x_4 = m.$$

Подставляя значения x_1, x_2, x_3 и x_4 в равенство $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17289$, получим:

$$\frac{5440}{4692}m + \frac{3230}{4692}m + \frac{77}{92}m + m = \frac{17289}{4692}m = 17289 \Rightarrow m = 4692.$$

Следовательно,

$x_1 = 5440$, $\qquad x_2 = 3230$, $\qquad x_3 = 3927$, $\qquad x_4 = 4692$.

Окончательно имеем искомый вектор бюджета

$$X = (5440; \quad 3230; \quad 3927; \quad 4692).$$

■

ГЛАВА 7. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача о распределении средств между предприятиями

<u>Решение задания № 2.1.1-2.1.30</u>

Выделяемые Средства u_i, млн. ден. ед.	Предприятие			
	№1	№2	№3	№4
	Получаемый доход			
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$	$z_4(u_i)$
20	8	6	3	4
40	10	9	4	6
60	11	11	7	8
80	12	13	11	13
100	18	15	18	16

1) Состояние производственного объединения будет характеризоваться в каждый данный момент конкретным вариантом распределения кредита между предприятиями.

Процедуру условной оптимизации начинаем с четвертого шага, на котором выделяются средства четвертому предприятию. Имеем следующее функциональное уравнение

$$F_4(x_3; u_4) = \max_{u_4} z_4(x_3; u_4).$$

Из условия видно, что все функции $z_i(u_i)$ $(i = \overline{1.4})$ однозначны: каждому значению суммы выделенных средств соответствует единственное значение получаемого дохода, поэтому $F_4(x_3; u_4) = z_4(x_3; u_4)$. Состояние производственного объединения перед выделением средств четвертому предприятию точно не определено, поэтому проанализируем все варианты. Итак, подлежат анализу все элементы множества x_3 состояний: 0, 20, 40, 60, 80, 100 и множества u_4 управлений: 0, 20, 40, 60, 80, 100. Результаты этого шага условной оптимизации приведены в табл. 1. Для каждого состояния множества x_3 указано единственное условно-оптимальное управление из множества u_4 и соответствующая условно-оптимальная величина F_4 получаемого дохода, совпадающая на этом шаге с непосредственным доходом z_4.

Таблица 1

x_3	u_4	z_4	F_4
0	0	0	0
<u>*20*</u>	<u>*20*</u>	4	4
40	40	6	6
60	60	8	8
80	80	13	13
100	100	16	16

На втором этапе условной оптимизации исследуем третий шаг, для которого основное функциональное уравнение имеет вид

$$F_3(x_2;u_3)=\max_{u_3}(z_3(x_2;u_3)+F_4(x_3)).$$

Множества x_2 и x_3 состоят из элементов 0, 20, 40, 60, 80, 100, множество u_3 – из тех же элементов. Для каждого допустимого состояния надлежит выбрать условно-оптимальное управление и найти условно-оптимальную величину прироста выпуска продукции. Так, если на момент выделения средств предприятию № 3 в наличии имеется 20 млн. ден. ед., то предприятию № 3 можно выделить 0 или 20 млн. ден. ед. Используя условие задачи и табл. 1, находим

$$F_3(x_2;u_3)=\max_{0,20}(z_3(20;0)+F_4(20);\;\; z_3(20;20)+F_4(0))=\max_{0,20}(0+4;\;\; 3+0)=4.$$

Отсюда видно, что максимальная величина дохода в 4 млн. ден. ед. достигается в том случае, когда предприятию № 3 средства не выделяются.

Аналогично осуществляется выбор условно-оптимальных управлений и для всех остальных допустимых состояний из множества x_2. Например, если к моменту выделения средств третьему предприятию имеется 60 млн. ден. ед., то ему можно выделить либо 0, либо 20, либо 40, либо 60 млн. ден. ед. Тогда имеем:

$$F_3(x_2;u_3)=\max_{0,20,40,60}(0+8,\;\; 3+6,\;\; 4+4,\;\; 7+0)=9.$$

Из этого равенства видно, что максимальное значение дохода в 9 млн. ден. ед. достигается в случае, если предприятию № 3 выделяется 20 млн. ден. ед.

Все вычисления третьего шага приведены в табл. 2.

Таблица 2

x_2	u_3	x_3	z_3	F_4	z_3+F_4	F_3
0	0	0	0	0	0	0
20	*0*	*20*	0	4	4	4
	20	0	3	0	3	
40	0	40	0	6	6	
	20	*20*	3	4	7	7
	40	0	4	0	4	
60	0	60	0	8	8	
	20	40	3	6	9	9
	40	20	4	4	8	
	60	0	7	0	7	
80	0	80	0	13	13	13
	20	60	3	8	11	
	40	40	4	6	10	
	60	20	7	4	11	
	80	0	11	0	11	
100	0	100	0	16	16	
	20	80	3	13	16	
	40	60	4	8	12	
	60	40	7	6	13	
	80	20	11	4	15	
	100	0	18	0	18	18

Аналогично осуществляется процедура условной оптимизации на оставшихся шагах (*см*. табл. 3, 4).

Таблица 3

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	4	4	
	20	0	6	0	6	6
40	0	40	0	7	7	
	20	20	6	4	10	10
	40	0	9	0	9	
60	0	60	0	9	9	
	20	*40*	6	7	13	13
	40	*20*	9	4	13	13
	60	0	11	0	11	
80	0	80	0	13	13	
	20	60	6	9	15	
	40	40	9	7	16	16
	60	20	11	4	15	
	80	0	13	0	13	

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
100	0	100	0	18	18	
	20	80	6	13	19	19
	40	60	9	9	18	
	60	40	11	7	18	
	80	20	13	4	17	
	100	0	15	0	15	

Таблица 4

x_0	u_1	x_1	z_1	F_2	z_1+F_2	F_1
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	6	6	
	20	0	8	0	8	8
40	0	40	0	10	10	
	20	20	8	6	14	14
	40	0	10	0	10	
60	0	60	0	13	13	
	20	40	8	10	18	18
	40	20	10	6	16	
	60	0	11	0	11	
80	0	80	0	16	16	
	20	*60*	8	13	21	*21*
	40	40	10	10	20	
	60	20	11	6	17	
	80	0	12	0	12	
100	0	100	0	19	19	
	20	80	8	16	24	24
	40	60	10	13	23	
	60	40	11	10	21	
	80	20	12	6	18	
	100	0	18	0	18	

Переходим к безусловной оптимизации – поиску наиболее выгодного распределения кредита между предприятиями. Обращаемся к табл. 4, так как она соответствует первому шагу. Из нее видно, что при кредите в 100 млн. ден. ед. максимальный получаемый доход составляет 24 млн. ден. ед., если первому предприятию выделить 20 млн. ден. ед. Остаток в 80 млн. ден. ед. подлежит оптимальному распределению между остальными тремя предприятиями.

Из табл. 3 следует, что из 80 млн. ден. ед. (столбец x_1) второму предприятию выделяется 40 млн. ден. ед. (столбец u_2), а остаток 40 млн. ден. ед. (столбец x_2) необходимо распределить между оставшимися двумя предприятиями. Из таблицы 2 видим, что из 40 млн. ден. ед. предприятию № 3 выделяется 20 млн. ден. ед., после чего остается 20 млн. ден. ед.

Наконец, из табл. 1 следует, что эти 20 млн. ден. ед. ассигнуются предприятию № 4. Такое распределение обеспечивает производственному объединению максимальный дополнительный доход в 24 млн. ден. ед. Найденное оптимальное распределение кредита можно записать в виде вектора u*=(20; 40; 20; 20).

2) Используя табл. 1-4 и предложенную методику, 80 млн. ден. ед. оптимально можно распределить между предприятиями следующим образом: (20; 20; 20; 20) или (20; 40; 0; 20). При этом максимальный дополнительный доход составит 21 млн. ден. ед.

■

Задача о выборе маршрута

Решение задания № 2.2.1-2.2.30

Пусть $c_{12}=4$; $c_{13}=8$; $c_{14}=4$; $c_{25}=6$; $c_{27}=1$; $c_{35}=9$; $c_{36}=3$; $c_{37}=5$; $c_{45}=4$; $c_{46}=8$; $c_{47}=2$; $c_{58}=7$; $c_{59}=4$; $c_{68}=9$; $c_{69}=6$; $c_{79}=1$; $c_{8,10}=7$; $c_{9,10}=2$.

а) Минимизируем затраты по доставке применительно к единице груза.

Разобьем все пункты сети на группы. К группе 1 отнесем пункт 1, к группе 2 – пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (т. е. 2, 3, 4) к группе 3 отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы 2 (т. е. 5, 6, 7) и т.д. Получим следующую таблицу:

1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	2, 3, 4	5, 6, 7	8, 9	10

Итак, формирование наиболее экономного маршрута может быть реализовано в четыре шага.

Условная оптимизация. Обозначим через C_8, C_9 состояния, в которых транспорт может находиться перед четвертым шагом. Они образуют множество состояний на начало четвертого шага. Это будет множество x_3. Решения о доставке груза по дорогам (8,10), (9,10) являются управлениями на четвертом шаге, соответствующими указанным состояниям. Итак, множество U_4 управлений на четвертом шаге состоит из элементов (8,10) и (9,10).

Условно оптимальные затраты на этом шаге выражаются функциональным уравнением

$$F_4(x_3;u_4)=\min_{u_4} z_4(x_3;u_4)=z_4(x_3;u_4)$$

Функция $F_4(x_3;u_4)$ в зависимости от состояний и управлений принимает значения 4, 6, а управления (8,10), (9,10) будут условно оптимальными соответственно для состояний C_8, C_9.

1 этап

Таблица 1

x_3	u_4	x_4	F_4
C_8	(8,10)	C_{10}	7
$\underline{C_9}$	<u>(9,10)</u>	C_{10}	2

Переходя ко второму этапу условной оптимизации – анализу третьего шага, запишем функциональное уравнение для этого шага

$$F_3(x_2;u_3) = \min_{u_3}(z_3(x_2;u_3) + F_4(x_3)).$$

Множеству x_2 возможных состояний перед третьим шагом соответствует местоположение транспорта с грузом в пункте 5 (состояние C_5) или в пункте 6 (состояние C_6), или в пункте 7 (состояние C_7). Множеству u_3 возможных управлений на третьем шаге соответствует выбор одной из дорог, ведущих из пунктов 5, 6, 7 в пункты 8, 9; для пункта 5 это (5,8), (5,9), для пункта 6 – (6,8), (6,9), для пункта 7 – (7,9). Таким образом, множество уравнений на этом 7-ом шаге состоит из четырех элементов (5,8), (5,9), (6,8), (6,9), (7,9). Множество значений целевой функции $z_3(x_2;u_3)$ состоит: из элемента 7, 4 для состояния C_5, из элементов 9, 6 для состояния C_6 и элемента 1 для состояния C_7.

Рассмотрим состояние C_5. Здесь две дороги ведут в направлении пункта 10. Условно оптимальные затраты для него:

$$F_3(x_2;u_3) = \min_{(5,8),(5,9)}(7+7{,}4+2) = 6.$$

Рассмотрим состояние C_6. Здесь две дороги ведут в направлении пункта 10. Тогда

$$F_3(x_2;u_3) = \min_{(6,8),(6,9)}(9+7;6+2) = 8.$$

Условно оптимальные затраты для состояния C_7:

$$F_3(x_2;u_3)=\min_{(7;9)}(1+2)=3.$$

В компактном виде выкладки запишем в виде таблицы:

2 этап

Таблица 2

x_2	u_3	x_3	z_3	F_4	z_3+F_4	F_3
C_5	(5,8)	C_8	7	7	14	
	(5,9)	C_9	4	2	6	6
C_6	(6,8)	C_8	9	7	16	
	(6,9)	C_9	6	2	8	8
$\underline{C_7}$	<u>(7,9)</u>	$\underline{C_9}$	1	2	3	<u>3</u>

Третий и четвертый этапы условной оптимизации – анализ второго и первого шага осуществляется аналогично:

$$F_2(x_1;u_2)=\min_{u_2}(z_2(x_1;u_2)+F_3(x_2)).$$

3 этап

Таблица 3

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
$\underline{C_2}$	(2,5)	C_5	6	6	12	
	<u>(2,7)</u>	$\underline{C_7}$	1	3	4	4
C_3	(3,5)	C_5	9	6	15	
	(3,6)	C_6	3	8	11	
	(3,7)	C_7	5	3	8	8
C_4	(4,5)	C_5	4	6	10	
	(4,6)	C_6	8	8	16	
	(4,7)	C_7	2	3	5	5

$$F_1(x_0;u_1)=\min_{u_1}(z_1(x_0;u_1)+F_2(x_1))$$

4 этап

Таблица 4

x_0	u_1	x_1	z_1	F_2	z_1+F_2	F_1
$\underline{C_1}$	<u>(1,2)</u>	$\underline{C_2}$	4	4	8	<u>8</u>
	(1,3)	C_3	8	8	16	
	(1,4)	C_4	4	5	9	

<u>Безусловная оптимизация</u>: Из табл. 4 видно, что из пункта 1 груз следует направлять по дороге (1,2), так как этому условно-оптимальному

шаговому управлению соответствуют минимальные затраты. В результате груз окажется в пункте 2. Переходя к табл. 3, замечаем, что из пункта 2 груз необходимо доставлять дорогой (2,7) в пункт 7. Из табл. 2 видно, что далее груз должен перевозиться дорогой (7,9) в пункт 9, откуда, как это следует из табл. 1, он направляется дорогой (9,10) в конечный пункт 10.

Соответственно, наиболее экономный маршрут пролегает через пункты 1, 2, 7, 9, 10, при этом транспортные расходы минимизируются и составляют 8 ден. единиц на единицу груза.

б) Информация, содержащаяся в табл. 1-4, позволяет находить наиболее экономный маршрут в пункт 10 из любого другого пункта данной сети. Они находятся так же, как сформированный маршрут 1-2-7-9-10. Имеем:

Маршрут	**Стоимость (ден. ед.)**
2-7-9-10	4
3-7-10	8
4-7-10	5
5-9-10	6
6-9-10	8
7-9-10	3
8-10	7
9-10	2

■

1.3. Задача о замене оборудования

<u>Решение задания № 2.3.1-2.3.30</u>

Исходные данные задания представлены в таблице:

	Возраст оборудования										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$r(t)$	30	30	29	29	29	28	28	27	27	26	24
$\lambda(t)$	10	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$N=$ 10		$N_1=$ 8		$T=$ 5		$T_1=$ 6		$s(t)=$ 2		$p=$ 15	

Для решения задания применим принцип оптимальности Р. Беллмана. Рассмотрим интервалы времени, т. е. годы, планового периода от конца к началу. Обозначим функцию условно-оптимальных значений функции цели $F_k(t)$ – максимальную прибыль, которая будет получена от использования оборудования возраста *t* лет за последние *k* лет планового периода (см. рис. 2).

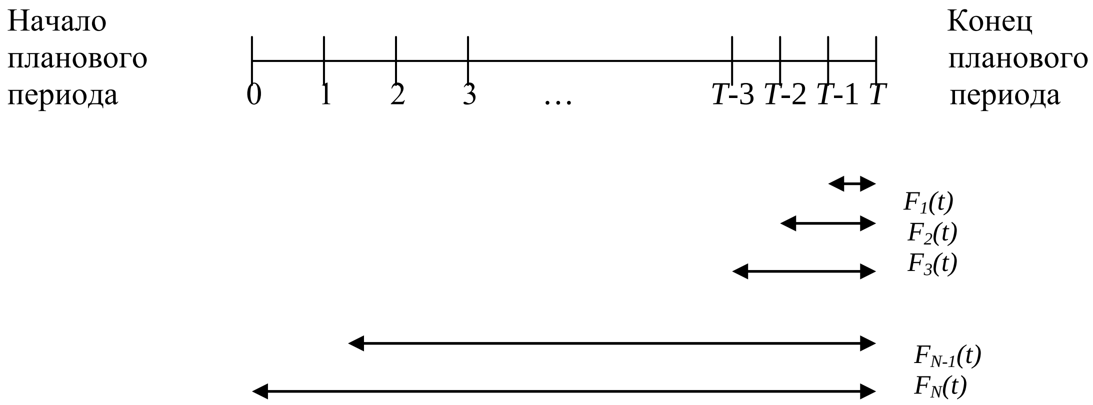

Рис. 2

Запишем функциональные уравнения для последнего года планового периода $F_1(t)$ и последних *k* лет планового периода $F_k(t)$ при исходных числовых значениях примера:

$$F_1(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) \\ s(t) - p + r(0) - \lambda(0) \end{cases} = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) \\ 2 - 15 + 30 - 10 \end{cases} = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} \quad (1)$$

$$F_k(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_{k-1}(t+1) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 + F_{k-1}(1) \ \ (\textit{замена}) \end{cases} \quad (2)$$

Пользуясь этими выражениями, будем последовательно вычислять значения максимальной прибыли $F_k(t)$ и записывать их в табл. 1. Первую строку получим, придавая параметру *t* в равенстве (1) значения 0, 1, 2, …, 10 и используя исходные данные. Например, при *t*=0

$$F_1(0) = \max_t \begin{cases} r(0) - \lambda(0) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = \max_t \begin{cases} 30 - 10 \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = 20 \ \ (\textit{сохранение}).$$

Аналогично расчет ведется до *t*=9:

$$F_1(9) = \max_t \begin{cases} r(9) - \lambda(9) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = \max_t \begin{cases} 26 - 19 \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = 7 \ \ (\textit{сохранение}).$$

Заметим, что если прибыль от нового оборудования равна прибыли от старого, то старое лучше сохранить еще на год. При t=10

$$F_1(10) = \max_t \begin{cases} r(10) - \lambda(10) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = \max_t \begin{cases} 24 - 20 \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = 7 \ \ (\textit{замена}).$$

Из табл. 1 видно, что $r(t)$-$\lambda(t)$ с ростом t убывает. Поэтому при t>9 оптимальной будет политика замены оборудования. Чтобы различать в результате какой политики получается условно-оптимальное значение прибыли, будем эти значения разграничивать (до t=9 включительно оптимальной является политика сохранения). Для заполнения второй строки табл. 1. используем формулу (2) для k=2:

$$F_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_1(t+1) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 + F_1(1) \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_1(t+1) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 27 \ \ (\textit{замена}) \end{cases}.$$

Придавая параметру t значения 0, 1, 2, …, 10, используя исходные данные и значения $F_1(t+1)$ из первой строки таблицы, заполним вторую строку. Например, при t=4

$$F_2(4) = \max_t \begin{cases} r(4) - \lambda(4) + F_1(5) \\ 27 \end{cases} = \max_t \begin{cases} 29 - 14 + 13 \ \ (\textit{сохранение}) \\ 27 \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = 28 \ \ (\textit{сохранение}).$$

Для третьей строки таблицы используем формулу (2) для k=3:

$$F_3(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_2(t+1) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 7 + F_2(1) \ \ (\textit{замена}) \end{cases} = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_2(t+1) \ \ (\textit{сохранение}) \\ 44 \ \ (\textit{замена}) \end{cases}$$

и т. д.

Таблица 1

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$F_1(t)$	20	20	17	***16***	***15***	13	12	10	9	7	7
$F_2(t)$	40	37	***33***	***31***	28	27	27	27	27	27	27
$F_3(t)$	57	***53***	***48***	44	44	44	44	44	44	44	44
$F_4(t)$	73	***68***	61	60	***60***	60	60	60	60	60	60
$F_5(t)$	88	81	77	***76***	75	***75***	75	75	75	75	75
$F_6(t)$	101	97	***93***	91	***90***	88	88	88	88	88	88
$F_7(t)$	117	***113***	108	***106***	104	104	104	104	104	104	104
$F_8(t)$	133	128	***123***	120	120	120	***120***	120	120	120	120
$F_9(t)$	148	***143***	137	136	135	135	135	135	135	135	135
$F_{10}(t)$	163	157	153	151	150	***150***	150	150	150	150	150

Пусть, например, в начале планового периода имелось оборудование возраста T=5 лет. Разработаем политику “замен” на десятилетний период, доставляющий максимальную прибыль. Информация для этого представлена в табл. 1. Максимальная прибыль, которую можно получить за N=10 лет при условии, что в начале планового периода имелось оборудование возраста 5 лет, находится в табл. 1 на пересечении столбца t=5 строки $F_{10}(t)$; она составляет 150 единиц.

Значение максимальной прибыли $F_{10}(5)$=150 записано в области “политики замены”. Это значит, что для достижения в течение 10 лет максимальной прибыли в начале первого года оборудование надо заменить. В течение первого года новое оборудование постареет на год, т.е., заменив оборудование и проработав на нем 1 год, мы за 9 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 1 год. Из табл. 1 берем $F_9(1)$=143. Это значение располагается в области “политики сохранения”, т. е. во втором году планового периода надо сохранить оборудование возраста 1 год, и, проработав на нем год, за 8 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 2 года.

Значение $F_8(2)$=123 помещено в области сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Теперь до конца планового периода осталось 7 лет, а возраст оборудования составляет 3 года. Находим $F_7(3)$=106. Это область сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Его возраст становится равным 4 годам. До конца планового периода остается 6 лет. Определяем $F_6(4)$=90. Это область сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Его возраст становится равным 5 годам. До конца планового периода остается 5 лет. Определяем $F_5(5)$=75. Это область замен. Заменяем оборудование на новое. Проработаем на нем в течение пятого года. Оно постареет на год. До конца планового периода остается 4 года. Продолжая подобные рассуждения, получим, что $F_4(1)$=68, $F_3(2)$=48, $F_2(3)$=31, $F_1(4)$=15 расположены в области сохранения. Разработанную политику изобразим следующей цепочкой:

$$F_{10}(5) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-год}} F_9(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{2-год}} F_8(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{3-год}} F_7(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{4-год}} F_6(4) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{5-год}}$$

$$F_5(5) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{6-год}} F_4(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{7-год}} F_3(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{8-год}} F_2(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{9-год}} F_1(4) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{10-год}}$$

Из табл. 1 можно найти оптимальную стратегию замены оборудования с любым начальным состоянием от 0 до 10 лет и на любой плановый период, не превосходящий 10 лет. Например, найдем “политику замен” на плановый период в N_1=8 лет, если вначале имелось оборудование шестилетнего возраста (T_1=6):

$$F_8(6) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-год}} F_7(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{2-год}} F_6(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{3-год}} F_5(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{4-год}}$$

$$F_4(4) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{5-год}} F_3(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{6-год}} F_2(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{7-год}} F_1(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{8-год}}$$

■

Задача оптимизации управления поставками и запасами ресурсов

<u>Решение задания № 2.4.1-2.4.30</u>

u_i	**0**	**25**	**50**	**75**	**100**	**125**	**150**	**175**	**200**	**225**	**250**	**275**	**300**
$K_i(u_i)$	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

m_i	**0**	**25**	**50**	**75**	**100**	**125**	**150**	**175**	**200**	**225**	**250**	**275**	**300**
$\varphi_i(m_i)$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54

В качестве физической системы S в данном случае выступает действующее предприятие с происходящим на нем процессом пополнения, потребления и хранения запаса ресурса R. Этот процесс естественно распадается на отдельные шаги и процесс выбора управлений. Процесс этот четырехшаговый.

Символ x_i – множество значений объема запаса ресурса R, имеющегося на складах предприятия перед i-ым месяцем $\left(i=\overline{1,4}\right)$; x_j – множество значений остатка ресурса перед (i+1)-м месяцем; u_i – множество значений объема поставки ресурса R в начале i-ого месяца (множество управлений, которые могут быть приняты в начале i-ого месяца); $F_i(x_{i-1}, u_i)$ – условно-оптимальные затраты на организацию поставки ресурса R и его хранение в течение последних N-(i-1) месяцев при условии, что запас ресурса перед этим периодом характеризовался элементом множества x_{i-1}, а выбранный объем поставки характеризовался элементом множества u_i; $z_i(x_{i-1}, u_i)$ – значение целевой функции в i-ом месяце, характеризующее суммарные затраты на пополнение запаса и хранение неизрасходованных остатков в i-ом месяце при условии, что перед этим месяцем объем запаса характеризовался элементом множества x_{i-1}, а управление было выбрано из множества u_i; численные значения целевой функции находятся по формуле

$$z_i(x_{i-1},\ u_i)=K_i(u_i)+\ \varphi_i(m_i),$$

где средний объем m_i хранимых запасов в i-ом месяце определяется выражением

$$m_i=\frac{v_i}{2}+x_i,$$

(v_i– объем потребления ресурса в i-ом месяце); $F_{i+1}(x_i)$ – условно-оптимальные затраты на пополнение запаса и хранение остатков, начиная с (i+1)-ого месяца и до конца планового периода, при условии, что объем запаса перед (i+1)-м месяцем характеризовался элементом множества x_i.

Для условной оптимизации последнего, четвертого месяца планового периода воспользуемся функциональным уравнением:

$$F_4(x_3,\ u_4)=\min_{u_4} z_4(x_3,\ u_4),$$

которое получено при N=4 из функционального уравнения динамического программирования для последнего шага:

$$F_N(x_{N-1},\ u_N)=\min_{u_N} z_N(x_{N-1},\ u_N).$$

По условию задачи в четвертом месяце требуется 100 ед. ресурса, а к концу месяца весь запас должен быть израсходован, поэтому множество x_3 допустимых остатков ресурса перед четвертым месяцем будет состоять из элементов 0, 50 и 100. В таком случае поставки могут осуществляться партиями объемов соответственно в 100, 50 или 0 ед. Это будут элементы множества u_4 допустимых управлений на четвертом месяце. Условно-оптимальные затраты F_4 меняются в зависимости от величины остатка от выбранного объема партии поставки (условно-оптимального управления). Все допустимые варианты представлены в табл. 1.

Таблица 1

x_3	u_4	x_4	K_4	m_4	φ_4	z_4	F_4
0	100	0	40	50	8	48	48
50	50	0	48	50	8	56	56
<u>100</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	50	8	8	<u>8</u>

Так, например, если остаток ресурса перед четвертым месяцем составлял 100 ед., то на четвертом месяце поставлять ресурс нет необходимости, так как спрос на него (v_4=0) будет покрыт этим остатком. Одновременно будет выполнено и требование о полном использовании запаса к концу четвертого месяца (остаток равен нулю). Следовательно, объем поставки будет равен нулю, а значит, не потребуются и затраты на пополнение запаса ($K_4(u_4)=K_4(0)=0$). Средний объем хранимых запасов в четвертом месяце $m_4 = \frac{v_4}{2} + x_4 = \frac{100}{2} + x_4 = 50 + x_4$, а затраты на хранение $\varphi_4(m_i)=\varphi_4(50)=8$. Так что целевая функция

$$z_4(x_3, u_4)=z_4(100, 0)=K_4(0)+\varphi_4(50)=0+8=8,$$

а условно оптимальное значение затрат

$$F_4(x_3, u_4)=F_4(100,0)= \min_{u_4} z_4(100, 0) =8.$$

Второй этап условной оптимизации состоит в анализе периода из двух последних месяцев, из которых для четвертого условно-оптимальные управления найдены. Для этого этапа основное функциональное уравнение

$$F_i(x_{i-1}, u_i)= \min_{u_i} (z_i(x_{i-1}, u_i)+F_{i+1}(x_i))$$

при i=3 примет вид:

$$F_3(x_2, u_3)= \min_{u_3} (z_3(x_2, u_3)+F_4(x_3)).$$

Множество x_2 допустимых остатков ресурса к концу второго месяца состоит из элементов 0, 50, 100, 150 и 200, а множество u_3 допустимых управлений (объемов партии поставок в третьем месяце) – из элементов 200, 150, 100, 50 и 0.

Предположим, что на начало третьего месяца объем запаса равен 0. Учитывая потребность в ресурсе в этом месяце (100 ед.), мы можем заказать (выбрать управление) либо 100, либо 150, либо 200 ед. ресурса. Тогда значение целевой функции с учетом соотношения $m_3 = \frac{v_3}{2} + x_3 = 50 + x_3$ для этих вариантов будут равны:

$$z_3(0, 100)=K_3(100)+\varphi_3(\frac{100}{2}+ \ 0)=40+ 8=48,$$

$$z_3(0, 150)=K_3(150)+\varphi_3(\frac{100}{2}+50)=32+30=62,$$

$$z_3(0,\,200)=K_3(200)+\varphi_3\left(\frac{100}{2}+100\right)=24+41=65.$$

Учитывая результаты оптимизации четвертого месяца и найденные значения целевой функции z_3, имеем

$$F_3(0,\,u_3)=\min_{100,150,200}(48+F_4(0);\ 62+F_4(50);\ 65+F_4(100))=$$

$$=\min_{100,150,200}(48+48;\ 62+56;\ 65+8)=73.$$

Таким образом, если объем запаса на начало третьего месяца равен 0, то условно-оптимальным управлением на третьем месяце будет выбор партии поставки объемом в 200 ед. Аналогично анализируются и все остальные допустимые варианты (*см*. табл. 2).

Таблица 2

x_2	u_3	x_3	K_3	m_3	φ_3	z_3	F_4	z_3+F_4	F_3
0	100	0	40	50	8	48	48	96	
	150	50	32	100	30	62	56	118	
	200	100	24	150	41	65	8	73	73
50	50	0	48	50	8	56	48	104	
	100	50	40	100	30	70	56	126	
	150	100	32	150	41	73	8	81	81
100	0	0	0	50	8	8	48	56	56
	50	50	48	100	30	78	56	134	
	100	100	48	150	41	89	8	97	
150	0	50	0	100	30	30	56	86	86
	50	100	48	150	41	89	8	97	
200	0	100	0	150	41	41	8	49	49

В табл. 3 приведены результаты условной оптимизации второго месяца планового периода с учетом результатов оптимизации третьего и четвертого месяцев (табл. 2). На начало второго месяца объем запаса ресурса может быть равным 0, 50, 100, 150, 200 или 250 ед. (элементы множества x_1). На этом этапе используются соотношения

$$F_2(x_1,\,u_2)=\min_{u_2}(z_2(x_1,\,u_2)+F_3(x_2));\quad m_2=\frac{v_2}{2}+x_2=25+x_2.$$

Таблица 3

x_1	u_2	x_2	K_2	m_2	φ_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
0	50	0	48	25	3	51	73	124	
	100	50	40	75	15	55	81	136	
	150	100	32	125	36	68	56	124	
	200	150	24	175	46	70	86	156	
	250	200	21	225	51	72	49	121	121

x_1	u_2	x_2	K_2	m_2	φ_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
50	0	0	0	25	3	3	73	76	76
	50	50	48	75	15	63	81	144	
	100	100	40	125	36	76	56	132	
	150	150	32	175	46	78	86	164	
	200	200	24	225	51	75	49	124	
100	0	50	0	75	15	15	81	96	96
	50	100	48	125	36	84	56	140	
	100	150	40	175	46	86	86	172	
	150	200	32	225	51	83	49	132	
150	0	100	0	125	36	36	56	92	92
	50	150	48	175	46	94	86	180	
	100	200	40	225	51	91	49	150	
200	0	150	0	175	46	46	86	132	132
	50	200	48	225	51	99	49	148	
250	0	200	0	225	51	51	49	100	100

В табл. 4 приведены результаты условной оптимизации первого месяца с учетом результатов оптимизированного периода из трех последующих месяцев (табл. 3). На начало первого месяца объем запаса ресурса R по условию задачи равен 100 ед. Так что множества x_0 состоит из единственного элемента 100. Элементами множества u_1 управлений на первом месяце могут быть числа 50, 100, 150, 200, 250, 300, так как общая потребность в ресурсе на предстоящие четыре месяца составляет 400 ед. На этом этапе используются соотношения

$$F_1(x_0,\, u_1)=\min_{u_1}\,(z_1(x_0,\, u_1)+F_2(x_1));\;\; m_1=\frac{V_1}{2}+x_1=75+x_1\,.$$

Таблица 4

x_0	u_1	x_1	K_1	m_1	φ_1	z_1	F_2	z_1+F_2	F_1
100	50	0	48	75	15	63	121	184	
	100	50	40	125	36	76	76	152	152
	150	100	32	175	46	78	96	174	
	200	150	24	225	51	75	92	167	
	250	200	21	275	53	74	132	206	
	300	250	20	325	54	74	100	174	

Найдем безусловно-оптимальное управление поставками ресурса, гарантирующее минимальные суммарные затраты на пополнение и хранение запасенного ресурса. Из табл. 4 видим, что минимальные суммарные затраты по управлению поставками в четырехмесячном периоде составляют 152 ден. ед. (*см*. столбец F_1 табл. 4) при условии, что в первом месяце будет заказана партия ресурса в объеме 100 ед. (*см*. столбец u_1 табл. 4). Вместе с имевшимся начальным запасом в 100 ед. в первом месяце на складах предприятия сосредоточится 200 ед. ресурса R. Из них 150 ед. пойдет на удовлетворение потребностей производства в первом месяце. К концу месяца останется 50 ед. (*см.* столбец x_1 табл. 4). По строке, соответствующей элементу 50 столбца x_1 табл. 3, находим, что во втором месяце пополнять запас не следует (*см.* столбец u_2 табл. 3), так как 50 ед. достаточно для удовлетворения спроса в этом месяце. Запас к концу месяца будет исчерпан (*см.* столбец x_2 табл. 3). По строке, соответствующей элементу 0 столбца x_2 табл. 2, находим, что в третьем месяце нужно запасти 200 ед. ресурса (*см.* столбец u_3 табл. 2). Из них 100 ед. будет израсходовано в этом месяце, а 100 ед. останется (*см.* столбец x_3 табл. 2). По строке, соответствующей элементу 100 столбца x_3 табл. 1, находим, что в четвертом месяце пополнять запас не следует (*см.* столбец u_4 табл. 1), так как к концу месяца весь ресурс будет исчерпан (*см.* столбец x_4 табл. 1).

Таким образом вектор управления u*=(100; 0; 200; 0). При этом векторе управления затраты минимизируются и составляют:

$$K(100)+\varphi(150/2+50)+K(0)+\varphi(50/2)+K(200)+\varphi(100/2+100)+K(0)+\varphi(100/2)=$$
$$=(40+36)+(0+3)+(24+41)+(0+8)=76+3+65+8=152 \text{ ден. ед.},$$

при чем в первом – 76 ден. ед., во втором – 3 ден. ед., в третьем – 65 ден. ед., и в четвертом – 8 ден. ед.

Ответ: u_1=100; u_2=0; u_3=200; u_4=0; $opt\ F_1(x_0, u_1)$=152.

■

ГЛАВА 8. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Модель определения оптимального размера партии при мгновенном поступлении заказа без дефицита

Решение задания № 3.1.1-3.1.30

Исходные данные: ν=5500; K = 120; s = 16; θ = 25; α=β=γ=50.

Математической моделью задачи является модель Уилсона. Издержки L управления запасами в течение цикла складываются из издержек организации заказа и содержания запасов. Пусть τ - длина цикла возобновления поставок. Очевидно, $\tau = \frac{q}{\nu}$. С заказыванием каждой партии связаны издержки K. Найдем издержки содержания запасов в течение цикла. Они пропорциональны средней величине текущего запаса и времени содержания, т.е. издержки цикла составляют:

$$L_ц = K + s \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{\nu}.$$

Разделив это выражение на длину цикла τ, получим издержки в единицу времени

$$L = \frac{K\nu}{q} + s\frac{q}{2}. \qquad (1)$$

Чтобы найти оптимальный размер партии поставки, решим уравнение

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{K\nu}{q^2} + \frac{s}{2} = 0.$$

Так как $\frac{d^2L}{dq^2} > 0$ для всех q>0, то

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \qquad (2)$$

доставляет функции цели (1) абсолютный минимум. Формула (2) называется формулой квадратного корня или формулой Уилсона.

1) В нашем случае оптимальный размер партии поставки будет равен:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot 5500}{16}} \approx 288 \text{ (ед.)}$$

2) Зная размер оптимальной партии поставки, можно найти другие параметры системы. Оптимальный интервал между поставками равен:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\nu} = \sqrt{\frac{2K}{s\nu}} = \frac{288}{5500} = 0{,}05 \ \ (\textit{года}),$$

0,05 года составят: $365 \cdot 0{,}05 \approx 19 \ (\textit{дней})$.

3) Минимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и содержание запасов составят:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu} = s \cdot q^* = 16 \cdot 288 = 4608 \text{ (тыс. руб. в год).}$$

4) Время от момента размещения заказа до момента его появления у потребителя θ=25 дней (или θ=0,07 года) больше оптимального интервала между поставками $\tau^* = 19$ дней (или $\tau^* = 0{,}05$ года). Поэтому величину наличного запаса, при котором подается заказ на пополнение, т. е. точку заказа находим по формуле:

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau^*}\right] \cdot q^* = 0{,}07 \cdot 5500 - \left[\frac{0{,}07}{0{,}05}\right] \cdot 288 = 97 \text{ (ед.).}$$

Здесь $\left[\frac{\theta}{\tau^*}\right]$ - наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{\theta}{\tau^*}$.

Эта формула справедлива также для расчета точки заказа в случае $\theta = \tau^* \ \ и \, \theta < \tau^*$. Если $\theta = \tau^*$, то $r = \theta\nu - q^* = 0$. Если $\theta < \tau^*$, то $\left[\frac{\theta}{\tau^*}\right] = 0$ и $r = \theta\nu$.

5) Начальный запас, гарантирующий бездефицитное потребление, равен:

$$I_0 = \theta\nu = 0{,}07 \cdot 5500 = 385 \text{ (ед.)}$$

6) Моменты размещения заказов найдем по формулам:

$$t_n = \frac{I}{\nu} - \theta + n\tau^*,$$

где *n=0, 1, 2,…; I* - наличный начальный запас.

В нашем случае

$$t_0 = \frac{385}{5500} - 0,07 = 0,\ t_1 = 19,\ t_2 = 38, \ldots$$

7) График изменения запасов изображен на рис. 3.

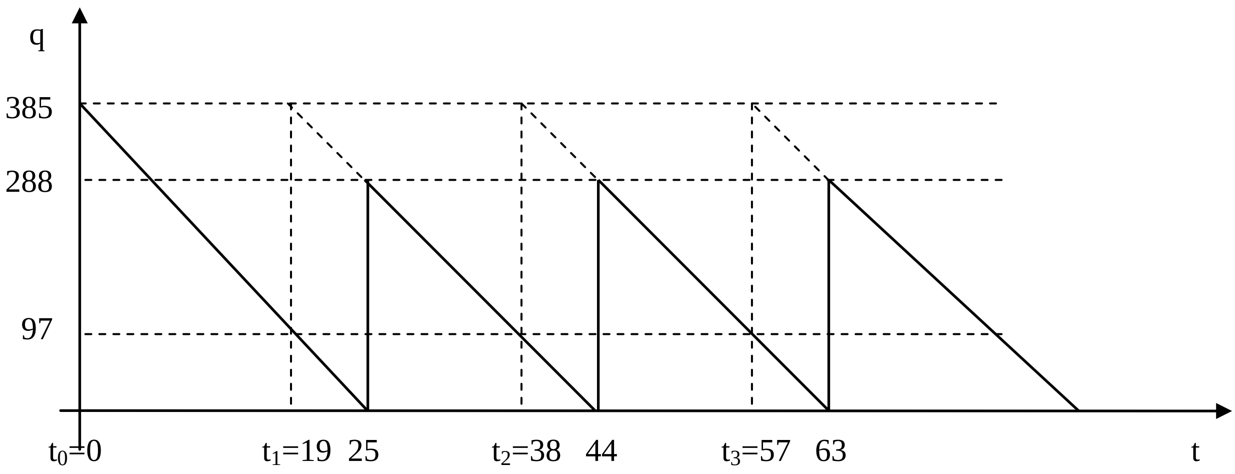

Рис. 3

8) Заметим, что

$$\frac{L}{L^*} = \frac{\dfrac{Kv}{q} + s\dfrac{q}{2}}{sq^*} = \frac{2Kv}{s(q^*)^2} \cdot \frac{1}{2\left(\dfrac{q}{q^*}\right)} + \frac{q}{2q^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon^2 + 1}{2\varepsilon}, \qquad (3)$$

где $\varepsilon = \dfrac{q}{q^*}$.

Тогда в случае увеличения оптимальной партии поставки на α=50%, получим $\varepsilon = \dfrac{1+0,5}{1} = 1,5$. Следовательно, $\dfrac{L}{L^*} = \dfrac{1,5^2+1}{2\cdot 1,5} = \dfrac{3,25}{3} \approx 1,083$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 8,3%.

В случае уменьшения оптимальной партии поставки на α=50%, получим $\varepsilon = \dfrac{1-0,5}{1} = 0,5$. Следовательно, $\dfrac{L}{L^*} = \dfrac{0,5^2+1}{2\cdot 1,5} = \dfrac{1,25}{1} = 1,25$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25%.

9) а) Учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{q}{q^*} = \frac{\sqrt{\frac{2K\nu}{s}}}{\sqrt{\frac{2K\nu}{s^*}}} = \sqrt{\frac{s^*}{s}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{s^*}}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \tag{4}$$

где $\delta = \frac{s}{s^*}$, получим, что

$$\frac{L}{L^*} = \frac{sq}{s^*q^*} = \delta \cdot \varepsilon = \sqrt{\delta}.$$

Тогда в случае, увеличения издержек хранения единицы продукции на β=50%, получим $\delta = \frac{1+0{,}5}{1} = 1{,}5$. Следовательно, $\frac{q}{q^*} = \frac{1}{\sqrt{1{,}5}} = 0{,}817$ и $\frac{L}{L^*} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}224$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 22,4%, при соответствующем уменьшении оптимальной партии поставки на 18,3%.

В случае, уменьшения издержек хранения единицы продукции на β=50%, получим $\delta = \frac{1-0{,}5}{1} = 0{,}5$. Следовательно, $\frac{q}{q^*} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5}} = 1{,}414$ и $\frac{L}{L^*} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 29,3%, при соответствующем увеличении оптимальной партии поставки на 41,4%.

б) Учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{q}{q^*} = \frac{\sqrt{\frac{2K\nu}{s}}}{\sqrt{\frac{2K^*\nu}{s}}} = \sqrt{\frac{K}{K^*}} = \sqrt{\eta}, \tag{5}$$

где $\eta = \frac{K}{K^*}$, получим, что

$$\frac{L}{L^*} = \frac{2K\nu}{q} \cdot \frac{q^*}{2K^*\nu} = \frac{Kq^*}{K^*q} = \frac{\eta}{\varepsilon} = \sqrt{\eta}.$$

Тогда в случае, увеличения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=50%, получим $\eta = \frac{1+0{,}5}{1} = 1{,}5$.

Следовательно, $\frac{q}{q*}=\frac{L}{L*}=\sqrt{1{,}5}\approx 1{,}224$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 22,4%, при соответствующем увеличении оптимальной партии поставки на 22,4%.

В случае, уменьшения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=50%, получим $\eta=\frac{1-0{,}5}{1}=0{,}5$. Следовательно, $\frac{q}{q*}=\frac{L}{L*}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}707$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 29,3%, при соответствующем уменьшении оптимальной партии поставки на 29,3%.

10) а) Заметим, что

$$\frac{L}{L*}=\frac{\frac{Kv}{q*}+s\frac{q*}{2}}{s*q*}=\frac{Kv}{s*(q*)^2}+\frac{s}{2s*}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{s}{s*}\right)=\frac{\delta+1}{2}, \qquad (6)$$

где $\delta=\frac{s}{s*}$.

Тогда в случае, увеличения издержек хранения единицы продукции на β=50%, получим $\delta=\frac{1+0{,}5}{1}=1{,}5$. Следовательно, $\frac{L}{L*}=\frac{1{,}5+1}{2}=1{,}25$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25% без изменения оптимальной партии поставки.

В случае, уменьшения издержек хранения единицы продукции на β=50%, получим $\delta=\frac{1-0{,}5}{1}=0{,}5$. Следовательно, $\frac{L}{L*}=\frac{0{,}5+1}{2}=0{,}75$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25% без изменения оптимальной партии поставки.

б) Заметим, что

$$\frac{L}{L*}=\frac{\frac{Kv}{q*}+s*\frac{q*}{2}}{\frac{2K*v}{q*}}=\frac{K}{2K*}+\frac{(q*)^2 s*}{4K*v}=\frac{1}{2}\left(\frac{K}{K*}+1\right)=\frac{\eta+1}{2}, \qquad (7)$$

где $\eta=\frac{K}{K*}$.

Тогда в случае, увеличения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=50%, получим

$\eta = \dfrac{1\,+\,0{,}5}{1} = 1{,}5$. Следовательно, $\dfrac{L}{L*} = \dfrac{1{,}5+1}{2} = 1{,}25$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25% без изменения оптимальной партии поставки.

В случае, уменьшения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=50%, получим $\eta = \dfrac{1-0{,}5}{1} = 0{,}5$. Следовательно, $\dfrac{L}{L*} = \dfrac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25% без изменения оптимальной партии поставки.

■

Модель определения оптимального размера партии при непрерывном поступлении заказа

<u>Решение задания № 3.2.1-3.2.30</u>

Исходные данные: λ=4000; ν=2000; K=20; s=0,1; α=50; β=1; γ=4.

Товар поступает на склад с производственной линии с постоянной интенсивностью λ=4000 ед. в год. На склад товар поступает партиями размером q ед. Пополнение склада происходит в каждом цикле за время τ_1, а потребление – за $\tau=\tau_1+\tau_2$. Абсолютная интенсивность увеличения запасов определяется разностью λ-ν, где ν=2000 ед. в год – интенсивность расходования запасов. Максимальный уровень запасов за время τ_1 возрастет на величину $p=(\lambda-\nu)\tau_1$. Так как $\tau_1 = \dfrac{q}{\lambda}$, величина среднего запаса равна $(\lambda-\nu)\dfrac{q}{2\lambda}$. Учитывая, что запас p, накопленный в интервале τ_1, полностью расходуется за время τ_2, имеем $p=\nu\tau_2$. Тогда получим $\nu\tau_2 = (\lambda-\nu)\dfrac{q}{\lambda}$. Следовательно, $\tau_2 = (\lambda-\nu)\dfrac{q}{\lambda\nu}$. Поэтому

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{q}{\lambda} + (\lambda-\nu)\frac{q}{\lambda\nu} = \frac{q}{\nu}.$$

Определим суммарные затраты, связанные с организацией заказов, и содержанием запасов, приходящиеся на один цикл:

$$L_ц = K + s\cdot(\lambda-\nu)\frac{q}{2\lambda}\cdot\tau = K + s\cdot(\lambda-\nu)\frac{q^2}{2\lambda\nu}.$$

Разделив это выражение на длину цикла $\tau = \dfrac{q}{\nu}$, получим величину издержек в единицу времени:

$$L = \frac{K\nu}{q} + (\lambda - \nu)\frac{sq}{2\lambda}.$$

Оптимальный объем партии поставки q^*, минимизирующий общие затраты, вычислим, приравнивая к нулю производную:

$$\left(\frac{dL}{dq} = -\frac{K\nu}{q^2} + \frac{s(\lambda - \nu)}{2\lambda} = 0\right) \Rightarrow \left(q^2 = \frac{2K\nu}{s\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}\right).$$

Следовательно, $q^* = \sqrt{\dfrac{2K\nu\lambda}{s(\lambda - \nu)}} = \sqrt{\dfrac{2K\nu}{s\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}$. Тогда оптимальный интервал возобновления заказов: $\tau^* = \dfrac{q^*}{\nu} = \sqrt{\dfrac{2K}{s\nu\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}$.

Найдем оптимальные издержки в единицу времени:

$$L^* = \frac{K\nu}{q^*} + (\lambda - \nu)\frac{sq^*}{2\lambda} = K\nu\sqrt{\frac{s\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}{2K\nu}} + \frac{s\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}{2}\cdot\sqrt{\frac{2K\nu}{s\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2Ks\nu\left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt{2Ks\nu\left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right)} = \sqrt{2Ks\nu\left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right)}$$

или $L^* = q^*\left(\dfrac{K\nu}{(q^*)^2} + \left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)\dfrac{s}{2}\right) = q^*\left(\dfrac{K\nu}{(q^*)^2} + \left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)\dfrac{s}{2}\right) = sq^*\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)$.

1) Размер партии, который минимизирует все затраты:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s\left(1 - \dfrac{\nu}{\lambda}\right)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 2000}{0{,}1\left(1 - \dfrac{2000}{4000}\right)}} = \sqrt{\frac{80000}{0{,}05}} = \sqrt{1600000} \approx 1265 \text{ ед. товара.}$$

2) Минимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и содержание запасов составят:

$$L^* = sq^*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right) = 0{,}1\cdot 1265\cdot(1-0{,}5) = 63{,}25 \text{ (у. е. в год).}$$

3) Продолжительность поставки: $\tau_1 = \dfrac{q^*}{\lambda} = \dfrac{1265}{4000} \approx 0{,}3163$ года, что составляет 0,3163·365≈115 дней.

4) Продолжительность цикла: $\tau^* = \dfrac{q^*}{\nu} = \dfrac{1265}{2000} \approx 0{,}6325$ года, что составляет 0,6325·365≈231 день.

5) Максимальный уровень запасов:

$$p^* = (\lambda-\nu)\tau_1 = \left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)q^* = \frac{1265}{2} \approx 632 \text{ ед. товара.}$$

Средний уровень запасов:

$$\frac{p^*}{2} = \frac{1}{2}(\lambda-\nu)\tau_1 = \frac{(\lambda-\nu)q^*}{2\lambda} = \left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)\frac{q^*}{2} = \frac{1265}{4} \approx 316 \text{ ед. товара.}$$

6) График изменения запасов изображен на рис. 4. Заметим, что масштаб выбирается в зависимости от того, как соотносятся полученные значения τ^* и τ_1.

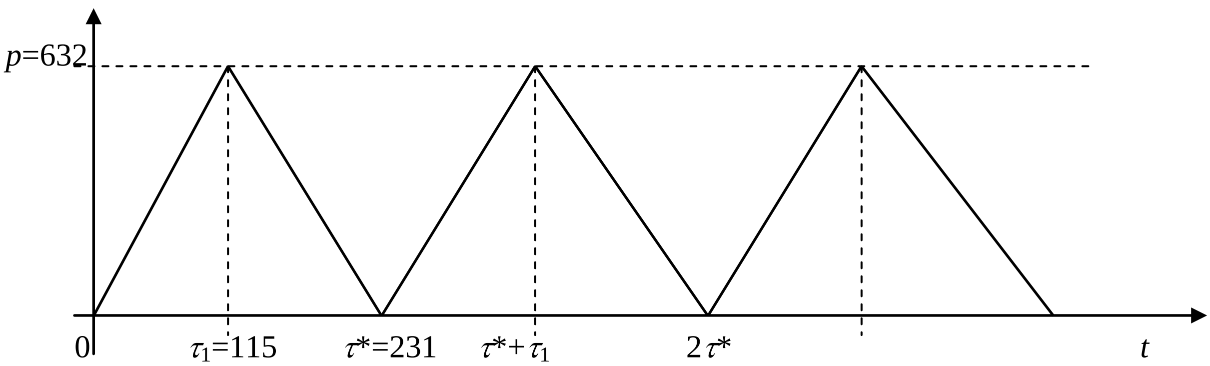

Рис. 4

7) Заметим, что

$$\frac{L}{L^*}=\frac{\dfrac{K\nu}{q}+\dfrac{sq}{2}\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}{sq^*\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}=\frac{2K\nu}{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)(q^*)^2}\cdot\frac{1}{2\left(\dfrac{q}{q^*}\right)}+\frac{q}{2q^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\right)=\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon},$$

где $\varepsilon=\dfrac{q}{q^*}$.

Тогда в случае увеличения оптимальной партии поставки на α=50%, получим $\varepsilon=\dfrac{1+0{,}5}{1}=1{,}5$. Следовательно, $\dfrac{L}{L^*}=\dfrac{1{,}5^2+1}{2\cdot 1{,}5}=\dfrac{3{,}25}{3}\approx 1{,}083$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 8,3%.

В случае уменьшения оптимальной партии поставки на α=50%, получим $\varepsilon=\dfrac{1-0{,}5}{1}=0{,}5$. Следовательно, $\dfrac{L}{L^*}=\dfrac{0{,}5^2+1}{2\cdot 0{,}5}=\dfrac{1{,}25}{1}=1{,}25$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25%.

8) Учитывая, что

$$\frac{q}{q^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2K\nu}{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{2K^*\nu}{s^*\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}}=\sqrt{\frac{K}{K^*}\cdot\frac{s^*}{s}}=\sqrt{\frac{\eta}{\delta}},$$

где $\delta=\dfrac{s}{s^*}$, $\eta=\dfrac{K}{K^*}$, получим

$$\frac{L}{L^*}=\frac{\sqrt{2Ks\nu\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}{\sqrt{2K^*s^*\nu\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}=\sqrt{\frac{K}{K^*}\cdot\frac{s}{s^*}}=\sqrt{\eta\delta}.$$

Тогда в случае, увеличения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и увеличения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta=\dfrac{1+0{,}01}{1}=1{,}01$, $\eta=\dfrac{1+0{,}04}{1}=1{,}04$. Следовательно, $\dfrac{q}{q^*}=\sqrt{\dfrac{\eta}{\delta}}=\sqrt{\dfrac{1{,}04}{1{,}01}}\approx\sqrt{1{,}0297}\approx 1{,}0147$ и

$\frac{L}{L*} = \sqrt{\eta\delta} = \sqrt{1{,}04 \cdot 1{,}01} \approx 1{,}0249$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5%, при соответствующем увеличении оптимальной партии поставки на 1,5%.

В случае, уменьшения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и уменьшения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \frac{1-0{,}01}{1} = 0{,}99$, $\eta = \frac{1-0{,}04}{1} = 0{,}96$. Следовательно, $\frac{q}{q*} = \sqrt{\frac{\eta}{\delta}} = \sqrt{\frac{0{,}96}{0{,}99}} \approx 0{,}9847$ и $\frac{L}{L*} = \sqrt{\eta\delta} = \sqrt{0{,}96 \cdot 0{,}99} \approx 0{,}9749$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5%, при соответствующем уменьшении оптимальной партии поставки на 1,5%.

9) Заметим, что

$$\frac{L}{L*} = \frac{\frac{K\nu}{q*} + \frac{sq*}{2}\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}{s*\,q*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)} = \frac{2K*\nu}{s*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)(q*)^2} \cdot \frac{K}{2K*} + \frac{s}{2s*} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{K*} + \frac{s}{s*}\right) = \frac{\eta+\delta}{2},$$

где $\delta = \frac{s}{s*}$, $\eta = \frac{K}{K*}$.

Тогда в случае, увеличения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и увеличения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \frac{1+0{,}01}{1} = 1{,}01$, $\eta = \frac{1+0{,}04}{1} = 1{,}04$. Следовательно, $\frac{L}{L*} = \frac{\eta+\delta}{2} = \frac{1{,}04+1{,}01}{2} = 1{,}025$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5% без изменения оптимальной партии поставки.

Тогда в случае, уменьшения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и уменьшения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \frac{1-0{,}01}{1} = 0{,}99$, $\eta = \frac{1-0{,}04}{1} = 0{,}96$. Следовательно, $\frac{L}{L*} = \frac{\eta+\delta}{2} = \frac{0{,}96+0{,}99}{2} = 0{,}975$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5% без изменения оптимальной партии поставки. ■

Модель определения оптимального размера партии при мгновенном пополнении запаса и допущении дефицита

<u>Решение задания № 3.3.1-3.3.30</u>

Исходные данные: N=120000; θ=365; K=10000; c=3,5; s = 0,35.

Определим интенсивность расходования запаса в единицу времени:

$$\nu = \frac{N}{\theta} = \frac{120000}{365} = 328{,}77 \text{ дет. в день.}$$

Тогда:

1) наиболее экономичный объем партии, который минимизирует затраты, связанные с заказыванием, хранением запасов и потерями от дефицита составит:

$$q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{s\dfrac{c}{c+s}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10000\cdot 328{,}77}{0{,}35\cdot\dfrac{3{,}5}{3{,}5+0{,}3{,}5}}} = \sqrt{\frac{6575400}{0{,}3182}} = \sqrt{20664362} \approx 4546 \text{ деталей.}$$

2) оптимальный интервал между поставками равен:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s\nu\cdot\dfrac{c}{c+s}}} = \frac{q^*}{\nu} = \frac{4546}{328{,}77} \approx 13{,}8 \text{ дней.}$$

3) объем запаса, который минимизирует затраты, связанные с заказыванием, хранением запасов и потерями от дефицита:

$$p^* = q^*\cdot\frac{c}{c+s} = 4546\cdot 0{,}9091 \approx 4133 \text{ деталей.}$$

4) суммарные затраты на заказывание, хранение запасов и потери от дефицита в единицу времени:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu\frac{c}{c+s}} = sq^*\frac{c}{c+s} = 0{,}35\cdot 4546\cdot 0{,}9091 \approx 1446 \text{ ден. ед.}$$

5) плотность убытков из-за неудовлетворенного спроса составит:

$$\beta = \frac{c}{c+s} = \frac{3{,}5}{3{,}5+0{,}35} \approx 0{,}909\,.$$

6) время между поставками, в течение которого детали на сборке будут отсутствовать составит:

$100(1-\beta)=100\cdot 0{,}091=9{,}1\%$.

7) график изменения запасов изображен на рис. 5.

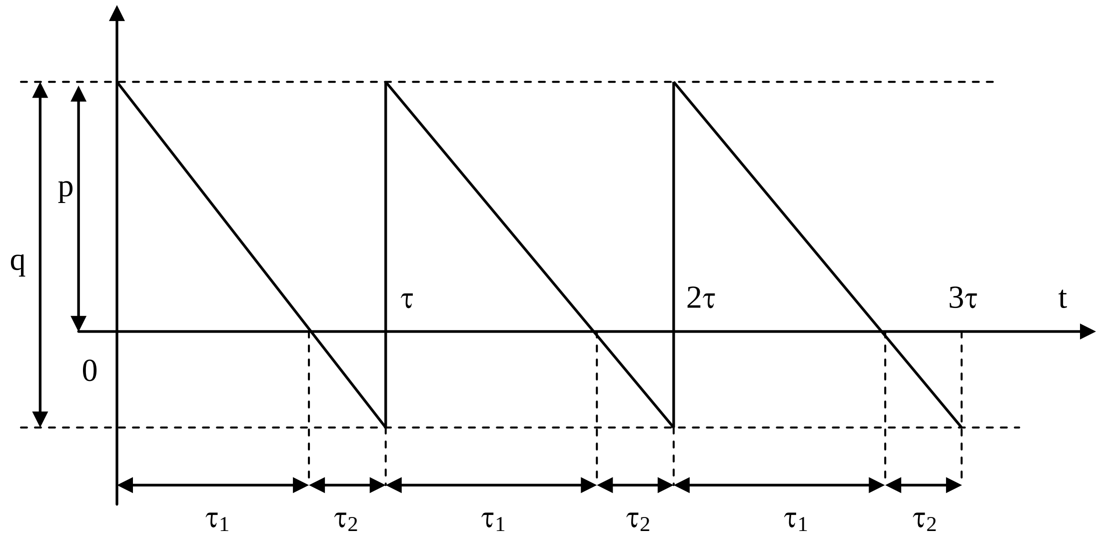

Рис. 5

8)

$$\frac{q}{q^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2K\nu}{s}}}{\sqrt{\dfrac{2K\nu}{s\cdot\dfrac{c}{c+s}}}}=\sqrt{\frac{c}{c+s}}=\sqrt{\beta}=\sqrt{0{,}909}\approx 0{,}953,$$

т.е. в случае не допущения дефицита оптимальный объем партии меньше на 4,7 %, чем тогда когда дефицит допускается.

9)

$$\frac{\tau}{\tau^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2K}{s\nu}}}{\sqrt{\dfrac{2K}{s\nu\cdot\dfrac{c}{c+s}}}}=\sqrt{\frac{c}{c+s}}=\sqrt{\beta}=\sqrt{0{,}909}\approx 0{,}953,$$

т.е. в случае не допущения дефицита оптимальный интервал между поставками меньше на 4,7 %, чем тогда когда дефицит допускается.

10) без изменения оптимальной партии поставки имеем:

$$\frac{L}{L^*}=\frac{\frac{K\nu}{q^*}+\frac{sq^*}{2}}{sq^*\frac{c}{c+s}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2K\nu}{s(q^*)^2\frac{c}{c+s}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{c}{c+s}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\beta+1}{2\beta}=\frac{0{,}909+1}{2\cdot 0{,}909}=1{,}05,$$

т.е. в случае не допущения дефицита издержки больше на 5%, чем тогда когда дефицит допускается.

В случае изменения оптимальной партии поставки:

$$\frac{L}{L^*}=\frac{\sqrt{2Ks\nu}}{\sqrt{2Ks\nu\frac{c}{c+s}}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{c}{c+s}}}=\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}909}}\approx 1{,}05,$$

т.е. в случае не допущения дефицита издержки больше на 5%, чем тогда когда дефицит допускается.

■

Модель определения оптимального размера партии при непрерывном пополнении запаса и допущении дефицита

<u>Решение задания № 3.4.1-3.4.30</u>

Исходные данные: λ=1500; ν=300; K=1200; c=0,15; s = 0,03.

Формулы для расчета основных характеристик моделей, рассмотренных в заданиях 2.1-2.4, приведены в следующей таблице:

	Модель 1	**Модель 2**	**Модель 3**	**Модель 4**
q^*	$q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s}}$	$q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s\alpha}}$	$q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s\beta}}$	$q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s\alpha\beta}}$
L^*	$L^*=q^*s$	$L^*=q^*s\alpha$	$L^*=q^*s\beta$	$L^*=q^*s\alpha\beta$
τ^*	$\tau^*=\frac{q^*}{\nu}$	$\tau^*=\frac{q^*}{\nu}$	$\tau^*=\frac{q^*}{\nu}$	$\tau^*=\frac{q^*}{\nu}$
p^*	$p^*=q^*$	$p^*=q^*\alpha$	$p^*=q^*\beta$	$p^*=q^*\alpha\beta$
α	–	$1-\frac{\nu}{\lambda}$	–	$1-\frac{\nu}{\lambda}$
β	–	–	$\frac{c}{c+s}$	$\frac{c}{c+s}$

Тогда:

1) наиболее экономичный объем партии, который минимизирует затраты, связанные с переналадкой оборудования, хранением продукции и потерями от дефицита составит:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s\left(1-\dfrac{v}{\lambda}\right)\dfrac{c}{c+s}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1200\cdot 300}{0{,}03\cdot\left(1-\dfrac{300}{1500}\right)\dfrac{0{,}15}{0{,}15+0{,}03}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1200\cdot 300}{0{,}03\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8333}} =$$

$$= \sqrt{\frac{720000}{0{,}02}} = \sqrt{36000000} = 6000 \ \textit{кг}.$$

2) оптимальный интервал перехода к новому типу продукции:

$$\tau^* = \frac{q^*}{v} = \frac{6000}{300} = 20 \text{ суток.}$$

3) время, затраченное на производство продукции каждого типа:

$$\tau_1{}^* = \frac{q^*}{\lambda}\cdot\frac{c}{c+s} = \frac{6000}{1500}\cdot\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}03} = 4\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{3} = 3{,}33 \text{ суток,}$$

$$\tau_4{}^* = \frac{q^*}{\lambda}\cdot\left(1-\frac{c}{c+s}\right) = \frac{6000}{1500}\cdot\left(1-\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}03}\right) = 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}67 \text{ суток,}$$

$$\tau_1{}^* + \tau_4{}^* = 3{,}33 + 0{,}67 = 4 \text{ суток.}$$

4) время, в течение которого не производиться поставка продукции:

$$\tau_3{}^* = \frac{q^*}{v}\cdot\left(1-\frac{v}{\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{c}{c+s}\right) = \frac{6000}{300}\cdot\left(1-\frac{300}{1500}\right)\cdot\left(1-\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}03}\right) = 20\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2{,}67 \text{ суток.}$$

5) время, в течение которого может производиться переналадка оборудования:

$$\tau_2{}^* = \frac{q^*}{v}\cdot\left(1-\frac{v}{\lambda}\right)\cdot\frac{c}{c+s} = \frac{6000}{300}\cdot\left(1-\frac{300}{1500}\right)\cdot\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}03} = 20\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{40}{3} = 13{,}33 \text{ суток,}$$

$$\tau_3{}^* = \frac{q^*}{v}\cdot\left(1-\frac{v}{\lambda}\right)\cdot\left(1-\frac{c}{c+s}\right) = \frac{6000}{300}\cdot\left(1-\frac{300}{1500}\right)\cdot\left(1-\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}03}\right) = 20\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2{,}67 \text{ суток,}$$

$$\tau_2{}^* + \tau_3{}^* = 13{,}33 + 2{,}67 = 16 \text{ суток.}$$

Условие $\tau_1{}^* + \tau_2{}^* + \tau_3{}^* + \tau_4{}^* = \tau^*$ может служить для проверки результата τ^*. Действительно, $\tau_1{}^* + \tau_2{}^* + \tau_3{}^* + \tau_4{}^* = 3{,}33 + 13{,}33 + 2{,}67 + 0{,}67 = 20 = \tau^*$.

6) объем запаса, который минимизирует затраты, связанные с переналадкой оборудования, хранением продукции и потерями от дефицита (максимальный уровень наличных запасов):

$$p^* = \nu \cdot \tau_2{}^* = q^* \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right) \cdot \frac{c}{c+s} = 300 \cdot 13{,}33 = 4000 \text{ кг.}$$

7) максимальный уровень дефицита:

$$q^* - p^* = 6000 - 40000 = 2000 \text{ кг.}$$

8) среднесуточные издержки работы системы:

$$L^* = \sqrt{2Ks\nu \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right) \cdot \frac{c}{c+s}} = sq^* \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\lambda}\right) \cdot \frac{c}{c+s} = 0{,}03 \cdot 6000 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = 120 \text{ ден. ед. в сутки.}$$

9) график изменения производственного процесса изображен на рис. 6.

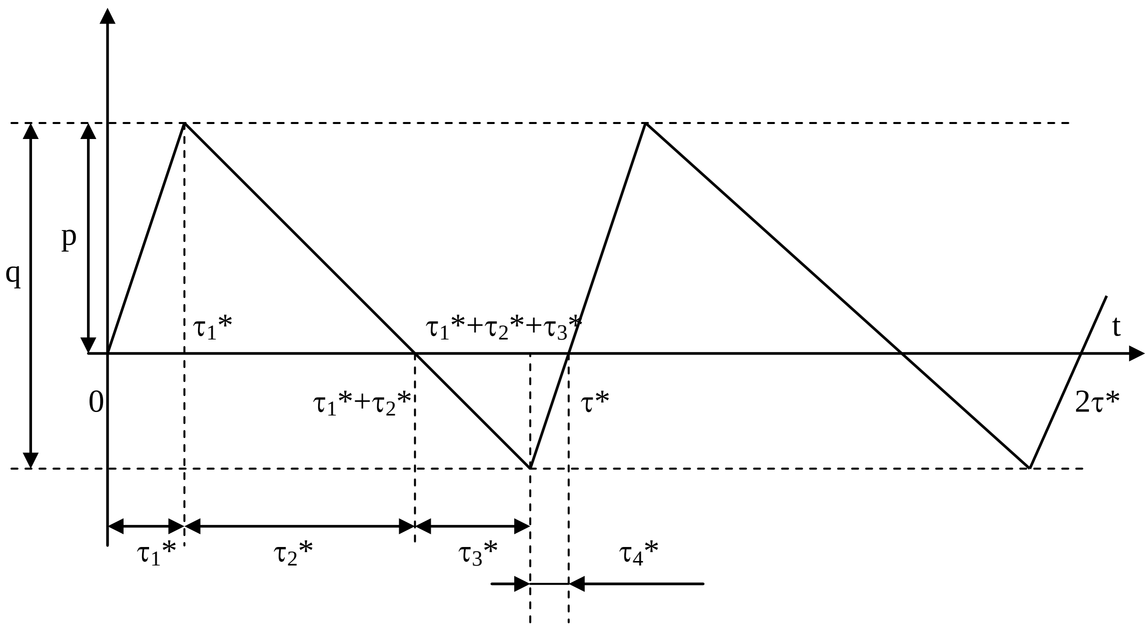

Рис. 6

■

ГЛАВА 9. ЦЕПИ МАРКОВА

Регулярные марковские цепи

<u>Решение задания № 4.1.1-4.1.30</u>

Пусть p=0,7, q=0,2, ε=–0,1. Множество состояний предприятий A и B следующее:

ε_1 – план перевыполнен,

ε_2 – выполнен на 100%,

ε_3 – не выполнен.

Для предприятий A и B переходные матрицы имеют вид

$$P_{\text{A}}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{array} \\
\begin{array}{c}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}
\end{array};\ P_{\text{B}}=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc}\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{array} \\
\begin{array}{c}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}
\end{array}.$$

Так как для предприятия A переходная матрица не зависит от номера строки, то матрица финальных вероятностей совпадает с матрицей P_{A}. Тогда $p_1^A = 0{,}7$, $p_2^A = 0{,}1$, $p_3^A = 0{,}2$. Чтобы найти финальные вероятности для предприятия B, необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{p}\cdot P = \overline{p} \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, \end{cases}$$

где P – переходная матрица, $\overline{p} = (p_1\, p_2 \ldots p_n)$ – вектор-строка, n – количество состояний.

Тогда

$$\begin{cases} 0{,}6p_1 + 0{,}7p_2 + 0{,}8p_3 = p_1 \\ 0{,}1p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3 = p_2 \\ 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}1p_3 = p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \end{cases}$$

где p_1, p_2, p_3 – искомые вероятности.

Третье уравнение этой системы можно отбросить, так как оно является следствием первых двух. Решая оставшиеся уравнения, получаем

$$\begin{cases} -0{,}4p_1 + 0{,}7p_2 + 0{,}8p_3 = 0 \\ 0{,}1p_1 - 0{,}9p_2 + 0{,}1p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 - 9p_2 + p_3 = 0 \\ -4p_1 + 7p_2 + 8p_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -10p_2 = -1 \\ 11p_2 + 12p_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_2 = \dfrac{1}{10} \\ 12p_3 = \dfrac{29}{10} \end{cases} \Leftrightarrow\begin{cases} p_1^B = \dfrac{79}{120} \\ p_2^B = \dfrac{1}{10} \\ p_3^B = \dfrac{29}{120}. \end{cases}$$

Выводы. Доля выполнения плана на 100% у обоих предприятий одна и та же $\left(p_2^A = p_2^B = 0{,}1\right)$, доля перевыполнения плана у предприятия B меньше, чем у предприятия A ($p_1^B = \dfrac{79}{120} = 0{,}6583 < p_1^A = 0{,}7$).

■

Поглощающие марковские цепи

Решение задания № 4.2.1-4.2.30

Пусть p_1=0,7, q_1=0,1, p_2=0,7, q_2=0,1. Множество состояний студентов учебного заведения с двухлетним сроком обучения следующее:

ε_1 – первокурсник,

ε_2 – второкурсник,

ε_3 – специалисты, окончившие учебное заведение,

ε_4 – лица, обучавшиеся в учебном заведении, но не окончившие его. Составим матрицу переходов из состояние в состояние:

$$P=\begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}7 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Приведем ее к канонической форме: $\begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$, где

I – единичная матрица размерности s×s;

O – матрица, состоящая из нулевых элементов, размерности t×t;

R – матрица, размерности t×s, относящаяся к переходам из неустойчивых состояний в поглощающие;

Q – t-мерная квадратная матрица переходов из неустойчивых состояний в неустойчивые;

s – количество поглощающих состояний;

t – количество неустойчивых состояний.

Тогда

$$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \varepsilon_4 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix} \end{array}, \text{ где } Q=\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем так называемую фундаментальную матрицу

$$N=(I-Q)^{-1}=\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix}\right]^{-1}=\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ -0{,}7 & 0{,}9 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Для невырожденной матрицы второго порядка $A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

Тогда $N=\dfrac{1}{0{,}9\cdot 0{,}9-0\cdot(-0{,}7)}\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}9 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{0{,}81}\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1{,}11 & 0 \\ 0{,}86 & 1{,}11 \end{bmatrix}.$

Рассмотрим средние значения времени пребывания в учебном заведении, т. е. компоненты вектора столбца

$$\tau=N\xi=\begin{bmatrix} 1{,}11 & 0 \\ 0{,}86 & 1{,}11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1{,}11 \\ 1{,}97 \end{bmatrix}.$$

Выводы. На время пребывания в учебном заведении действуют два противоположных фактора: возможность остаться для повторного обучения, что увеличивает время обучения, и возможность отчисления, что уменьшает это время. В результате влияния обоих факторов для каждых 100 второкурсников суммарное время обучения на курсе 111 человеко-лет, первокурсников – 197 человеко-лет до окончания или отчисления.

Найдем матрицу вероятностей попадания в поглощающие состояния, т. е. матрицу

$$B=NR=\begin{bmatrix} 1{,}11 & 0 \\ 0{,}86 & 1{,}11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}22 & 0{,}78 \\ 0{,}40 & 0{,}60 \end{bmatrix}$$

Выводы. Из матрицы В следует, что вероятность закончить учебу для первокурсника равна 0,60 (из каждых 100 поступивших заканчивают учебное заведение лишь 60 студентов), а для второкурсника - 0,78 (из каждых 100 второкурсников заканчивают учебу 78 студентов).

■

Марковские процессы с доходами

Решение задания № 4.3.1-4.3.30

Пусть p_{11}=0,7, p_{12}=0,3, p_{21}=0,6, p_{22}=0,4, r_{11}=40, r_{12}=r_{21}=20, r_{22}=20. Тогда матрица переходных вероятностей:

$$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Матрица вознаграждений имеет вид

$$R=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Средний доход за один переход составит $q_{\text{i}}=\sum_{k=1}^{n} p_{\text{ik}}r_{\text{ik}}$, где n – количество состояний. Тогда

$$q_1=p_{11}r_{11}+ p_{12}r_{12}=0{,}7\cdot 40+0{,}3\cdot 20=34,$$
$$q_2=p_{21}r_{21}+ p_{22}r_{22}=0{,}6\cdot 20+0{,}4\cdot(-20)=4.$$

Средний доход за m переходов вычисляется на основе матричного рекуррентного уравнения:

$$V(m)=Q+PV(m\text{-}1),$$

где Q – вектор среднего дохода за один переход.
Тогда для m=2, получим

$$V(2)=\begin{bmatrix} 34 \\ 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}\cdot V(1)\text{, где } V(1)=\begin{bmatrix} 34 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$V(2)=\begin{bmatrix} 34 \\ 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 34 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 34 \\ 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 23{,}8+1{,}2 \\ 20{,}4+1{,}6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 59 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Выводы. Итак, ожидаемая прибыль за два перехода составит 59 у. е., если процесс начал развиваться из состояния ε_1, и 26 у. е., если процесс начал развиваться из ε_2. Ожидаемая средняя прибыль за один переход составит

$$V_{cp}(2)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 59 \\ 26 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 29{,}5 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Для m=3, получим

$$V(3)=\begin{bmatrix}34\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}59\\26\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}41{,}3+7{,}8\\35{,}4+10{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}83{,}1\\49{,}8\end{bmatrix}.$$

Выводы. Ожидаемая прибыль за три перехода составит 83,1 у. е., если процесс начал развиваться из состояния ε_1, и 49,8 у. е., если процесс начал развиваться из ε_2. Ожидаемая средняя прибыль за один переход составит

$$V_{cp}(3)=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}83{,}1\\49{,}8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27{,}7\\16{,}6\end{bmatrix}.$$

Если m=4, получим

$$V(4)=\begin{bmatrix}34\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}83{,}1\\49{,}8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}58{,}17+14{,}94\\49{,}86+19{,}92\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}107{,}11\\73{,}78\end{bmatrix}.$$

Выводы. Ожидаемая прибыль за четыре перехода составит 107,11 у. е., если процесс начал развиваться из состояния ε_1, и 73,78 у. е., если процесс начал развиваться из ε_2. Ожидаемая средняя прибыль за один переход составит

$$V_{cp}(4)=\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}107{,}11\\73{,}78\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26{,}7775\\18{,}445\end{bmatrix}.$$

Финальные вероятности находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} pP=p \\ p_1+p_2+\ldots+p_n=1 \end{cases}, \text{ где } p=\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \ldots & p_n\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}7 & 0{,}3\\0{,}6 & 0{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix} \\ p_1+p_2=1 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 0{,}7p_1+0{,}6p_2=p_1 \\ 0{,}3p_1+0{,}4p_2=p_2 \\ p_1+p_2=1 \end{cases}.$$

Откуда $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{3}$. Стационарное ожидаемое вознаграждение $g=\sum_{k=1}^{n} q_i p_i$. Следовательно, $g=q_1p_1+q_2p_2=34\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\frac{1}{3}=24$. Таким образом, если система работает в течение многих переходов и неизвестно ее текущее состояние, то ожидаемая прибыль за один шаг процесса составит 24 у. е.

■

ГЛАВА 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

Решение задания № 5.1.1-5.1.30

Исходные данные: λ_{01}=1; λ_{02}=2; λ_{10}=2; λ_{13}=2; λ_{20}=3; λ_{23}=1; λ_{31}=3; λ_{32}=2; R_1=10; R_2=6; r_1=4; r_2=2.

1) Возможные состояния системы:
S_0 – оба узла исправны;
S_1 – первый узел ремонтируется;
S_2 – второй узел ремонтируется;
S_3 – оба узла ремонтируются.
Размеченный граф системы изображен на рис. 7.

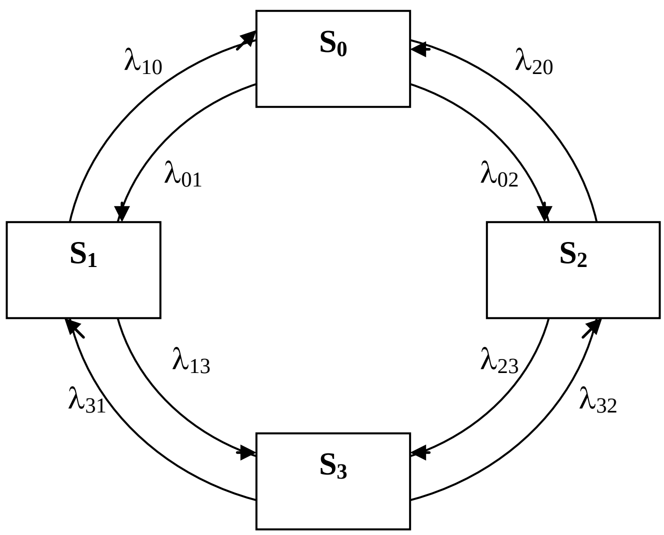

Рис. 7

2) Составим систему уравнений Колмогорова по правилу, согласно которому слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния p_i умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-ое состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

$$\begin{cases} (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 \\ (\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 \\ (\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 \\ (\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 \end{cases}.$$

Тогда, дополняя эту систему уравнением $p_0+p_1+p_2+p_3=1$, получим

$$\begin{cases}(1+2)p_0=2p_1+3p_2\\(2+2)p_1=p_0+3p_3\\(3+1)p_2=2p_0+2p_3\\(3+2)p_3=3p_1+1p_2\\p_0+p_1+p_2+p_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3p_0=2p_1+3p_2\\4p_1=p_0+3p_3\\2p_2=p_0+p_3\\p_0+p_1+p_2+p_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p_0+\ \ p_1+\ \ p_2+p_3=1\\3p_0-2p_1-3p_2\qquad=0\\-p_0+4p_1\qquad-3p_3=0\\-p_0\qquad+2p_2-p_3=0\end{cases}.$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\3&-2&-3&0&0\\-1&4&0&-3&0\\-1&0&2&-1&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&-5&-6&-3&-3\\0&5&1&-2&1\\0&1&3&0&1\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&3&0&1\\0&5&1&-2&1\\0&5&6&3&3\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&3&0&1\\0&0&-14&-2&-4\\0&0&-9&3&-2\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&3&0&1\\0&0&-14&-2&-4\\0&0&0&-60&-8\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&1&3&0&1\\0&0&7&1&2\\0&0&0&15&2\end{array}\right).$$

Таким образом

$$\begin{cases}p_0+p_1+\ \ p_2+p_3=1\\ \qquad p_1+3p_2\qquad=1\\ \qquad\qquad 7p_2+p_3=2\\ \qquad\qquad\quad 15p_3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p_0=\dfrac{2}{5}\\p_1=\dfrac{1}{5}\\p_2=\dfrac{4}{15}\\p_3=\dfrac{2}{15}\end{cases}.$$

Поэтому в предельном, стационарном режиме система S_0 в среднем 40% времени будет находиться в состоянии (оба узла исправны) ($p_0=\frac{2}{5}=0{,}40$), 20% времени – в состоянии S_1 (первый узел ремонтируется, второй работает) ($p_1=\frac{1}{5}=0{,}20$), 27% времени – в состоянии S_2 (второй узел ремонтируется, первый работает) ($p_2 = \dfrac{4}{15} \approx 0{,}27$) и 13% времени – в состоянии S_3 (оба узла ремонтируются) ($p_3 = \dfrac{2}{15} \approx 0{,}13$).

3) В среднем первый узел исправно работает долю времени, равную $p_0 + p_2$, а второй узел – $p_0 + p_1$. В тоже время первый узел находится в ремонте в среднем долю времени, равную $p_2 + p_3$, а второй узел – $p_2 + p_3$. Поэтому средний чистый доход в единицу времени от эксплуатации системы, т. е. разность между доходами и затратами, равен

$$W = (p_0 + p_2)R_1 + (p_0 + p_1)\cdot R_2 - (p_1 + p_3)r_1 - (p_2 + p_3)r_2 =$$
$$= (0{,}40 + 0{,}27)\cdot 10 + (0{,}40 + 0{,}20)\cdot 6 - (0{,}20 + 0{,}13)\cdot 4 - (0{,}27 + 0{,}13)\cdot 2 =$$
$$= 6{,}7 + 3{,}6 - 1{,}32 - 0{,}8 = 10{,}3 - 2{,}12 = 8{,}18 \text{ ден. ед.}$$

4) Уменьшение вдвое среднего времени ремонта каждого из узлов означает увеличение вдвое интенсивности потока “окончания ремонтов” каждого узла, т. е. теперь λ'_{10}=4; λ'_{20}=6; λ'_{31}=6; λ'_{32}=4, так как λ_{10}=2; λ_{20}=3; λ_{31}=3; λ_{32}=2.

Система линейных алгебраических уравнений, описывающая стационарный режим системы S, примет вид

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda'_{10}\, p_1 + \lambda'_{20}\, p_2 \\ (\lambda'_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda'_{31}\, p_3 \\ (\lambda'_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02} p_0 + \lambda'_{32}\, p_3 \\ (\lambda'_{31} + \lambda'_{32})p_3 = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 \end{cases}.$$

Тогда, дополняя эту систему уравнением $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, имеем

$$\begin{cases} (1+2)p_0 = 4p_1 + 6p_2 \\ (4+2)p_1 = p_0 + 6p_3 \\ (6+1)p_2 = 2p_0 + 4p_3 \\ (6+4)p_3 = 3p_1 + 1p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p_0 = 4p_1 + 6p_2 \\ 6p_1 = p_0 + 6p_3 \\ 7p_2 = 2p_0 + 4p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 3p_0 - 4p_1 - 6p_2 = 0 \\ -p_0 + 6p_1 - 6p_3 = 0 \\ -2p_0 + 7p_2 - 4p_3 = 0 \end{cases}.$$

Решая систему

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 7 & -4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & -2 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -9 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 56 & 56 & 14 \\ 0 & 0 & -45 & 20 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -45 & 20 & -8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 260 & 13 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right),$$

получим

$$\begin{cases} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 7p_1 + 9p_2 + 3p_3 = 3 \\ 4p_2 + 4p_3 = 1 \\ 20p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 = \dfrac{3}{5} \\ p_1 = \dfrac{3}{20} \\ p_2 = \dfrac{1}{5} \\ p_3 = \dfrac{1}{20} \end{cases}.$$

Таким образом

$$p_0 = \frac{3}{5} = 0{,}60; \quad p_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad p_2 = \frac{1}{5} = 0{,}20; \quad p_3 = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Учитывая, что затраты на ремонт первого и второго узла составляют r'_1=8 ден. ед.; r'_2=4 ден. ед., (так как r_1=4; r_2=2), вычислим средний чистый доход в единицу времени

$$W' = (p_0 + p_2)R_1 + (p_0 + p_1)\cdot R_2 - (p_1 + p_3)r'_1 - (p_2 + p_3)r'_2 =$$
$$= (0{,}60 + 0{,}20)\cdot 10 + (0{,}60 + 0{,}15)\cdot 6 - (0{,}15 + 0{,}05)\cdot 8 - (0{,}20 + 0{,}05)\cdot 4 =$$
$$= 8 + 4{,}5 - 1{,}6 - 1 = 12{,}5 - 2{,}6 = 9{,}9 \text{ ден. ед.}$$

Так как W=8,18<W'=9,9 (примерно на $\frac{9{,}9-8{,}18}{8{,}18}\cdot 100 = \frac{1{,}72}{8{,}18}\cdot 100 \approx 21\%$), то ускорение ремонтов узлов экономически целесообразно.

■

Многоканальная СМО с отказами

<u>Решение задания № 5.2.1-5.2.30</u>

Состояния системы массового обслуживания (СМО), пронумеруем по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

ε_0 – в СМО нет ни одной заявки,

ε_1 – в СМО находится одна заявки (один канал занят, остальные свободны),

ε_2 – в СМО находится две заявки (два канала заняты, остальные свободны),

...

ε_n – в СМО находится n заявок (все n каналов заняты).

Граф состояний СМО представлен на рис. 8.

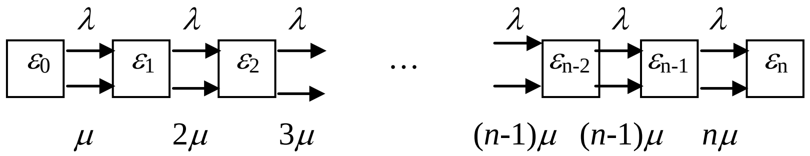

Рис. 8

Приведем основные расчетные соотношения для n-канальной СМО с отказами (задача Эрланга):

- формулы для расчета финальных вероятностей:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu},\ \mu = \frac{1}{t_{об}}; \tag{1}$$

$$p_k = \frac{\rho^k p_0}{k!},\ \ k = 1,\ 2,\ ...,\ n; \tag{2}$$

- $P_{отк}$ – вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслуженной):

$$P_{отк} = p_n; \tag{3}$$

- Q – относительная пропускная способность (средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой):

$$Q = 1 - p_n; \tag{4}$$

- A – абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

$$A=\lambda Q; \tag{5}$$

- $N_з$ – среднее число занятых каналов:

$$N_з = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \frac{A}{\mu}; \tag{6}$$

- $N_п$ – среднее число простаивающих каналов:

$$N_п = \sum_{k=0}^{n} (n-k) p_k = n - N_з; \tag{7}$$

- $k_з$ – коэффициент загрузки каналов:

$$k_з = \frac{N_з}{n}; \tag{8}$$

- $k_п$ – коэффициент простоя каналов:

$$k_п = \frac{N_п}{n}. \tag{9}$$

Оценим эффективность функционирования АТС при следующих числовых значениях переменных величин: n=6 (каналов), λ=4 (заявки в мин.), $t_{об}$=1,5 (мин.) и q=80 %.

Определим параметр $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot t_{об} = 4 \cdot 1{,}5 = 6$ ($\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$). Вычисления в соответствии с формулами (1) - (9) сведем в таблицу:

k	ρ^k	$k!$	$\rho^k/k!$	p_k	kp_k
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	1	1,0	0,0041	0,0000
1	6	1	6,0	0,0246	0,0246
2	36	2	18,0	0,0738	0,1476
3	216	6	36,0	0,1476	0,4428
4	1296	24	54,0	0,2214	0,8856
5	7776	120	64,8	0,2656	1,3280
6	46656	720	64,8	0,2656	1,5936
$\sum$			244,6	1,0027	4,4222

Вычисления начинаются с заполнения первых четырех столбцов. Сумма элементов четвертого столбца дает знаменатель выражения (1) для определения p_0. Тогда

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{244{,}6} = 0{,}0041 .$$

Далее находим элементы пятого столбца, умножая на величину p_0 соответствующие элементы четвертого столбца. Вычислив значения p_k, рассчитывают элементы последнего столбца. Элементы пятого столбца суммируют для контроля вычислений. Их сумма должна быть равна единице (с допустимыми в пределах точности расчетов отклонениями). Сумма элементов шестого столбца есть в соответствии с выражением (6) среднее число занятых каналов:

$$N_з=4{,}42.$$

Используя выражения (7) - (9), находим:

- среднее число простаивающих каналов:

$$N_п=n-N_з=6-4{,}42=1{,}58;$$

- коэффициент загрузки каналов:

$$k_з = \frac{N_з}{n} = \frac{4{,}42}{6} = 0{,}737 ;$$

- коэффициент простоя каналов:

$$k_п=1-k_з=1-0{,}737=0{,}263.$$

Последнее число в пятом столбце дает вероятность отказа:

$$P_{отк}=p_6=0{,}2656.$$

Тогда относительная пропускная способность:

$$Q=1-p_6=1-0{,}2656=0{,}7344,$$

а абсолютная пропускная способность:

$$A=\lambda Q=4\cdot 0{,}7344=2{,}9376.$$

Анализ полученных результатов. Значение p_0=0,0041 означает, что в среднем 0,4 % всего времени работы все 6 каналов одновременно будут свободны. В среднем будут постоянно заняты $N_з$=4,42 каналов связи. Как показывает коэффициент загрузки $k_з$=0,737, в среднем каждый канал занят 73,7 % рабочего времени. В тоже время величина $P_{отк}$=0,2656 говорит о том, что из каждых 100 вызовов 26,56 % получат отказ. Относительная пропускная способность Q=0,7344 говорит о том, что 6 каналов не гарантируют удовлетворение q=80 % поступающих заявок.

Рассчитаем характеристики СМО для n=7:

k	ρ^k	$k!$	$\rho^k/k!$	p_k	kp_k
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	1	1,0	0,0033	0,0000
1	6	1	6,0	0,0200	0,0200
2	36	2	18,0	0,0600	0,1200
3	216	6	36,0	0,1200	0,3600
4	1296	24	54,0	0,1799	0,7196
5	7776	120	64,8	0,2159	1,0795
6	46656	720	64,8	0,2159	1,2954
7	279936	5040	55,5	0,1849	1,2943
$\sum$			300,1	0,9999	4,8888

- вероятность того, что в системе нет ни одной заявки

$$p_0 = \frac{1}{300,1} = 0,0033;$$

- среднее число занятых каналов $N_з$=4,89;
- среднее число простаивающих каналов $N_п$=n-$N_з$=7-4,89=2,11;
- коэффициент загрузки каналов

$$k_з = \frac{N_з}{n} = \frac{4,89}{7} = 0,699;$$

- коэффициент простоя каналов $k_п$=1-$k_з$=1-0,699=0,301, т.е. доля простаивающих каналов составит 30,1 %;
- вероятность отказа $P_{отк}$=p_7=0,1849;
- относительная пропускная способность Q=1-p_7=1-0,1849=0,8151, т.е. в среднем 81,51 % заявок будут удовлетворены;
- абсолютная пропускная способность A=λQ=4·0,8151=3,2604.

Выводы. Для удовлетворения q=80 % заявок необходимо 7 каналов. В этом случае доля простаивающих каналов составит 30,1 %.

■

Одноканальная СМО с неограниченной очередью

<u>Решение задания № 5.3.1-5.3.30</u>

Пусть λ=2 (состава в час), $t_{об}$=20 (мин.)=$\frac{1}{3}$ (часа), n=2, $\Delta t_{об}$=2 (мин.). Состояния системы, пронумеруем по числу заявок, находящихся в системе массового обслуживания (СМО):

ε_0 – канал свободен,

ε_1 – канал занят (обслуживает одну заявку), очереди нет,

ε_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди,

...

ε_k – канал занят, k-1 заявок стоят в очереди,

...

Финальные вероятности состояний системы, которые существуют при условии $\rho<1$, определим из соотношений:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho, \tag{1}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\mu = \frac{1}{t_{об}}$ (заметим, что ряд в формуле (1) представляет собой геометрическую прогрессию);

$$p_k = \rho^k p_0 = \rho^k(1-\rho), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots \tag{2}$$

Тогда, т. к. $\mu = \frac{1}{t_{об}} = 3$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} < 1$, то $p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{3}$.

Найдем среднее число заявок в СМО $L_{сист}$.

Пусть случайная величина X (число заявок в системе) принимает возможные значения 0, 1, 2, ..., k, ... с вероятностями p_0, p_1, p_2, ..., p_k, ... Ее математическое ожидание, используя соотношения (2), равно

$$L_{сист} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + k \cdot p_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}.$$

Заметим, что $k\rho^{k-1}$ – производная по ρ от выражения ρ^k. Поэтому

$$L_{сист} = \rho(1-\rho)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \rho(1-\rho)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k.$$

Меняя местами операции дифференцирования и суммирования, получим

$$L_{сист} = \rho(1-\rho)\cdot\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k.$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом ρ и знаменателем ρ, которая равна $\frac{\rho}{1-\rho}$. Ее производная равна

$$\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)' = \frac{\rho'(1-\rho)-(1-\rho)'\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1-\rho+\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}.$$

Тогда окончательно имеем

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{3}$$

Следовательно, среднее число составов, связанных со станцией, равно

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 \text{ (состава).}$$

По формуле Литтла найдем среднее время пребывания заявки в системе

$$W_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}. \tag{4}$$

Тогда среднее время пребывания состава при станции (на внутренних путях, на внешних путях и под обслуживанием) равно $W_{сист}$=1 (час).
Среднее число заявок под обслуживанием $L_{об}$ равно вероятности того, что канал занят $P_{зан}$. Тогда

$$L_{об}=P_{зан}=1-p_0=1-(1-\rho)=\rho.$$

Следовательно, среднее число заявок в очереди

$$L_{оч} = L_{сист} - L_{об} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho,$$

и окончательно

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{5}$$

Тогда среднее число составов, ожидающих очереди на расформирование (все равно, на каких путях),

$$L_{оч}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\approx 1{,}33 \text{ (состава).}$$

Аналогично (4) можно найти среднее время пребывания заявки в очереди

$$W_{оч}=\frac{L_{оч}}{\lambda}. \qquad (6)$$

Тогда среднее время $W_{оч}$ пребывания состава на очереди:

$$W_{оч}=\frac{L_{оч}}{\lambda}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67 \text{ (часа).}$$

Найдем среднее число составов, ожидающих расформирования на внешних путях $L_{внеш}$.

Пусть случайная величина X (число составов, ожидающих расформирования на внешних путях) принимает возможные значения 0, 1, 2, ..., k, ... с вероятностями $p_0+p_1+p_2+p_3$, p_4, p_5 ..., p_{k+3}, ...
Действительно, событие X=1 соответствует состоянию системы ε_4 (канал занят, в очереди три заявки – два состава на внутренних (n=2) и один на внешних путях), событие X=2 соответствует состоянию системы ε_5 и т. д.
Математическое ожидание случайной величины X равно

$$L_{внеш}=\sum_{k=1}^{\infty}0\cdot\left(p_0+p_1+p_2+p_3\right)+1\cdot p_4+2\cdot p_5+\ldots+k\cdot p_{k+3}+\ldots=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}kp_{k+3}=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k+3}(1-\rho)=\rho^4(1-\rho)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k-1}.$$

Аналогично выводу формулы (3) имеем

$$L_{внеш}=\rho^4(1-\rho)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k-1}=\rho^4(1-\rho)\cdot\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k=\rho^4(1-\rho)\cdot\frac{1}{(1-\rho)^2}.$$

И, наконец,

$$L_{внеш}=\frac{\rho^4}{1-\rho}. \qquad (7)$$

Следовательно, среднее число составов, ожидающих расформирования на внешних путях

$$L_{внеш}=\frac{\rho^4}{1-\rho}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{16}{81}}{\frac{1}{3}}=\frac{16}{27}\approx 0{,}593 \text{ (состава).}$$

Аналогично (4) и (6) найдем среднее время ожидания

$$W_{внеш}=\frac{L_{внеш}}{\lambda}. \qquad (8)$$

Тогда $W_{внеш}=\frac{8}{27}\approx 0{,}296$ (часа).

Суммарный суточный штраф $Ш$, который придется заплатить станции за простой составов на внешних путях, если за один час простоя одного состава станция платит штраф 100 у.е. получим, перемножая среднее число составов, прибывающих на станцию за сутки, среднее время ожидания состава на внешних путях и часовой штраф, т. е.

$$Ш=24\cdot\lambda\cdot W_{внеш}\cdot 100=24\cdot 2\cdot\frac{8}{27}\cdot 100=\frac{12800}{9}=1422\frac{2}{9}\approx 1422{,}22 \text{ у.е.}$$

В случае уменьшения среднего значения времени обслуживания состава на $\Delta t_{об}$=2 (мин.), получим:

$$t_{об}=18 \text{ (мин.)}=0{,}3 \text{ (часа)},\ \mu=\frac{1}{t_{об}}=\frac{10}{3},\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}=0{,}6,$$

$$L_{внеш}=\frac{\rho^4}{1-\rho}=\frac{(0{,}6)^4}{1-0{,}6}=\frac{0{,}1296}{0{,}4}=0{,}324 \text{ (состава),}$$

$$W_{внеш}=\frac{L_{внеш}}{\lambda}=\frac{0{,}324}{2}=0{,}162 \text{ (часа),}$$

$$Ш=24\cdot\lambda\cdot W_{внеш}\cdot 100=24\cdot 2\cdot 0{,}162\cdot 100=777{,}6 \text{ у.е.}$$

В случае увеличения количества путей в парке прибытия станции на единицу, имеем:

$$t_{об}=20 \text{ (мин.)}=\frac{1}{3} \text{ (часа)},\ \mu=\frac{1}{t_{об}}=3,\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2}{3},$$

$$L_{внеш}=\frac{\rho^5}{1-\rho}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{32}{243}}{\frac{1}{3}}=\frac{32}{81}\approx 0{,}395 \text{ (состава),}$$

$$W_{внеш}=\frac{L_{внеш}}{\lambda}=\frac{16}{81}=\frac{0{,}395}{2}=0{,}198 \text{ (часа),}$$

$$Ш = 24 \cdot \lambda \cdot W_{внеш} \cdot 100 = 24 \cdot 2 \cdot \frac{16}{81} \cdot 100 = \frac{25600}{27} = 948\frac{4}{27} \approx 948{,}15 \text{ у.е.}$$

Указание. При выполнении своего задания следует использовать формулы (1) - (8). При количестве внутренних путей $n \neq 2$, для вычисления среднего числа составов, ожидающих расформирования на внешних путях $L_{внеш}$, необходимо вывести аналогичное (7) соотношение.

■

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Решение задания № 5.4.1-5.4.30

Пусть n=5, λ=0,3 (пассажира в мин.), $t_{об}$=3 (мин).

Рассчитаем характеристики системы для существующего варианта продажи билетов.

Система представляет собой n - канальную СМО с неограниченной очередью. Состояния системы пронумеруем по числу заявок, находящихся в системе:

ε_0 - в системе заявок нет (все каналы свободны),

ε_1 - занят один канал, остальные свободны,

ε_2 - занято два канала, остальные свободны,

...

ε_k - занято k каналов, остальные свободны,

...

ε_n - заняты все n каналов, очереди нет,

ε_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди,

...

ε_{n+r} - заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди,

...

Приведем основные расчетные соотношения для вычисления характеристик системы, в предположении, что выполнено условие $\frac{\rho}{n} < 1$ ($\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, где $\mu = \frac{1}{t_{об}}$):

- среднее число занятых каналов:

$$N_з = \frac{\lambda}{\mu} = \rho . \tag{1}$$

Заметим, что эта формула справедлива для любой СМО с неограниченной очередью.

- коэффициент использования (загрузки) каналов:

$$k_з = \frac{N_з}{n} = \frac{\rho}{n}; \qquad (2)$$

- финальные вероятности рассчитываются по формулам:
- вероятность того, что в системе нет ни одного требования

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}; \qquad (3)$$

- вероятность того, что в системе находится k требований

$$p_k = \frac{\rho^k p_0}{k!}, \text{ если } 0<k\le n, \qquad (4)$$

$$p_k = \frac{\rho^k p_0}{n!\,n^{k-n}}, \text{ если } k\ge n,$$

- вероятность того, что все каналы заняты:

$$P_{зан} = \frac{p_n}{1-\frac{\rho}{n}} = \frac{p_n}{1-k_з} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k; \qquad (5)$$

- среднее число требований, ожидающих начала обслуживания (средняя длина очереди):

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n! \left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\rho}{n} \cdot p_n}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{k_з \cdot p_n}{(1-k_з)^2}; \qquad (6)$$

- средние потери времени одного требования при ожидании начала обслуживания (среднее время пребывания заявки в очереди):

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}; \qquad (7)$$

- среднее число требований в системе:

$$L_{сист} = L_{оч} + N_з = L_{оч} + \rho; \qquad (8)$$

- среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda}; \qquad (9)$$

- среднее число простаивающих каналов:

$$N_п = \sum_{k=0}^{n} (n-k)p_к = n - N_з = n - \rho; \qquad (10)$$

- коэффициент простоя каналов:

$$k_п = \frac{N_п}{n} = 1 - k_з. \qquad (11)$$

Для существующего варианта продажи билетов интенсивность потока заявок $n\lambda$=5·0,3=1,5 (пассажира в мин.). Тогда для расчета характеристик СМО будем полагать λ=1,5.

Вычислим ρ и проверим выполнение условия: $\frac{\rho}{n} < 1$.

$$\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{3}; \;\; \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot t_{об} = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5; \;\; \frac{\rho}{n} = \frac{4{,}5}{5} = 0{,}9 < 1.$$

Следовательно, можно применить формулы (1) - (11). Тогда

- среднее число занятых каналов (касс):

$$N_з = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 4{,}5;$$

- коэффициент использования (загрузки) каналов (касс):

$$k_з = \frac{N_з}{n} = \frac{\rho}{n} = 0{,}9.$$

Дальнейшие вычисления в соответствии с формулами (1) - (11) удобно вести в таблице.

k	ρ^k	$k!$	$\rho^k/k!$	$p_k=\rho^k p_0/k!$	$(n-k)p_k$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1,0000	1	1,0000	0,0049	0,0245
1	4,5000	1	4,5000	0,0221	0,0884
2	20,2500	2	10,1250	0,0496	0,1488
3	91,1250	6	16,1875	0,0793	0,1586
4	410,0625	24	17,0859	0,0837	0,0837
5	1845,2812	120	15,3773	0,0753	0,0000
∑			64,2757	0,3149	0,5040

Вычисления начинаются с заполнения первых четырех столбцов. Сумма элементов четвертого столбца, элементы таблицы, соответствующие величинам ρ^n и $n!$, используются для определения p_0 в соответствии с выражением (3). Тогда

- вероятность того, что в системе нет требований (заявок):

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1} = \left(64{,}2757 + \frac{1845{,}2812 \cdot 4{,}5}{120(5-4{,}5)} \right)^{-1} = \left(64{,}2757 + \frac{8303{,}7654}{60} \right)^{-1} =$$

$$= (64{,}2757 + 138{,}3961)^{-1} = \frac{1}{202{,}6718} = 0{,}0049.$$

Далее находим элементы пятого столбца, умножая на величину p_0 соответствующие элементы четвертого столбца. Вычислив значения p_k, рассчитывают элементы последнего столбца.

Далее находят:

- вероятность того, что все каналы заняты:

$$P_{зан} = \frac{p_5}{1-k_з} = \frac{0{,}0753}{1-0{,}9} = 0{,}75$$

Элементы пятого столбца суммируют для контроля вычислений. Их сумма может использоваться для вычисления $P_{зан}$ (с допустимыми в пределах точности расчетов отклонениями) согласно (4):

$$P_{зан} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{4} p_k = 1 + p_5 - \sum_{k=0}^{5} p_k = 1 + 0{,}0753 - 0{,}3149 = 0{,}76\,.$$

В соответствии с (6) - (9) находим:

- среднее число требований (пассажиров), ожидающих начала обслуживания (средняя длина очереди):

$$L_{оч} = \frac{k_з \cdot p_n}{(1-k_з)^2} = \frac{k_з \cdot p_5}{(1-k_з)^2} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}0753}{(1-0{,}9)^2} = \frac{0{,}0678}{0{,}01} = 6{,}78\,;$$

- средние потери времени одного требования (пассажира) при ожидании начала обслуживания (среднее время пребывания заявки (пассажира) в очереди):

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{6{,}78}{1{,}5} = 4{,}52\,;$$

- среднее число требований (пассажиров) в системе (кассе):

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho = 6{,}78 + 4{,}5 = 11{,}28;$$

- среднее время пребывания заявки (пассажира) в системе (кассе):

$$W_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{11{,}28}{1{,}5} = 7{,}52\,.$$

Сумма элементов шестого столбца есть в соответствии с выражением (10) среднее число простаивающих каналов (касс) с допустимыми в пределах точности расчетов отклонениями:

$$N_п=n-\rho=5-4{,}5=0{,}5.$$

И, наконец:

- коэффициент простоя каналов:

$$k_п=1-k_з=1-0{,}9=0{,}1.$$

Теперь рассмотрим предлагаемый вариант продажи билетов. Надо рассмотреть n (n=5) одноканальных СМО (n специализированных окошков); на каждую поступает поток заявок с интенсивностью λ=0,3; как и для первого варианта продажи билетов $\mu=\frac{1}{t_{об}}=\frac{1}{3}$, $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0{,}9<1$. Тогда можно рассчитать характеристики каждой рассматриваемой СМО, используя формулы (1) - (11) для n=1:

- среднее число занятых каналов:

$$N_з=\rho=0{,}9; \qquad (12)$$

- коэффициент использования (загрузки) канала:

$$k_з=\rho=0{,}9; \qquad (13)$$

- финальные вероятности рассчитаем по формулам:

- вероятность того, что в системе (у одного окошка кассы) нет ни одного требования (пассажира)

$$p_0=1-\rho=0{,}1; \qquad (14)$$

- вероятность того, что в системе (у одного окошка кассы) находится одно требование (один пассажир):

$$p_1=\rho\cdot p_0=\rho(1-\rho)=0{,}09;$$

- вероятность того, что в системе (у одного окошка кассы) находится k требований (пассажиров) можно рассчитать по формуле:

$$p_k=\rho^k\cdot p_0=\rho^k(1-\rho) \qquad (15)$$

- вероятность того, что канал занят:

$$P_{зан}=\rho=0{,}9; \qquad (16)$$

- среднее число требований (пассажиров у одного окошка кассы), ожидающих начала обслуживания (средняя длина очереди):

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0,81}{0,1} = 8,1; \qquad (17)$$

- средние потери времени одного требования (пассажира) при ожидании начала обслуживания (среднее время пребывания заявки (пассажира) в очереди):

$$W_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{8,1}{0,3} = 27; \qquad (18)$$

- среднее число требований (пассажиров) в системе (у одного окошка кассы):

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,9}{0,1} = 9; \qquad (19)$$

- среднее время пребывания заявки (пассажира) в системе (кассе):

$$W_{сист} = \frac{L_{сист}}{\lambda} = \frac{9}{0,3} = 30; \qquad (20)$$

- среднее число простаивающих каналов:

$$N_{п}=1-\rho=0,1; \qquad (21)$$

- коэффициент простоя канала:

$$k_{п}=1-\rho=0,1. \qquad (22)$$

Заметим, что некоторые из характеристик рассматриваемой СМО носят чисто формальный характер (например, (12), (21)).

Выводы. Расчеты характеристик СМО для двух вариантов продажи билетов позволяют сделать вывод о целесообразности существующего варианта работы кассы. Действительно, средняя длина очереди и среднее время ожидания в очереди возрастет, т. к.

$$L^1_{оч}=6,78<L^2_{оч}=8,1 \text{ и } W^1_{оч}=4,52<W^2_{оч}= 27.$$

■

ЛИТЕРАТУРА

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320 с.

2. Балашевич В.А., Андронов А.М. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учебное пособие для студентов инженерно-экономических и экономических специальностей вузов. – Мн.: Университетское, 1995. – 240 с.

3. Венцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М., Наука, 1988. – 208 с.

4. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.В. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Издательство “Лань”, 2000. – 480 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература.).

5. Замков О.О. , Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. 2-е изд. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство “Дело и Сервис”, 1999. – 368 с.

6. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш., шк., 1991. – 400 с.

7. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб.: Издательство “Питер”, 2000. – 208 с.

8. Костевич Л.С., Лапко А.А.. Теория игр. Исследование операций: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Мн., Выш. шк., 1981. – 231 с.

9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 2-е изд., испр. – М.: Дело, 2000. – 688 с.

10.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

11.Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 1994. – 286 с.

12.Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова. – Минск.: Выш. шк., 1995. – 382 с.

13.Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере: Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

14.Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие. – М.: Изд-во УРАО, 1998. – 160 с.

15.Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. – Мн.: Выш. шк., 1993. – 269 с.

16.Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. – М., “Статистика”, 1976 – 431 с.

17.Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

18.Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н. и др. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова, 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.

19.Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 367 с.

20.Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. – М.: Дело, 2002. – 440 с. – (Сер. “Наука управления”).

Учебное издание

Гусева Светлана Тадеушевна,
Махнист Леонид Петрович,
Рубанов Владимир Степанович,
Шамовская Галина Владимировна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Практикум по дисциплине
"Экономико-математические методы и модели"
для студентов экономических специальностей

Редактор ***Т.В. Строкач***

Ответственный за выпуск *В.С. Рубанов*

Компьютерный набор *Л.П. Махнист*

Технический редактор *А.Д. Никитчик*

Подписано в печать ____.09.2005. Формат 60×84 1/16
Бумага писч. Усл. п. л. ____. Уч. изд. л. ____. Тираж ____ экз.
Заказ № ____

Отпечатано на ризографе УО "Брестский государственный технический университет"
224017, Брест, ул. Московская, 267