Министерство образования Республики Беларусь

Брестский государственный технический университет

Кафедра высшей математики

Лабораторные работы

по дисциплине «Высшая математика»

Часть II

Брест 2002

УДК 517.9

Настоящая методическая разработка предназначена для выполнения лабораторных работ по курсу высшей математики для студентов технических специальностей очной формы обучения. Каждая лабораторная работа содержит краткие сведения из теории и образец выполнения работы.

Составители: С.Т. Гусева, доцент
А.В. Санюкевич, к.ф.-м.н., доцент
М.Г. Журавель, ассистент
О.К. Денисович, ассистент

Рецензент: Н.Н.Сендер, заведующий кафедрой высшей математики
Брестского государственного университета,
канд. физ.-мат. наук, доцент

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее методическое пособие включены задачи из следующих разделов: подбор эмпирических формул для обработки эмпирических данных и вычисление параметров этих формул по методу наименьших квадратов; выборочный метод, элементы теории корреляции.

Лабораторные занятия преследуют следующие цели:

1) усвоение и закрепление основных алгоритмов, понятий и определений математической статистики;

2) практическое решение типичных задач математической статистики, требующих выполнения небольшого объема вычислений, которые могут быть проведены с помощью калькуляторов.

Студент должен:

1) Получить у преподавателя задание на лабораторную работу.

2) Ознакомиться со сведениями из теории и примерами, приведенными в методических указаниях.

3) Выполнить в аудитории или дома аналитические вычисления, требуемые по заданию (вручную). Занести полученные результаты в таблицу.

4) Если лабораторная работа допускает, то провести аналогичные вычисления на компьютере во время лабораторного занятия. Занести полученные на компьютере результаты в таблицу.

5) По результатам работы сдать отчет преподавателю.

При подготовке отчёта по каждой лабораторной работе основной упор должен быть сделан не на объём проделанной работы и обилие полученных результатов, а на анализ полученных результатов, на их наглядность.

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: *постановка задачи*; *необходимый теоретический материал*; *решение поставленной задачи*; *анализ полученных результатов*.

Лабораторная работа считается выполненной, если:

- до начала выполнения вычислений на компьютере были проведены аналитические вычисления (вручную) и результаты были занесены в таблицу оформления результатов, представлены аналитические вычисления;
- были проведены вычисления на компьютере, результаты были занесены в таблицу оформления результатов;
- в случае несовпадения аналитического результата, полученного вручную, с результатом, полученным на компьютере, была обнаружена и исправлена ошибка в вычислениях.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Подбор эмпирических формул для обработки эмпирических данных. Выбор вида эмпирической формулы с двумя и тремя параметрами. Вычисление параметров эмпирических формул по методу наименьших квадратов.

1.1 Вводные замечания

Пусть при изучении функциональной зависимости

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

произведен ряд изменений величины x и получены соответствующие значения величины y. Результаты измерений занесены в таблицу:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Если аналитическое выражение функции $f(x)$ неизвестно или весьма сложно, то возникает практически важная задача: найти эмпирическую формулу:

$$\tilde{y} = F(x), \tag{1.2}$$

значение которой при $x=x_i$ возможно мало отличается от опытных данных:

$$y_i \; (i = \overline{1, n}).$$

При такой постановке наша задача весьма неопределенна, поэтому обычно по ряду соображений указывают достаточно узкий класс функций k (например, множество функций линейных, степенных, показательных и т.д.), которому должна принадлежать искомая функция $F(x)$ и дело сводится к нахождению наилучших значений параметров.

Во многих случаях класс k определяется требованием простоты эмпирической формулы, иногда этот класс подсказывается самой природой явления.

Геометрически задача построения эмпирической формулы состоит в проведении кривой L вида (1.2) из некоторого класса k, возможно ближе примыкающей к системе точек: $M_i(x_i; y_i)$, $(i = \overline{1, n})$.

При нахождении эмпирической формулы не требуется, чтобы значения $F(x_i)$ совпадали с y_i. Достаточно, чтобы разность $F(x_i) - f(x_i)$ была мала в известном смысле в данной области. В этом отличие задачи интерполирования от задачи построения эмпирической формулы. Следует иметь в виду также, что сами исходные эмпирические данные x_i и y_i, как правило, являются приближенными и содержат ошибки.

Построение эмпирической формулы слагается из двух этапов:

1. выяснение общего вида этой формулы;
2. определение наилучших ее параметров.

В некоторых случаях выбор типа эмпирической формулы может быть произведен на основе теоретических представлений о характере изучаемой зависимости. В других случаях удается подобрать такую формулу, сравнивая кривую, построенную по данным наблюдения, с образцами известных кривых.

Во многих случаях можно ограничиться полиномом $y=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. Нередко, употребляются другие элементарные функции (дробно-линейная, степенная, показательная, логарифмическая и т.д.). В дальнейшем будут указаны приемы, облегчающие выбор вида эмпирической формулы.

1.2 Некоторые соображения о выборе вида эмпирической формулы с двумя и тремя параметрами

Пусть при данной системе значений x_i, y_i ($i=\overline{1,n}$), где $n\ge 3$ и $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$ требуется найти эмпирическую формулу вида

$$y=F(x,a,b), \tag{*}$$

содержащую лишь два параметра a и b.

Рассмотрим критерий линейной и квадратичной зависимости. Легко дать аналитический критерий для прямолинейности ряда точек $M_i(x_i;y_i)$. Положим $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$, $k_i=\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$, $i=\overline{1,n-1}$.

Если $k_i=const$, то точки $M_i(x_i;y_i)$, очевидно, лежат на одной прямой линии. Если

$$k_1\approx k_2\approx k_3\approx\ldots\approx k_{n-1}, \tag{1.3}$$

то точки $M_i(x_i;y_i)$, приблизительно расположены на прямой. В зависимости от точности выполнения соотношений (1.3) решается вопрос: следует ли искать эмпирическую зависимость между величинами x и y в виде линейной функции

$$y=ax+b. \tag{1.4}$$

В частности, если значения x_i равноотстоящие, т.е. $\Delta x_i=const$, то достаточно убедиться, что значения Δy_i являются также постоянными.

Другим простым случаем, не содержащим три параметра, является наличие квадратичной зависимости

$$y=ax^2+bx+c,\ a\ne 0 \tag{1.5}$$

Формула (1.5) имеет место, когда точки $M_i(x_i;y_i)$ располагаются на отрезке параболы с вертикальной осью.

Для обнаружения этого факта с надлежащей тщательностью проводим гладкую кривую L, вблизи которой группируются данные точки $M_i(x_i;y_i)$ и выбираем на ней точку $N(x_1;y_1)$, по возможности совпадающую с одной из точек $M_k(x_k;y_k)$ $(1\le k\le n)$. Полагаем, что кривая L есть парабола (1.5), будет иметь вид

$$y_0=ax_0^2+bx_0+c. \tag{1.6}$$

Вычитая из уравнения (1.5) равенство (1.6), находим:

$$y-y_0=a\left(x^2-x_0^2\right)+b\left(x-x_0\right)$$

или

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 + b_1(x - x_0), \qquad (1.7)$$

где $b_1 = b + 2ax_0$. Если теперь ввести новые переменные

$$X = x - x_0, \; Y = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

то из уравнения (1.7) получим линейную зависимость

$$y = ax + b_1. \qquad (1.8)$$

Таким образом, параболе (1.5) на плоскости *xOy* соответствует прямая (1.8) на плоскости *XOY*.

1.3 Аналитический критерий для квадратичной зависимости

Пусть $M_i(x_i; y_i)$ – данная таблица значений. При наличии зависимости (1.5) последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ или монотонна, т.е. сохраняет постоянный знак, или эта последовательность имеет единственный экстремум, т.е. разность $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ лишь один раз меняет знак.

Введем разделение разности первого и второго порядка

$$[x_i; x_{i+1}] = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \text{ и } [x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}; x_{i+2}] - [x_i; x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

или

$$[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}] = \frac{\Delta\left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)}{\Delta_1(x_i)}, \qquad (1.9)$$

где $\Delta_1 x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$.

Доказывается, что точки $M_i(x_i; y_i)$ расположены на параболе (1.5) тогда и только тогда, когда сохраняют постоянные значения все распределенные разности второго порядка. В частности, если значения x_1, x_2, x_3, …, x_n равноотстоящие, т.е. $\Delta x_i = h = const$, то для существования эмпирической квадратичной зависимости (1.5) необходимо и достаточно, чтобы была постоянной вторая разность $\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = c$, $(i = \overline{1, n-2})$, причем тогда $\Delta^2 y_i = 2h^2 a$.

Пример 1.1. Данную систему значений исследовать на квадратичную зависимость

X	*0*	*0,5*	*1*	*2*	*4*	*5*	*6*
Y	*0*	*-1,76*	*-3,0*	*-3,96*	*0,24*	*5,40*	*13,34*

Решение. Составим по формуле (1.9) таблицу распределенных разностей (таблица 1.1).

Таблица 1.1

x	Δx	**y**	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$	$\Delta_1 x$	$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta_1 x}$
0		***0***					
	0,5		*-1,76*	*-3,52*			
0,5		***-1,75***			*1,04*	*1*	*1,04*
	0,5		*-1,24*	*-2,48*			
1		***-3,00***			*1,52*	*1,5*	*1,01*
	1		*-0,96*	*-0,9*			
2		***-3,96***			*2,98*	*3*	*0,97*
	2		*3,72*	*1,86*			
4		***-0,24***			*3,78*	*3*	*1,26*
	1		*5,64*	*5,64*			
5		***5,40***			*2,30*	*2*	*1,15*
	1		*7,94*	*7,94*			
6		***13,34***					

Так как вторая распределенная разность примерно постоянна, то можно считать, что между переменными x и y имеет место приближенная квадратичная зависимость.

1.4 Аналитические критерии для других видов зависимости

Рассмотрим общий случай, когда соотношение (*), вообще говоря, не сводится к формулам (1.4) и (1.5).

Достаточным условием существования эмпирической формулы вида (*), где F – известная функция, является совместность (с заданной точностью) системы уравнений $y_i = F(x_i, a, b)$ $(i = \overline{1,n})$. Исключая отсюда неизвестные a и b, получаем систему уравнений для точек $(x_i;y_i)$, обеспечивающую существование зависимости (*), но такой подход является весьма сложным.

Введем необходимое условие существования эмпирической зависимости вида (*) для заданной системы точек $(x_i;y_i)$. Пусть $M_i(x_i;y_i)$, $M_j(x_j;y_j)$, $M_k(x_k;y_k)$ – три системы значений из нашей совокупности. Предполагая, что кривая (*) проходит через точки M_i, M_j, M_k, будем иметь:

$$\begin{aligned} y_i &= F(x_i;a;b), \\ y_j &= F(x_j;a;b), \\ y_k &= F(x_k;a;b). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Исключая из системы (1.10) параметры a и b, получим соотношение вида

$$Q(x_i;x_j;x_k;y_i;y_j;y_k) = 0 \tag{1.11}$$

Выполнение равенства (1.11) для значений i, j, k необходимо для существования зависимости (*).

Так как проверка соотношения (1.11) связана с трудоемкими вычислениями, то на практике ограничиваются одной тройкой точек: начальной ($x_i;y_i$), промежуточной ($x_s;y_s$) и конечной ($x_n;y_n$), т.е. $i=1$, $j=s$, $k=n$, $1<s<n$. Точку M_s выбирают так, чтобы соотношение (1.11) было бы по возможности простым. Будем в дальнейшем рассматривать наиболее часто встречающиеся зависимости

1. $y=ax^2+bx+c$ 2. $y=ax+b$ 3. $y=ae^{bx}$ 4. $y=ax^b$

5. $y=a\ln x+b$ 6. $y=a+\dfrac{b}{x}$ 7. $y=\dfrac{1}{ax+b}$

Пример 1.2. Получить необходимое условие для существования степенной зависимости $y=ax^b$, предполагая, что $x_i>0$, $y_i>0$ ($i=\overline{1,n}$).

Решение. Выберем $x_s=\sqrt{x_1\cdot x_n}$. Из формулы имеем $y_1=ax_1^b$, $y_s=ax_s^b=ax_1^{b/2}x_n^{b/2}$, $y_n=ax_n^b$. Исключая из соотношений параметры a и b, получим $y_1y_n=y_s^2$, т.е. $y_s=\sqrt{y_1y_n}$. Таким образом, для существования степенной зависимости $y=ax^b$ необходимо, чтобы среднему геометрическому x_s значений x_1 и x_n соответствовало среднее геометрическое y_s значений y_1 и y_n.

Аналогично тому, как это сделано в примере 1.2, для существования зависимостей 2–7 легко вывести простые необходимые условия вида $x_s=\overline{x_s}$, $y_s=\overline{y_s}$, где $\overline{x_s}=\varphi(x_1,x_n)$ и $\overline{y_s}=\varphi(y_1,y_n)$, причем предполагается, что $x_i>0$, $y_i>0$, ($i=\overline{1,n}$). Приведем эти условия в таблице:

Таблица 1.2

№	$\overline{x_s}$	$\overline{y_s}$	Вид эмпирической формулы
1.	$\dfrac{x_1+x_n}{2}$ (среднее арифмет.)	$\dfrac{y_1+y_n}{2}$ (среднее арифмет.)	$y=ax+b$
2.	$\sqrt{x_1x_n}$ (среднее геометр.)	$\sqrt{y_1y_n}$ (среднее геометр.)	$y=ax^b$
3.	$\dfrac{x_1+x_n}{2}$ (среднее арифмет.)	$\sqrt{y_1y_n}$ (среднее геометр.)	$y=ab^x$ или $y=ae^{\beta x}$, где $\beta=\ln b$
4.	$\dfrac{2x_1+x_n}{x_1+x_n}$ (среднее геометр.)	$\dfrac{y_1+y_n}{2}$ (среднее арифмет.)	$y=a+\dfrac{b}{x}$
5.	$\dfrac{x_1+x_n}{2}$ (среднее арифмет.)	$\dfrac{2y_1+y_n}{y_1+y_n}$ (средн. гармонич.)	$y=\dfrac{1}{ax+b}$
6.	$\sqrt{x_1x_n}$ (среднее геометр.)	$\dfrac{y_1+y_n}{2}$ (среднее арифмет.)	$y=a\ln x+b$

Таблица 1.2 облегчает выбор вида эмпирической формулы среди указанных. Рекомендуется поступать следующим образом: для проверки пригодности определенной эмпирической формулы, пользуясь исходными данными, находим значения $x_s = \overline{x_s}$ и y_s, и сравниваем последнее со значением $\overline{y_s}$, помещенным в таблице. Предпочтительнее та эмпирическая формула, для которой расхождение $\left| y_s - \overline{y_s} \right|$ возможно мало. Для окончательного выбора следует учесть также промежуточные данные. Если величина $\left| y_s - \overline{y_s} \right|$ большая, то соответствующая эмпирическая формула не пригодна.

Если значение $\varphi(x_1, x_n) = x_s$ не находится среди исходных данных x_i, то отвечающее ей значение $\overline{y_s}$ можно определить посредством линейной интерполяции

$$\overline{y_s} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \left(\overline{x_s} - x_i \right) + y_i,$$

где x_i и x_{i+1} – промежуточные значения, между которыми содержится $\overline{x_s}$ ($x_i < \overline{x_s} < x_{i+1}$).

<u>Замечание.</u> Функции 2–7 монотонные, и, следовательно, отвечающие им упорядоченные данные $(x_i; y_i)$ при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$ $(i = \overline{1, n-1})$ должны обладать постоянным знаком приращения $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $(i = \overline{1, n-1})$. Если это обстоятельство не имеет места, то зависимости 2–7 противопоказаны.

Пример 1.3. Определить вид эмпирической формулы, отвечающей следующей таблице:

X	*273*	*283*	*288*	*293*	*313*	*333*	*353*	*373*
У	*29,4*	*33,3*	*35,2*	*37,2*	*45,8*	*55,2*	*55,6*	*77,3*

Решение. Будем искать эмпирическую формулу среди зависимостей 2–7, имеющихся в таблице 1.2, согласно указанному рецепту. В необходимых случаях применена линейная интерполяция. Для удобства все расчеты по подбору эмпирической формулы сведем в таблицу 1.3. Так как

$$\frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{273 + 373}{2} = 232, \quad \sqrt{x_1 \cdot x_n} = \sqrt{273 \cdot 373} = 319{,}1,$$

$$\frac{2\, x_1\, x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 273 \cdot 373}{273 + 373} = 315{,}3, \quad \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{29{,}4 + 77{,}3}{2} = 53{,}35,$$

$$\sqrt{y_1 \cdot y_n} = \sqrt{29{,}4 \cdot 77{,}3} = 47{,}7, \quad \frac{2\, y_1\, y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \cdot 29{,}4 \cdot 77{,}3}{29{,}4 + 77{,}3} = 42{,}2,$$

то

Таблица 1.3

$\overline{x_s}$	$\overline{y_s}$	y_s	$\left\|y_s - \overline{y_s}\right\|$	Вид формулы
232	*53,35*	*50,5*	*2,85*	$y = ax + b$ – мало подходит
319,1	*47,7*	*48,7*	*1,0*	$y = ax^b$ – подходит лучше других формул
232	*47,7*	*50,5*	*2,8*	$y = ab^x$, $y = ae^{bx}$ – мало подходит
315,3	*53,35*	*46,9*	*6,45*	$y = a + \dfrac{b}{x}$ – не подходит
232	*42,2*	*50,5*	*7,9*	$y = \dfrac{1}{ax+b}$ – не подходит
319,1	*53,35*	*48,7*	*4,65*	$y = a\ln x + b$ – не подходит

Таблица 1.3 показывает, что согласно необходимому критерию следует остановиться на степенной зависимости $y = ax^b$.

Из эмпирических формул, содержащих три параметра

$$y = F(x, a, b, c), \qquad (**)$$

где a, b, c – некоторые постоянные, будем рассматривать лишь квадратичную зависимость

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \qquad (1.5)$$

(аналитический критерий рассмотрен выше).

1.5 Определение параметров эмпирической формулы

Если вид эмпирической формулы выбран, то возникает задача определения наилучших коэффициентов (параметров), входящих в эту формулу. В общем виде эта задача ставится следующим образом: пусть данная система значений $M_i(x_i; y_i)$, ($i = \overline{1,n}$) приближенно описывается формулой вида

$$y = F(x, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

где F – известная функция и a_1, a_2, …, a_m – неизвестные постоянные, число которых m обычно меньше числа точек. Требуется определить эти постоянные.

Будет рассмотрен один из методов определения параметров эмпирической формулы – <u>метод наименьших квадратов.</u>

Согласно методу наименьших квадратов, наилучшими коэффициентами считаются те, для которых сумма квадратов уравнений

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n}\left[F(a_1, a_2, \ldots, a_m, x_i) - y_i\right]^2 \qquad (1.12)$$

будет минимальной.

Отсюда, используя необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем так называемую нормальную систему для определения коэффициентов a_i ($i = \overline{1,m}$).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Если система (1.13) имеет единственное решение, то оно будет искомым.

1.6 Частные случаи

Укажем вид нормальных систем для определения параметров зависимостей 1-7.

1. Парабола $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a\sum_j x_j^2 + b\sum_j x_j + c \cdot n = \sum_j y_j, \\ a\sum_j x_j^3 + b\sum_j x_j^2 + c\sum_j x_j = \sum_j x_j y_j, \\ a\sum_j x_j^4 + b\sum_j x_j^3 + c\sum_j x_j^2 = \sum_j x_j^2 y_j. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Если ввести обозначения

$$P = \sum_j x_j,\ Q = \sum_j x_j^2,\ R = \sum_j x_j^3,\ Q = \sum_j x_j^2,$$

$$H_1 = \sum_j y_j,\ H_2 = \sum_j x_j\, y_j,\ H_3 = \sum_j y_j\, x_j^2,$$

то система (1.14) примет вид:

$$\begin{cases} a \cdot Q + b \cdot P + c \cdot n = H_1, \\ a \cdot R + b \cdot Q + c \cdot P = H_2, \\ a \cdot S + b \cdot R + c \cdot Q = H_3. \end{cases} \qquad (1.15)$$

2. Прямая $y = a\,x + b$:

$$\begin{cases} a\sum_j x_j^2 + b\sum_j x_j = \sum_j x_j y_j, \\ a\sum_j x_j + bn = \sum_j y_j. \end{cases} \qquad (1.16)$$

После обозначений

$$P = \sum_j x_j,\ Q = \sum_j x_j^2,\ H_1 = \sum_j y_j,\ H_2 = \sum_j x_j\, y_j$$

система (1.16) запишется так:

$$\begin{cases} a \cdot Q + b \cdot P = H_2, \\ a \cdot P + bn = H_1, \end{cases} \qquad (1.17)$$

3. Экспонента $y = a \cdot e^{bx}$. После логарифмирования равенства, получим

$$\ln y = \ln a + bx.$$

Следовательно, нормальная система запишется в виде:

$$\begin{cases} b\sum_j x_j^2 + \ln a \cdot \left(\sum_j x_j \right) = \sum_j x_j \ln y_j \ , \\ b\sum_j x_j + n \cdot \ln a = \sum_j \ln y_j \ . \end{cases} \tag{1.18}$$

С учетом обозначений

$$P = \sum_j x_j \ , \ Q = \sum_j x_j^2 \ , \ H_1 = \sum_j \ln y_j \ , \ H_2 = \sum_j x_j \ln y_j$$

систему (18) можно записать в простой форме

$$\begin{cases} b \cdot Q + P \cdot \ln a = H_2, \\ b \cdot P + n \cdot \ln a = H_1. \end{cases} \tag{1.19}$$

4. Степенная функция $y = ax^b$. После логарифмирования равенства получим $\ln y = \ln a + b \ln x$. Тогда

$$\begin{cases} b\sum_j \ln^2 x_j + \ln a \cdot \left(\sum_j \ln x_j \right) = \sum_j \ln x_j \ln y_j \ , \\ b\sum_j \ln x_j + n \cdot \ln a = \sum_j \ln y_j \ . \end{cases} \tag{1.20}$$

Вводим обозначения

$$P = \sum_j \ln x_j \ , \ Q = \sum_j \ln^2 x_j \ , \ H_2 = \sum_j \ln y_j \ , \ H_1 = \sum_j \ln x_j \ln y_j \ .$$

Следовательно, из системы (1.20) получим систему

$$\begin{cases} b \cdot Q + P \cdot \ln a = H_1, \\ b \cdot P + n \cdot \ln a = H_2. \end{cases} \tag{1.21}$$

5. Логарифмическая функция $y = a \cdot \ln x + b$.

$$\begin{cases} a\sum_j \ln^2 x_j + b \cdot \left(\sum_j \ln x_j \right) = \sum_j y_j \ln x_j \ , \\ a\sum_j \ln x_j + n \cdot b = \sum_j \ln y_j \ . \end{cases} \tag{1.22}$$

Обозначим

$$P = \sum_j \ln x_j \ , \ Q = \sum_j \ln^2 x_j \ , \ H_1 = \sum_j \ y_j \ , \ H_1 = \sum_j \ln x_j \ln y_j \ .$$

Система (1.22) запишется в виде

$$\begin{cases} a\sum_j \ln^2 x_j + b \cdot \left(\sum_j \ln x_j \right) = \sum_j y_j \ln x_j, \\ a\sum_j \ln x_j + n \cdot b = \sum_j \ln y_j. \end{cases} \tag{1.23}$$

6. Гипербола $y = a + \dfrac{b}{x}$.

$$\begin{cases} a\sum_j \frac{1}{x_j} + b\cdot\sum_j \frac{1}{x_j^2} = \sum_j \frac{y_j}{x_j}, \\ b\sum_j \frac{1}{x_j} + n\cdot a = \sum_j y_j . \end{cases} \qquad (1.24)$$

Обозначим

$$P = \sum_j \frac{1}{x_j},\ Q = \sum_j \ln^2 x_j\ ,\ H_1 = \sum_j y_j\ ,\ H_2 = \sum_j \frac{y_j}{x_j}.$$

Тогда

$$\begin{cases} a\cdot P + b\cdot Q = H_2, \\ b\cdot P + n\cdot a = H_1. \end{cases} \qquad (1.25)$$

7. Гипербола $y = \frac{1}{ax+b}$.

$$\begin{cases} a\sum_j x_j^2\, y_j + b\cdot\sum_j x_j y_j = \sum_j x_j, \\ b\sum_j y_j + a\sum_j x_j y_j = n, \end{cases} \qquad (1.26)$$

После обозначений

$$P = \sum_j x_j^2\, y_j\ ,\ Q = \sum_j x_j\, y_j\ ,\ H_1 = \sum_j y_j\ ,\ H_1 = \sum_j x_j$$

получим систему вида

$$\begin{cases} a\cdot P + b\cdot Q = H_1, \\ b\cdot R + a\cdot Q = n. \end{cases} \qquad (1.27)$$

Недостатком метода наименьших квадратов является громоздкость вычислений. Поэтому к нему прибегают обычно при обработке наблюдений высокой точности, когда нужно получить весьма точные значения параметров.

1.7 Порядок выполнения работы

а) Изучить краткий теоретический курс.
б) Подобрать вид эмпирической формулы для индивидуального задания.
в) Ответить на контрольные вопросы.
г) Оформить отчет по лабораторной работе, учитывая рекомендации.

1.8 Рекомендации по выполнению лабораторной работы и оформлению отчета

После изучения основных теоретических сведений, данных в настоящем методическом указании, студент, получив индивидуальное задание, приступает к его выполнению.

Рекомендуется выполнять работу в следующей последовательности:
а) построить точки, данные в таблице-задании на миллиметровой бумаге;
б) соединив построенные точки плавной кривой, сделать предварительный вывод о виде эмпирической формулы.

Если предполагается квадратичная или линейная зависимость, то необходимо пользоваться аналитическими критериями, данными в настоящих методических указаниях. Для всех остальных случаев необходимо использовать критерии, данные в таблице 1.2. Все вычисления рекомендуется оформлять в виде таблицы 1.3 (как при решении примера-образца 1.3). После того, как вид эмпирической формулы будет определен, необходимо приступить к нахождению параметров эмпирической формулы и получить значения a, b, c подобранной эмпирической формулы.

1.9 Индивидуальные задания

№ вар.	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	y	5,823	8,503	8,960	10,833	12,704	15,483	20,066	18,521	21,797	23,766
2	y	10,82	33,90	84,36	177,83	324,90	538,48	831,47	1207,92	1690,79	2285,97
3	y	0,172	0,118	0,112	0,092	0,079	0,065	0,050	0,054	0,046	0,042
4	y	5,47	11,61	22,21	49,09	109,29	243,70	544,12	1203,97	2679,86	5962,88
5	y	3,023	12,259	28,093	55,748	95,087	148,115	216,701	293,788	391,129	503,343
6	y	3,823	5,889	5,157	5,606	5,923	7,067	9,958	6,680	8,191	8,371
7	y	5,823	5,103	3,093	2,733	2,464	3,150	5,666	2,071	3,308	3,246

№ вар.	x	1	1,8	2,6	3,4	4,2	5	5,8	6,6	7,4	8,2
8	y	5,575	7,988	8,390	10,587	12,660	12,151	15,727	18,703	21,777	23,285
9	y	10,97	30,37	67,13	131,51	228,06	360,75	542,71	775,71	1066,89	1421,05
10	y	0,179	0,125	0,119	0,094	0,079	0,082	0,064	0,053	0,046	0,043
11	y	4,999	9,271	17,679	32,232	60,497	116,805	217,696	413,420	784,502	1485,436
12	y	1,775	9,015	19,934	39,254	65,808	97,793	142,454	195,635	258,517	329,887
13	y	3,475	5,442	4,937	6,017	6,854	5,031	7,239	8,806	10,440	10,484
14	y	5,575	4,619	2,692	2,865	3,045	0,711	2,502	3,719	5,051	4,828

№ вар.	x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
15	y	6,178	3,435	8,343	5,579	6,327	7,012	8,049	6,078	7,599	10,132
16	y	9,178	11,748	26,343	38,767	61,327	91,575	131,049	177,516	238,599	312,945
17	y	0,162	0,291	0,120	0,179	0,158	0,143	0,124	0,165	0,132	0,099
18	y	4,703	3,167	6,076	3,347	3,862	4,524	5,029	8,458	8,624	7,928
19	y	4,178	2,845	10,235	11,090	16,644	23,369	31,717	38,363	49,839	63,692
20	y	4,678	1,793	6,383	3,203	3,475	3,641	4,128	1,584	2,513	4,439
21	y	6,178	2,018	5,843	2,129	1,994	1,833	2,049	-0,728	-0,001	1,746

№ вар.	x	1	1,6	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2	5,8	6,4
22	y	*3,033*	*7,030*	*8,060*	*9,758*	*12,014*	*14,184*	*15,302*	*16,834*	*21,287*	*20,587*
23	y	*5,03*	*18,86*	*41,16*	*79,47*	*137,57*	*218,68*	*325,75*	*464,19*	*640,18*	*849,76*
24	y	*0,330*	*0,142*	*0,124*	*0,102*	*0,083*	*0,071*	*0,065*	*0,059*	*0,047*	*0,049*
25	y	*5,131*	*4,861*	*4,698*	*5,394*	*6,236*	*7,361*	*7,530*	*8,754*	*11,957*	*10,903*
26	y	*1,533*	*11,916*	*27,244*	*53,458*	*92,627*	*146,193*	*215,202*	*303,075*	*414,219*	*542,419*
27	y	*0,033*	*3,640*	*3,825*	*4,447*	*5,485*	*6,343*	*6,080*	*6,180*	*9,161*	*6,956*
28	y	*3,033*	*4,668*	*3,642*	*3,394*	*3,755*	*4,059*	*3,328*	*3,022*	*5,646*	*3,121*

№ вар.	x	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
29	y	*3,474*	*7,573*	*10,998*	*16,371*	*18,872*	*24,390*	*26,103*	*31,365*	*33,517*	*41,011*
30	y	*1,233*	*1,254*	*2,666*	*3,495*	*3,669*	*3,933*	*5,995*	*4,858*	*5,718*	*3,973*
31	y	*0,288*	*0,132*	*0,091*	*0,061*	*0,053*	*0,041*	*0,038*	*0,032*	*0,030*	*0,024*
32	y	*1,474*	*3,770*	*4,217*	*6,263*	*5,266*	*7,186*	*5,233*	*6,781*	*5,183*	*8,900*
33	y	*0,533*	*3,885*	*11,437*	*20,393*	*30,362*	*41,907*	*56,607*	*69,368*	*85,313*	*99,780*
34	y	*2,133*	*2,965*	*5,718*	*8,044*	*9,791*	*11,675*	*15,387*	*15,921*	*18,468*	*18,423*
35	y	*0,469*	*0,337*	*0,175*	*0,124*	*0,102*	*0,086*	*0,065*	*0,063*	*0,054*	*0,054*
36	y	*1,466*	*2,975*	*2,828*	*3,794*	*5,536*	*8,298*	*14,204*	*18,898*	*28,536*	*40,508*

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Построение графика эмпирической функции распределения, гистограммы частот, вычисление статистических характеристик непрерывных случайных величин.

2.1 Основные понятия

Статистическое исследование может осуществляться по данным несплошного наблюдения, основная цель которого состоит в получении характеристик изучаемой совокупности по обследованной ее части. Одним из наиболее распространенных в статистике методов, применяющих несплошное наблюдение, является выборочный метод.

Выборочным называют метод статистического исследования, при котором обобщающие показатели изучаемой совокупности устанавливаются по некоторой ее части на основе положений случайного отбора. При выборочном методе обследованию подвергается сравнительно небольшая часть всей изучаемой совокупности. При этом подлежащая изучению статистическая совокупность, из которой производится отбор части единиц, называется *генеральной совокупностью*. Отобранная из генеральной совокупности некоторая часть единиц, подвергающаяся обследованию, называется *выборочной совокупностью* или просто *выборкой*. *Объемом совокупности* называется число объектов, входящих в совокупность. В проведении ряда исследований выборочный метод является единственно возможным.

В результате первой стадии статистического исследования – статистического наблюдения – получают сведения о каждой единице совокупности. Задача второй стадии статистического исследования состоит в том, чтобы упорядочить и обобщить первичный материал, свести его в группы и на этой основе дать обобщающую характеристику совокупности. Этот этап в статистике называется *сводкой*.

Результаты сводки могут быть представлены в виде статистических рядов распределения. *Статистическим рядом распределения* называют упорядоченное распределение единиц совокупности. Статистический ряд, расположенный по возрастанию или убыванию вариант, называется *вариационным*. Статистические ряды распределения позволяют систематизировать и обобщать статистический материал. Однако они не дают всесторонней характеристики. Чтобы решить ряд конкретных задач, выявить особенности в развитии явления, обнаружить тенденции, установить зависимости, необходимо произвести *группировку статистических данных*.

2.2 Группировка статистических данных

Для проведения группировки выделяют группировочный признак или основание группировки. Чем больше групп, тем точнее будет воспроизведен характер исследуемого объекта. Однако слишком большое число групп затрудняет выявление закономерностей при исследовании социально-экономических явлений и процессов. Поэтому в каждом конкретном случае при определении числа групп следует исходить не только из степени колеблемости признака, но еще учитывать и особенности объекта и цель исследования. Одна из таких процедур основана на использовании формулы Стерджесса для определения оптимального числа групп: $k \approx 1 + 3{,}322 \cdot \lg n$, где n – объем выборки.

После определения числа групп следует определить интервалы группировки. **Интервал** – это значения варьирующего признака, лежащие в определенных границах. Длину интервала определяем по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значения вариант в выборке, k – число групп. Началом первого интервала берется $x_{\min}$. Прибавляя последовательно h, получают границы остальных интервалов: $x_1 = x_{\min} + h$, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h$ и так далее.

После этого строится ряд распределения. Для этого в первый столбец (или строку) таблицы заносят границы интервалов. Во второй столбец (или строку) таблицы заносят число вариант попадающих в данный интервал n_i – частоту. Если просуммировать все частоты, то должны получить общее число наблюдений (*объем выборки*): $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Если частоты поделить на объем выборки, то в результате получим относительные частоты (частости):

$$w_i = \frac{n_i}{n} \left(i = \overline{1,k} \right).$$

2.3 Графическое изображение вариационного ряда

Существенную помощь в анализе вариационного ряда и его свойств оказывает графическое изображение.

Для дискретного вариационного ряда в качестве графического изображения используют *полигон*. Полигоном частот называют ломаную линию, состоящую из отрезков, соединяющих точки $(x_1;n_1),(x_2;n_2),...,(x_k;n_k)$. Полигон относительных частот представляет собой ломаную, состоящую из отрезков, соединяющих точки $(x_i;w_i)$ $(i = \overline{1,k})$.

При обработке и отображении экспериментальных данных, в которых изучаемый признак может принимать любое значение из некоторого интервала, используют следующие способы представления данных: гистограммы; полигон частот; полигон накопленных частот (кумулята).

Столбиковая диаграмма, в которой основания столбиков, расположенные на оси абсцисс – это интервалы значений варьирующего признака, а высоты столбиков – частоты или относительные частоты, соответствующие масштабу по оси ординат, называется *гистограммой*. Гистограмма частостей является статистическим аналогом плотности распределения вероятностей генеральной совокупности.

Полигон для интервального ряда строится так же, как и для дискретного, но в качестве вариант используются середины интервалов. Полигон частот получается из гистограммы, если соединить середины вершин прямоугольников ломаной линией.

Преобразованной формой вариационного ряда является *ряд накопленных частот*. Это ряд значений числа единиц совокупности с меньшими и равными нижней границе соответствующего интервала значениями признака. Такой ряд называется *кумулятивным.* Можно построить кумулятивное распределение "не меньше, чем", а можно "больше, чем". В первом случае график кумулятивного распределения называется *кумулятой,* во втором – *огивой*.

2.4 Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения выборки называется функция $F^*(x)$, определяющая для всякого $x \in R$ относительную частоту события $X < x$, то есть $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}$, где n_x – число вариант, меньших *x*; *n* – объем выборки. Она является аналогом интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$ в теории вероятностей. Основные свойства функции $F^*(x)$:

1) значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$;

2) функция $F^*(x)$ – неубывающая;

3) $F^*(x)=0$ при $x<x_{min}$ и $F^*(x)=1$ при $x>x_{max}$.

2.5 Выборочные оценки параметров распределения

Следующим этапом изучения вариации признака в совокупности является измерение характеристик силы, величины вариации. Пусть x_1, x_2,..., x_n – выборка из генеральной совокупности.

Размахом вариации называется абсолютная разность между максимальным и минимальным значениями признака $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Средним значением выборки или *выборочным средним* называется число $\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ или, если даны частоты вариант, $\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$. Среднее отклонение значений признака от средней арифметической величины равно нулю.

Выборочной дисперсией случайной величины X называется число

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_B)^2}{n} = \overline{x^2} - \overline{x}_B^2 \text{ или } D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \overline{x^2} - \overline{x}_B^2,$$

где $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$ – средний квадрат ($\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$).

Показателем силы вариации выступает *средний модуль отклонений*: $a_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}_B\right|$ или $a_B = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left|x_i - \overline{x}_B\right| n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$. Простота расчета и интерпретации составляют положительные стороны данного показателя, однако математические свойства модулей "плохие".

Поэтому в качестве такого показателя используется *среднее квадратическое отклонение*. В статистической литературе среднее квадратическое отклонение от средней величины принято обозначать малой греческой буквой сигма σ или s. Квадрат среднего квадратического отклонения дает величину *дисперсии*. Таким образом,

для ранжированного ряда	для интервального ряда
$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_B)^2}{n}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$

Среднее квадратическое отклонение по величине в реальных совокупностях всегда больше среднего модуля отклонений. Соотношение $\sigma : a$ зависит от наличия в совокупностях резких, выделяющихся отклонений и может служить индикатором "засоренности" совокупности неоднородными с основной массой элементами: чем это соотношение больше, тем сильнее подобная "засоренность".

2.6 Генеральные оценки параметров распределения

В сравнении с другими видами несплошных наблюдений преимущество выборочного наблюдения заключается в том, что по результатам этого наблюдения можно оценить искомые параметры генеральной совокупности. Любой параметр $\overline{\theta}$, найденный по выборке, извлеченной из генеральной совокупности *X*, является подходящей оценкой параметра θ этой совокупности, если он удовлетворяет трем условиям:

1) $M(\overline{\theta}) = \theta$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} P(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1$;

3) $D(\overline{\theta})$ – является минимальной.

Параметр $\overline{\theta}$, удовлетворяющий условиям 1)-3) называется соответственно *несмещенной*, *состоятельной* и *эффективной* оценкой параметра θ генеральной совокупности признака *X*.

Выборочное среднее $\overline{x}_B$ является несмещенной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия D_B является смещенной оценкой для дисперсии генеральной совокупности. В качестве несмещенной оценки принимается величина $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$ – *исправленная выборочная дисперсия*. Соответственно, *исправленное среднее квадратическое отклонение* – $s = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma$.

2.7 Порядок выполнения работы

а) Изучить краткий теоретический курс.

Для данных, полученных в результате эксперимента и записанных в виде статистического ряда:

б) Записать значения выборки в виде вариационного ряда;

в) Найти размах вариации; по формуле Стерджесса найти оптимальное число интервалов, длину интервала и составить интервальное распределение выборки;

г) Построить гистограмму и полигон относительных частот выборки;

д) Построить график эмпирической функции распределения;

е) Найти числовые характеристики выборки $\overline{x}_B$, D_B, a_B, σ_B, s^2, *s*.

ж) Оформить отчет по лабораторной работе.

2.8 Пример выполнения работы

В результате статистических наблюдений некоторой совокупности относительно признака X были получены выборочные данные.

66	71	71	71	69	66	73	73	72	72	72	66	69	68	73
74	70	70	74	76	62	74	66	72	72	69	69	69	74	71
69	76	76	71	78	68	74	71	68	64	67	74	75	68	71
71	71	68	71	61	70	65	66	69	68	72	81	72	71	74
78	73	67	75	68	69	63	69	72	73	77	73	71	71	67
67	69	71	74	66	69	70	74	74	68	75	74	69	67	74
77	74	73	63	75										

1. Для данных задания составим вариационный ряд, то есть расположим их в порядке возрастания:

61	62	63	63	64	65	66	66	66	66	66	66	67	67	67
67	67	68	68	68	68	68	68	68	68	69	69	69	69	69
69	69	69	69	68	69	69	70	70	70	70	71	71	71	71
71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	72	72	72	72	72
72	72	72	73	73	73	73	73	73	73	74	74	74	74	74
74	74	74	74	74	74	74	74	75	75	75	75	76	76	76
77	77	78	78	81										

Обозначим через x_i варианты признака X. Из данных видим, что x_i принимает любое целое значение из интервала $(61;81)$. Следовательно, можно предположить, что X – дискретная случайная величина. Объем выборки $n = 95$.

2. Так как случайная величина X принимает много различных значений, то составим интервальное распределение выборки. Для этого найдем размах вариации: $R = x_{\max} - x_{\min} = 81 - 61 = 20$.

Для выбора оптимальной длины интервалов используем формулу Стерджесса:

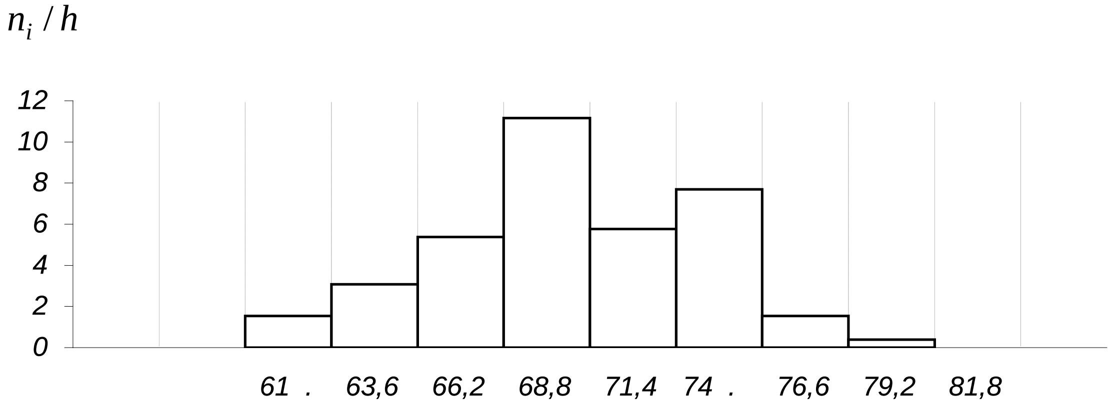
$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n} = \frac{81 - 61}{1 + 3{,}322 \cdot \lg 95} \approx \frac{20}{1 + 3{,}322 \cdot 1{,}978} \approx \frac{20}{7{,}57} \approx 2.6,$$

где n – объем выборки, h – длина интервала. В качестве границы первого интервала выберем значение $x_1 = x_{\min} = 61$. Границы следующих частичных интервалов вычисляем по формуле $x_1 + d \cdot h$ $(d = 1,2,....)$. Находим середины интервалов: $\bar{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Подсчитываем число значений результатов эксперимента, попавших в каждый интервал, то есть, находим частоты интервалов n_i. Далее вычисляем частости (относительные частоты) $w_i = \dfrac{n_i}{n} = \dfrac{n_i}{95}$ и плотности частот $\dfrac{n_i}{h}$ (для построения гистограммы частот). Все полученные результаты поместим в общую таблицу:

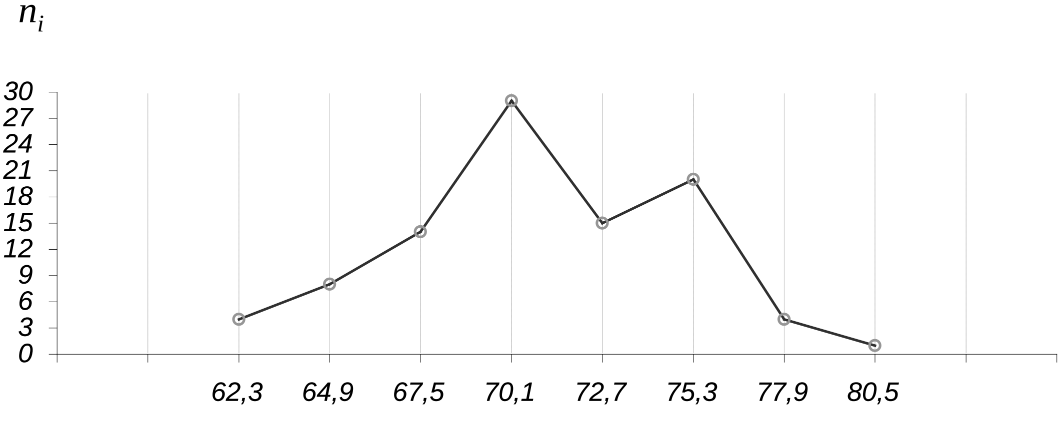
i	Границы интервала $[x_i;x_{i+1}]$		Середина интервала $\bar{x}_i$	Частота n_i	Относит. частота w_i	Плотность частоты n_i/h	Функция распред. $F^*(x)$
1	61	63,6	62,3	4	0,042	1,5385	0,042
2	63,6	66,2	64,9	8	0,084	3,0769	0,126
3	66,2	68,8	67,5	14	0,147	5,3846	0,274
4	68,8	71,4	70,1	29	0,305	11,1538	0,579
5	71,4	74	72,7	15	0,158	5,7692	0,737
6	74	76,6	75,3	20	0,211	7,6923	0,947
7	76,6	79,2	77,9	4	0,042	1,5385	0,989
8	79,2	81,8	80,5	1	0,011	0,3846	1,000
	Сумма $\sum$			95	1		

3. Построим гистограмму частот. Для этого по оси абсцисс будем откладывать интервалы $[x_i;x_{i+1}]$, а по оси ординат – плотность частоты n_i/h. На каждом интервале построим прямоугольник, высотой которого будет соответствующая плотность. Тогда площадь любого прямоугольника будет равна относительным частотам попадания в соответствующие интервалы.

Для построения полигона частот строим ломаную линию, состоящую из отрезков, соединяющих точки $(\bar{x}_1;n_1)$, $(\bar{x}_2;n_2)$,..., $(\bar{x}_k;n_k)$.Построим их:



гистограмма частот



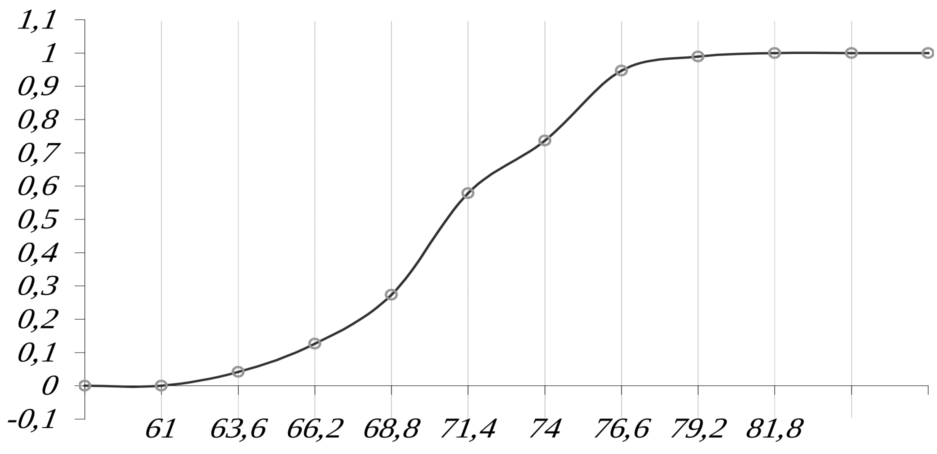
полигон частот

4. Исходя из найденных в таблице значений, напишем функцию $F^*(x)$:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 61.0, \\ 0.042 \quad при \quad 61.0 < x \le 63.6, \\ 0.126 \quad при \quad 63.6 < x \le 66.2, \\ 0.274 \quad при \quad 66.2 < x \le 68.8, \\ 0.579 \quad при \quad 68.8 < x \le 71.4, \\ 0.737 \quad при \quad 71.4 < x \le 74.0, \\ 0.947 \quad при \quad 74.0 < x \le 76.6, \\ 0.989 \quad при \quad 76.6 < x \le 79.2, \\ 1.000 \quad при \quad 79.2 < x \le 81.8, \\ 1.000 \quad при \quad x > 81.8 \quad . \end{cases}$$

Построим график эмпирической функции распределения (ступенчатая фигура):

$F^*(x)$



(Плавная кривая (или ломаная), соединяющая “невыколотые” точки графика $F^*(x)$, называется *кумулятой*.)

5. Вычислим выборочные оценки параметров распределения. Для этого расчеты проводим в таблице:

i	Границы интервала $[x_i; x_{i+1}]$		Середина интервала $\overline{x}_i$	Частота n_i	$\overline{x}_i n_i$	$\overline{x}_i^2 n_i$
1	61	63,6	62,3	4	249,20	15525,16
2	63,6	66,2	64,9	8	519,20	33696,08
3	66,2	68,8	67,5	14	945,00	63787,50
4	68,8	71,4	70,1	29	2032,90	142506,29
5	71,4	74	72,7	15	1090,50	79279,35
6	74	76,6	75,3	20	1506,00	113401,80
7	76,6	79,2	77,9	4	311,60	24273,64
8	79,2	81,8	80,5	1	80,50	6480,25
	Сумма $\sum$			95	6734,90	478950,07

Получим:

$$\overline{x}_B=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}x_in_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}n_i}=\frac{6734{,}9}{95}\approx 70{,}89\,;\;\; D_B=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2n_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}n_i}-\overline{x}_B^2=\frac{478950{,}07}{95}-70{,}89^2\approx 15{,}665\,;$$

$$\sigma_B=\sqrt{D_B}=\sqrt{15{,}665}\approx 3{,}96\,,\;\; s^2=\frac{n}{n-1}D_B=\frac{95}{95-1}\cdot 15{,}665\approx 15{,}832$$

$$s=\sqrt{15{,}832}\approx 3{,}979\,.$$

2.9 Индивидуальные задания

Вариант 1.

42,91	30,15	45,40	72,25	29,71	68,45	63,24	42,14	39,35	27,21
57,09	21,17	29,97	67,08	74,74	53,64	13,03	39,83	52,12	43,19
19,79	30,19	59,05	41,21	48,98	75,98	47,22	30,36	38,02	69,10
43,98	39,54	37,79	66,23	52,41	75,03	59,76	53,15	57,30	43,94
65,87	60,06	32,59	53,02	28,57	58,36	56,19	46,40	41,84	47,14
50,56	35,95	62,94	59,66	53,79	77,11	25,05	34,70	42,87	50,98
27,98	42,27	62,98	46,07	13,14	48,64	58,02	49,23	50,70	51,19
51,17	38,72	69,63	59,24	50,05	43,50	65,03	45,24	57,81	47,19
62,25	42,50	69,87	50,67	86,46	41,05	28,72	54,19	46,06	47,09
48,12	35,88	35,90	36,49	100,00	15,60	52,97	25,07	17,64	45,31
54,68	51,33	48,48	45,76	53,31	1,00	29,40	56,53	83,14	62,04
39,57	64,81	77,93	45,56	56,47	64,38	39,99	45,66	51,15	24,60
64,51	52,54	44,03	58,13	74,86	50,18	42,10	51,72	53,35	62,87
88,31	84,29	69,23	35,99	76,67	58,31	41,37	43,86	50,07	49,38
58,53	71,26	42,96	65,91	67,90	65,39	58,72	53,61	47,18	97,96
57,35	41,03	27,55	61,82	58,33	62,01	42,10	50,11	27,36	34,20
61,64	26,37	72,09	44,54	80,54	66,10	71,14	58,59	57,47	47,32
56,58	35,78	88,65	77,12	50,52	61,40	40,07	20,47	45,46	55,39
39,46	45,85	44,00	71,62	52,20	23,02	10,03	53,96	29,15	34,09
71,40	73,64	76,89	37,82	43,34	65,92	57,27	32,10	57,21	48,48

Вариант 2.

85,69	60,49	92,24	143,00	61,54	140,61	119,18	84,18	73,89	58,65
127,99	12,24	54,34	135,67	144,33	92,06	39,52	86,43	106,47	77,12
36,34	48,23	143,01	85,42	107,26	140,77	107,87	66,27	68,07	142,46
86,89	81,96	82,35	130,98	102,96	145,73	118,97	93,26	124,14	71,18
122,35	120,67	61,69	102,42	66,28	126,92	124,14	95,87	73,16	106,93
99,72	82,81	126,68	123,17	91,77	141,57	57,87	89,58	78,36	92,69
65,37	71,15	151,17	108,78	31,74	94,58	129,64	98,83	105,72	92,06
100,63	82,52	139,53	116,82	91,96	69,65	131,03	109,85	108,89	99,42
127,22	79,01	142,22	95,58	159,73	83,57	52,03	103,14	91,55	96,37
100,60	78,99	78,46	72,02	200,00	43,37	97,83	30,33	27,77	95,15
107,95	91,70	98,04	101,88	97,59	2,00	56,46	122,29	160,90	117,05
85,30	119,70	143,88	110,33	100,03	118,09	79,80	111,63	96,96	58,34
128,50	99,59	80,09	133,69	150,35	117,83	89,37	94,63	104,28	101,51
171,36	160,16	143,39	79,38	152,36	130,78	87,74	87,21	93,93	94,57

145,15	135,88	74,38	131,83	140,48	121,73	127,50	104,97	106,01	176,89
120,54	82,72	46,19	125,48	121,47	132,54	76,94	105,62	52,26	82,75
121,48	26,20	148,26	87,93	165,03	120,95	148,99	117,26	132,00	98,25
116,93	73,56	170,18	134,59	106,37	114,37	86,23	29,74	101,67	95,42
87,79	96,63	77,96	151,68	109,61	51,31	15,26	94,77	64,20	109,44
138,44	141,80	136,79	89,68	89,55	128,80	118,82	47,49	116,02	93,19

Вариант 3.

114,65	75,81	159,89	208,87	82,99	216,24	188,33	123,72	106,68	74,68
184,57	35,82	98,11	214,32	223,74	148,84	61,29	109,65	141,55	109,79
43,14	76,20	195,67	102,30	137,36	206,64	136,21	85,09	112,05	214,95
105,60	112,43	125,02	192,40	141,44	209,52	171,48	164,55	178,76	133,97
172,44	178,07	89,90	159,23	79,13	180,50	175,09	147,22	121,77	192,76
194,22	105,32	172,22	168,84	163,73	220,45	101,45	109,61	114,20	167,44
98,86	125,31	184,51	156,92	37,30	141,37	183,72	167,30	151,60	166,59
165,25	132,80	213,28	197,51	157,31	118,30	177,71	154,51	179,23	161,58
185,59	114,55	214,86	198,24	247,74	109,96	69,35	153,96	166,23	162,08
144,93	133,72	134,54	98,63	300,00	43,48	166,45	78,51	39,09	197,58
139,52	137,71	155,29	141,78	139,67	3,00	55,01	186,80	258,06	170,84
120,56	191,77	229,87	152,94	183,11	187,34	132,32	162,49	135,24	83,54
194,64	150,42	114,08	171,06	217,50	166,17	120,15	166,60	140,72	194,56
244,60	242,88	231,34	130,20	220,31	199,37	110,19	107,32	140,47	147,15
176,36	225,59	104,35	179,94	209,94	175,23	175,19	167,22	140,81	268,42
171,62	77,12	80,68	187,68	195,02	193,70	113,36	147,67	79,12	123,53
182,95	58,61	205,57	88,75	268,04	198,96	202,89	168,95	183,23	145,11
186,87	113,50	250,87	247,14	157,14	168,18	104,61	48,77	159,23	138,60
79,03	193,61	128,71	253,42	166,10	40,97	4,45	156,75	49,10	104,22
257,89	210,64	225,52	109,75	89,04	179,66	187,68	78,72	176,83	149,17

Вариант 4.

151,36	103,15	200,33	289,20	107,42	288,48	247,64	137,57	167,27	127,94
255,34	28,56	117,75	294,48	284,33	223,69	54,04	167,81	214,03	139,68
49,46	98,26	238,85	176,68	190,42	274,57	195,21	98,35	144,39	307,38
165,31	160,05	165,27	250,92	222,21	304,29	229,87	191,78	245,54	174,74
241,02	233,26	133,12	195,67	115,00	236,20	235,77	191,87	156,50	260,80
261,49	174,39	231,21	245,15	183,93	302,89	104,61	156,83	174,83	181,22
107,89	152,37	258,26	208,26	75,14	191,02	245,12	207,63	187,76	182,58
213,04	143,06	294,06	238,13	220,90	174,25	230,25	214,13	242,04	199,86
267,64	172,48	282,72	245,35	320,02	139,24	94,52	190,51	221,13	203,29
186,72	143,54	151,81	99,69	400,00	88,57	201,90	95,95	71,55	228,53
197,34	214,78	194,98	217,60	198,69	4,00	85,58	249,24	346,11	229,71
170,82	251,85	309,79	183,71	231,23	257,34	163,09	222,71	222,78	101,24
234,75	192,72	153,57	229,41	290,00	185,07	177,50	180,64	189,21	259,37
316,47	321,85	276,00	167,33	307,03	259,25	178,24	165,57	223,51	184,25
240,72	302,72	146,57	245,52	302,52	263,67	226,41	192,82	186,60	362,91
257,05	144,43	100,30	239,24	229,40	267,41	156,37	184,87	49,05	220,66
224,19	65,80	309,34	157,92	356,95	234,81	272,07	254,07	235,96	200,92
249,73	170,95	312,09	338,82	197,65	241,12	178,88	76,36	218,19	212,15
151,16	262,04	139,47	349,01	218,69	55,04	10,82	187,71	49,08	199,93

285,87	281,26	292,45	145,93	94,16	242,37	258,18	55,72	238,54	211,10

Вариант 5.

223,07	143,92	269,74	378,87	145,99	389,65	319,48	214,58	171,94	134,07
294,35	92,45	166,30	379,34	389,98	250,55	68,12	219,39	269,04	206,78
85,62	115,93	307,79	180,60	276,24	335,49	256,70	136,41	224,85	386,03
214,02	201,83	215,26	309,18	259,76	385,16	312,63	233,89	295,30	217,50
300,82	313,47	144,03	257,32	131,81	284,54	294,30	250,36	176,49	322,74
297,07	189,96	314,14	323,20	242,60	389,00	152,42	220,93	181,49	269,34
124,46	186,72	377,89	271,19	91,20	270,36	303,30	236,78	275,34	239,67
256,43	210,06	360,29	326,97	225,91	224,52	286,08	240,74	289,72	261,37
283,96	194,75	355,07	283,68	437,13	211,89	145,18	255,18	245,78	251,35
248,37	180,77	194,84	155,45	500,00	74,48	226,35	137,39	79,51	307,00
242,80	269,46	256,11	253,37	270,83	5,00	98,23	329,13	437,52	313,41
222,52	327,66	379,15	259,73	283,40	332,42	189,13	250,30	246,10	131,50
318,47	229,06	208,63	333,42	388,57	263,77	224,94	253,36	267,31	282,32
433,09	409,26	381,79	191,36	337,42	321,11	175,69	171,57	226,28	256,96
371,99	389,28	182,95	315,08	370,62	333,34	330,97	260,12	275,68	470,75
310,28	194,09	149,30	301,79	293,87	307,93	221,62	251,48	98,33	247,60
303,36	74,13	359,46	203,63	475,26	299,50	335,52	332,73	292,04	278,08
290,26	198,48	398,98	434,48	251,60	316,25	209,22	84,97	242,44	271,72
204,73	281,40	194,66	390,02	260,32	66,22	40,59	272,62	113,89	230,88
388,34	371,18	388,03	221,44	144,13	283,71	295,81	100,62	280,17	260,87

Вариант 6.

228,90	197,04	292,45	446,57	176,29	457,80	383,12	267,86	208,23	188,48
348,74	83,13	198,54	446,44	445,05	292,12	101,03	238,89	305,23	241,17
72,53	178,77	353,05	217,76	326,46	430,64	302,04	182,43	221,83	408,37
250,83	221,15	243,78	358,40	293,86	420,91	336,15	327,16	390,01	233,42
392,26	359,14	154,49	305,35	146,62	350,36	400,63	285,86	267,78	359,07
393,43	257,78	377,19	347,13	292,97	461,92	166,77	264,49	207,50	307,32
186,01	220,33	445,95	329,94	107,46	291,38	387,94	295,10	291,69	311,02
279,87	243,79	428,63	389,11	278,30	227,45	345,37	318,67	392,89	280,74
368,89	229,49	467,69	370,98	471,72	206,25	176,11	289,14	323,43	305,42
302,55	235,26	217,14	154,38	600,00	115,45	301,17	192,33	100,76	344,22
318,96	316,20	277,88	292,58	275,07	6,00	174,74	383,33	523,39	338,84
238,81	366,61	411,58	305,20	369,86	400,24	240,31	292,07	319,47	148,17
388,43	281,63	222,18	388,24	414,10	288,70	207,00	331,79	295,26	358,26
490,44	525,26	426,86	251,42	461,57	371,48	266,11	246,58	276,20	297,67
411,44	435,47	207,83	374,97	464,58	339,25	382,61	324,33	318,01	547,73
349,68	255,78	142,31	370,25	363,76	339,50	216,78	293,66	160,03	333,00
362,86	74,07	432,32	264,27	587,49	356,58	412,12	393,71	341,82	330,11
348,98	262,47	493,57	481,80	321,76	397,62	244,58	124,98	321,58	272,27
259,46	348,08	226,17	479,54	308,15	93,15	60,56	332,64	4,84	288,99
430,70	446,19	408,41	243,54	161,24	367,17	382,23	141,68	356,68	300,17

Вариант 7.

241,24	207,74	370,10	469,36	206,03	476,95	408,08	276,80	262,73	199,21
456,15	106,20	173,09	528,31	476,78	339,18	123,39	253,84	360,73	277,06
104,03	215,59	420,52	292,88	339,96	477,26	374,04	212,80	244,58	506,52

282,85	245,82	246,88	397,04	354,62	500,28	423,55	352,66	403,20	288,43
464,11	437,17	212,71	323,15	188,58	449,35	405,15	371,80	286,26	344,18
336,67	294,59	394,40	435,75	384,58	512,78	232,37	305,02	246,55	389,77
190,13	238,39	456,93	361,03	84,37	379,18	413,06	344,19	371,39	361,46
329,58	267,59	514,68	395,06	342,55	278,57	410,89	331,46	468,22	331,13
436,63	255,16	517,05	378,88	602,90	278,31	225,93	325,87	317,16	351,04
356,87	274,63	293,98	301,60	700,00	113,67	359,93	190,70	88,79	341,76
388,67	388,81	369,69	381,71	373,22	7,00	192,48	397,54	590,35	441,71
277,46	460,75	542,49	343,48	397,11	409,47	241,73	367,98	334,49	183,68
457,21	350,90	258,62	439,24	485,94	366,14	302,10	335,30	363,49	436,72
553,48	572,01	493,53	282,71	490,64	430,92	258,50	292,51	349,57	329,30
416,86	471,48	279,87	428,87	485,32	410,78	417,65	348,33	316,18	639,79
393,18	255,95	188,70	420,44	415,83	413,95	260,87	316,30	172,75	312,67
424,77	225,25	527,50	292,59	603,34	424,02	498,21	442,94	424,59	384,67
435,04	262,59	586,83	533,12	355,31	448,38	248,17	156,90	348,06	368,83
297,76	330,38	272,69	471,89	341,42	195,63	18,14	320,31	178,76	296,13
480,88	474,43	533,60	299,91	313,13	400,90	424,05	210,64	464,25	341,82

Вариант 8.

323,09	259,30	372,20	540,55	237,70	618,21	500,73	316,92	312,49	205,36
531,48	109,51	243,09	622,49	538,90	440,80	182,38	279,90	429,16	336,65
108,89	233,44	464,67	340,58	373,86	590,24	367,25	194,11	293,73	546,66
334,44	281,36	272,66	498,28	427,75	558,13	466,93	393,93	473,09	300,34
463,53	509,22	190,38	397,68	205,62	452,26	484,84	414,98	303,72	411,58
398,16	325,49	490,13	489,58	374,87	599,25	217,83	328,92	332,45	397,37
191,87	289,56	496,29	431,51	102,45	423,42	514,60	409,60	383,04	408,26
408,93	330,87	575,38	486,16	392,36	351,36	462,20	418,85	472,90	393,28
517,22	337,30	621,41	380,78	651,78	344,84	244,25	397,89	435,23	408,29
364,16	293,06	290,56	357,55	800,00	157,64	395,38	223,72	161,31	411,62
414,11	416,44	381,44	364,51	416,40	8,00	208,60	525,76	641,12	465,43
295,61	463,73	584,19	385,44	516,57	477,46	329,50	434,97	396,07	202,42
491,41	402,96	312,65	449,54	561,41	438,06	281,82	361,32	406,55	530,32
698,48	625,58	574,82	325,69	550,06	485,89	286,64	297,56	421,00	366,84
464,98	539,16	327,22	517,87	555,15	478,40	476,33	445,61	407,85	736,74
521,79	308,40	256,87	496,61	453,60	504,51	330,47	436,28	239,50	347,41
527,61	245,34	599,61	285,09	643,89	491,40	605,24	466,58	463,35	411,12
450,48	293,97	674,38	552,24	370,92	508,74	296,96	182,53	377,80	366,94
355,92	378,45	331,89	610,91	387,49	214,27	25,96	364,29	200,99	347,34
581,46	542,08	557,83	273,08	329,67	480,72	483,72	204,28	503,56	383,29

Вариант 9.

359,80	225,38	468,84	670,02	249,29	660,79	545,51	314,91	401,74	220,49
528,83	161,00	259,54	642,66	641,95	417,90	181,07	326,28	491,86	389,90
151,32	260,25	544,46	318,12	482,56	659,10	466,14	264,78	390,42	660,77
374,75	317,44	374,20	532,18	489,71	612,14	591,41	416,17	586,59	401,22
595,16	516,74	290,70	445,34	224,29	587,30	573,70	442,35	337,01	446,41
455,10	392,82	532,09	594,73	425,48	689,29	277,01	387,65	319,74	496,38
269,01	324,98	552,81	437,70	185,61	488,99	577,89	456,49	434,08	416,23
414,07	388,27	632,44	543,90	455,33	308,07	534,65	488,66	550,40	424,92

596,33	383,19	647,44	477,37	792,69	398,89	273,35	469,37	434,85	494,38
482,05	400,08	381,28	313,42	900,00	188,17	477,30	216,81	190,81	408,04
463,59	488,34	471,48	475,06	414,22	9,00	240,83	585,51	705,23	564,10
321,03	534,87	667,84	472,06	593,00	558,02	400,77	428,32	405,27	221,73
583,34	454,50	397,68	553,65	684,05	496,03	372,93	428,31	457,70	518,59
796,19	715,45	688,49	324,96	661,44	508,23	342,10	314,49	417,41	461,55
559,07	698,96	382,79	568,19	627,06	517,25	584,51	435,63	484,29	808,20
552,12	338,17	243,64	599,94	548,57	506,08	359,76	489,47	235,19	393,88
532,31	209,61	611,21	320,79	717,78	542,45	656,96	518,78	537,45	465,59
567,37	403,42	705,66	624,11	471,04	551,23	329,04	127,73	498,11	469,92
354,48	429,41	388,35	670,01	438,85	268,03	74,54	491,10	289,69	354,53
621,10	611,86	662,92	362,38	358,76	533,77	552,07	231,61	517,18	435,38

Вариант 10.

353,50	256,02	557,87	757,54	295,72	743,40	569,57	366,45	428,63	326,05
571,83	174,26	301,88	726,31	745,54	478,81	131,22	363,96	489,56	395,33
153,38	286,30	610,77	392,84	496,72	687,24	536,97	278,49	391,66	732,98
386,49	442,49	446,59	577,12	513,81	733,47	638,53	491,81	640,35	418,88
628,31	574,64	275,13	536,04	308,77	561,67	597,29	550,90	446,06	523,29
501,78	446,01	659,33	583,66	489,65	710,20	277,98	396,37	365,62	559,89
281,97	425,73	627,11	455,60	139,87	501,02	579,36	503,93	558,40	488,98
503,69	408,99	692,53	565,13	454,67	405,32	568,79	559,71	594,96	520,19
630,72	359,35	778,65	528,96	866,39	363,10	236,66	450,51	533,05	544,54
486,36	393,32	405,92	397,36	1000,00	123,32	532,82	269,97	190,59	451,71
541,03	476,55	546,84	555,22	470,96	10,00	287,15	618,78	815,41	653,91
415,32	639,26	731,65	464,47	581,15	592,36	342,35	465,53	530,73	322,19
662,91	483,10	341,13	612,14	674,03	522,07	340,84	502,66	511,90	603,58
805,23	852,83	738,78	431,67	739,56	663,70	342,08	420,14	544,53	537,78
629,05	680,49	383,06	571,53	753,25	658,58	661,40	474,45	555,68	932,16
638,24	372,39	308,14	591,30	660,94	640,18	387,26	546,05	331,88	389,70
615,16	301,94	699,25	395,38	817,72	565,05	702,15	651,22	643,31	551,13
631,85	393,17	806,02	673,34	511,29	607,57	416,27	222,75	519,20	466,62
347,13	496,22	412,41	671,96	497,08	261,87	79,53	551,05	286,24	371,79
768,77	754,83	776,02	394,85	390,97	665,34	560,20	255,63	578,05	509,14

Вариант 11.

47,84	36,36	61,49	81,29	35,53	80,84	74,88	54,02	44,14	35,26
68,42	30,94	35,11	85,50	87,41	57,57	31,67	49,02	58,68	45,40
27,20	33,69	75,54	45,41	55,61	86,10	62,25	36,70	54,83	79,33
49,01	51,55	45,98	69,16	62,45	84,90	72,67	57,44	66,96	52,02
73,82	74,45	37,54	61,09	40,41	66,60	67,16	61,34	52,28	56,17
62,23	48,77	69,69	75,18	58,69	80,71	35,72	48,33	51,00	60,91
39,20	51,52	74,89	55,24	29,86	56,14	76,27	62,85	65,38	60,05
59,15	45,66	80,59	76,96	61,23	44,74	73,71	56,14	67,03	59,46
74,49	54,84	81,66	59,37	91,75	54,27	38,94	62,24	59,74	56,77
62,71	46,89	46,38	53,83	110,00	27,63	56,02	37,58	31,32	57,61
56,06	59,00	57,31	59,11	59,52	11,00	36,71	69,78	94,98	67,43
45,65	75,76	83,54	56,48	73,90	68,09	51,59	55,95	62,61	33,71
75,06	63,89	48,61	73,88	78,46	56,48	53,64	56,61	63,94	69,48

97,13	94,02	87,72	53,48	84,79	73,27	54,42	52,33	55,00	57,59
74,95	85,05	47,88	74,93	79,41	72,17	67,15	62,64	59,30	109,43
72,95	50,02	34,40	76,79	68,25	68,12	51,84	60,55	33,56	53,81
76,57	38,40	81,27	52,05	91,11	73,85	80,13	75,24	68,83	60,78
74,37	44,93	89,63	81,82	57,95	70,63	50,32	22,14	64,95	62,64
47,21	63,53	50,22	85,39	57,90	39,47	11,62	56,86	33,49	45,92
80,89	86,79	80,91	47,79	45,47	71,13	73,74	38,69	72,99	57,45

Вариант 12.

94,13	63,38	121,65	144,04	56,99	154,74	135,97	89,49	89,05	56,27
138,21	38,36	64,39	147,28	162,62	113,81	44,98	99,18	119,28	78,30
48,88	67,16	141,85	88,84	115,08	164,51	107,52	67,96	96,85	144,44
81,61	84,28	82,87	131,09	113,36	146,70	125,89	108,50	136,19	96,19
143,90	128,70	64,41	112,40	60,43	137,98	143,59	117,28	99,13	101,64
103,28	91,30	138,82	143,16	104,71	145,25	68,03	98,66	95,89	114,90
70,48	79,11	138,45	102,53	39,36	119,57	142,24	112,65	109,22	118,93
119,54	94,87	150,51	123,06	114,57	79,52	140,21	115,12	124,73	112,69
126,12	82,38	156,72	103,30	170,21	79,88	60,64	116,70	113,81	113,82
120,43	89,68	91,85	95,16	210,00	34,18	120,04	61,98	54,22	121,11
105,80	114,25	117,74	106,76	101,80	12,00	61,72	132,47	171,08	132,39
97,11	133,06	150,21	117,02	126,71	138,58	85,44	104,27	100,41	68,32
126,52	107,09	96,87	122,62	152,03	105,87	98,41	102,15	107,94	140,63
181,38	166,69	145,47	99,31	144,42	126,40	81,09	93,66	100,04	102,61
136,05	165,46	81,54	135,09	156,97	142,58	127,97	107,20	114,75	188,32
140,15	83,11	72,28	131,14	127,02	124,06	80,62	118,88	76,28	83,44
136,16	60,22	144,81	90,22	181,73	140,36	150,58	127,65	138,62	114,19
134,06	92,49	170,37	147,57	120,09	126,70	94,52	34,17	102,01	104,17
86,58	117,43	80,93	146,98	110,69	62,53	28,75	118,64	64,09	88,06
160,69	161,18	145,53	87,47	85,01	135,70	127,22	65,53	135,10	116,61

Вариант 13.

113,04	86,27	150,71	225,23	100,72	241,76	188,01	130,59	131,94	90,02
206,63	66,94	87,21	225,87	233,68	154,13	51,31	125,75	166,47	123,26
51,85	89,74	198,98	136,37	152,63	213,10	161,11	100,24	130,14	216,41
117,22	117,17	117,33	181,43	160,90	226,41	186,17	172,60	191,71	113,35
190,09	210,23	102,03	148,18	106,91	181,21	190,22	154,33	127,73	165,73
156,58	140,30	208,07	197,15	150,62	234,85	98,93	139,80	130,35	167,53
93,65	141,66	185,50	165,99	58,00	167,09	179,85	171,15	150,03	146,03
176,86	119,74	240,54	208,85	177,82	124,68	195,60	161,84	179,30	155,77
181,56	133,02	224,28	159,59	275,97	131,40	82,58	170,19	160,60	167,89
149,45	123,28	136,98	132,11	310,00	49,05	151,70	97,03	66,82	169,37
151,29	168,34	152,69	177,79	161,09	13,00	91,00	194,22	247,52	179,12
122,42	208,41	234,07	159,62	190,88	192,03	114,11	155,54	172,13	85,64
199,05	149,92	131,82	208,68	242,69	153,64	115,80	169,46	177,64	195,85
245,98	273,84	218,88	138,21	214,51	197,05	144,67	143,26	150,10	168,17
196,17	240,40	140,74	188,67	233,34	181,21	184,84	168,52	170,60	294,52
204,75	130,30	91,50	203,55	204,05	184,79	131,22	153,71	102,94	131,02
197,42	83,56	216,82	127,88	245,39	205,59	221,89	185,98	178,87	174,35
178,48	115,63	253,66	222,48	152,37	208,33	121,07	51,14	170,11	152,75

142,21	147,92	136,82	237,39	145,80	109,29	25,47	166,81	93,51	124,61
220,12	214,43	243,09	114,39	124,82	186,66	178,18	108,63	190,57	166,32

Вариант 14.

162,96	108,17	205,29	313,45	117,45	289,05	266,65	167,09	147,11	106,53
265,40	84,79	120,71	285,71	283,71	226,95	66,94	169,45	208,31	186,86
75,94	132,43	240,01	147,36	215,38	317,90	211,25	145,17	182,15	308,13
157,54	152,95	167,43	274,82	226,67	309,08	266,90	221,15	235,11	163,68
257,92	260,17	121,49	226,38	145,65	249,86	264,01	230,95	188,33	228,80
231,48	153,66	247,79	259,60	228,47	284,95	118,20	156,17	159,73	219,98
145,55	187,24	257,98	190,17	83,69	206,50	236,94	222,00	225,27	198,18
214,00	166,62	316,41	273,60	197,91	186,59	245,88	230,33	277,78	204,19
238,18	188,06	288,36	212,58	363,11	169,04	121,24	215,40	215,43	210,59
198,77	181,27	166,65	154,15	410,00	71,48	203,77	133,29	64,31	225,85
222,85	199,80	213,05	207,48	211,38	14,00	113,97	243,93	326,29	270,14
164,90	254,91	298,57	199,18	234,84	264,22	170,26	198,54	197,14	138,57
238,01	212,62	159,12	247,49	285,37	201,83	170,51	192,42	210,56	266,67
346,07	358,02	279,51	151,57	306,05	252,29	160,95	164,56	204,05	207,31
234,48	296,64	181,86	264,96	304,66	246,54	262,10	233,77	225,08	376,19
265,10	158,46	113,83	263,35	271,40	241,78	189,91	191,47	104,08	155,92
252,11	119,63	289,89	184,98	343,48	244,61	298,64	257,84	252,29	195,10
268,37	172,03	349,57	292,72	221,29	275,83	158,96	87,85	203,15	229,46
159,77	227,34	163,95	310,98	205,25	120,94	57,87	196,55	112,10	171,56
287,18	282,59	283,52	171,69	157,75	267,29	255,80	127,88	247,73	225,11

Вариант 15.

192,83	142,87	258,21	381,89	151,21	363,21	298,69	202,00	199,79	134,77
311,08	78,67	167,71	388,31	399,49	267,08	119,60	185,29	280,19	213,45
109,55	172,32	344,57	226,55	245,14	398,53	240,86	126,78	225,95	373,68
211,47	194,82	207,42	343,05	238,98	377,53	333,20	262,78	307,64	197,91
307,79	324,05	169,44	278,38	176,26	300,39	294,50	286,82	212,48	261,30
243,14	204,08	336,06	301,39	241,33	386,65	127,60	222,58	213,23	287,41
156,61	197,11	344,04	288,36	102,45	261,19	342,67	238,07	255,32	252,77
237,47	220,52	395,27	315,19	267,24	196,08	290,42	276,65	308,09	288,81
342,33	234,48	362,85	245,69	411,10	209,16	152,78	239,80	246,99	257,60
274,90	189,42	185,68	188,21	510,00	110,99	270,36	165,64	113,76	235,45
263,13	287,21	259,96	270,40	289,94	15,00	131,91	320,76	435,96	301,30
187,84	306,12	370,87	242,40	305,79	305,58	221,89	259,02	282,73	160,38
308,06	278,82	218,49	329,51	352,06	242,22	185,61	273,76	258,66	313,39
422,00	417,46	345,35	184,87	396,35	291,32	193,46	219,96	245,01	277,55
309,50	369,65	202,23	320,62	375,42	320,11	328,91	280,98	244,75	481,53
343,15	185,66	158,43	339,52	316,95	293,94	211,07	281,38	131,66	220,79
320,29	142,92	365,04	226,24	425,56	293,50	391,12	321,51	296,74	286,87
305,61	228,07	445,62	352,30	288,61	309,10	207,88	77,15	275,10	274,94
208,33	254,37	195,74	372,13	270,26	147,24	57,21	244,33	164,92	194,68
348,23	391,43	380,75	203,77	184,98	300,66	302,81	168,08	333,96	253,54

Вариант 16.

259,98	186,16	338,77	461,12	164,49	446,90	395,03	253,35	229,75	188,47
350,06	110,91	203,39	428,40	436,14	335,52	86,08	241,65	324,53	247,34

98,76	199,84	400,25	227,24	324,46	441,47	341,02	172,45	266,90	425,37
231,84	231,60	250,25	348,32	291,35	430,95	374,94	336,14	406,39	272,33
370,08	395,97	198,68	307,57	172,22	396,86	350,55	326,74	278,98	334,76
307,47	231,50	353,59	396,70	343,14	436,08	151,63	268,89	250,33	318,71
206,85	261,66	374,14	313,18	137,17	300,33	379,04	320,32	299,21	297,91
317,34	256,41	450,89	383,87	287,10	269,55	405,27	305,20	370,81	317,52
405,88	233,45	438,29	322,81	487,27	215,86	187,05	315,68	292,33	312,04
299,61	267,60	236,73	266,58	610,00	146,52	329,34	183,72	141,41	328,01
311,08	308,86	297,14	290,49	314,26	16,00	188,40	362,10	520,47	384,63
270,74	405,06	471,23	282,30	409,00	396,59	260,43	335,94	313,36	212,81
399,15	295,03	272,99	360,48	416,26	302,47	277,09	320,71	301,18	392,84
520,45	531,47	473,72	265,70	452,08	396,81	243,97	221,19	292,76	341,76
359,93	452,42	236,21	407,14	431,64	373,34	373,64	286,70	298,63	561,33
346,62	255,55	169,98	396,05	350,01	368,05	215,73	296,70	207,73	222,92
402,04	184,52	468,88	230,37	506,17	347,93	465,50	389,35	394,74	293,84
389,71	259,45	493,61	476,62	308,61	373,84	233,59	118,52	283,45	295,57
267,70	289,05	225,22	463,72	317,56	196,76	64,30	333,39	207,81	223,12
462,37	462,78	477,47	225,76	276,65	358,41	394,99	149,68	399,92	294,73

Вариант 17.

297,21	200,71	327,62	479,59	171,56	504,36	415,76	306,16	270,41	207,55
450,69	109,68	215,49	490,54	530,96	391,64	99,25	273,24	381,94	289,58
146,45	235,87	442,46	259,38	344,30	503,19	329,20	199,71	270,21	529,56
290,04	255,95	251,83	413,44	366,50	488,03	477,36	371,27	419,09	310,81
456,88	470,06	192,52	354,51	207,92	456,30	404,93	356,34	256,77	385,75
325,06	253,59	462,05	421,69	377,09	516,00	173,75	294,78	249,93	376,39
243,61	314,18	456,24	396,53	104,61	344,15	438,17	384,57	376,51	377,38
347,19	296,14	509,41	474,10	392,91	266,54	423,42	380,25	407,64	351,48
450,74	271,38	535,92	360,37	593,67	268,23	220,18	366,05	369,19	375,30
341,77	309,03	317,11	324,79	710,00	105,62	398,42	240,21	152,98	357,41
335,02	374,72	333,81	327,55	382,05	17,00	193,29	464,79	617,55	450,29
248,32	465,53	531,76	386,26	437,78	458,53	296,00	391,88	396,80	211,84
454,60	382,60	278,37	420,05	523,44	331,24	248,02	337,00	368,90	473,44
557,52	581,73	535,52	296,94	532,58	450,38	254,44	285,22	367,99	349,06
434,79	535,79	301,21	409,09	493,67	455,56	455,37	346,69	351,45	670,98
441,40	296,82	233,49	452,15	475,78	412,43	258,59	329,51	207,04	284,65
474,50	183,82	518,46	300,17	626,78	470,21	548,11	438,84	420,24	392,37
473,57	249,63	607,18	526,90	354,62	430,40	319,18	104,20	371,25	335,09
255,56	397,97	303,52	539,21	383,98	206,14	69,66	338,46	185,47	275,08
536,28	520,49	531,94	280,56	297,03	418,02	430,30	202,64	427,93	400,31

Вариант 18.

312,72	258,45	385,34	619,17	270,76	577,25	482,66	337,12	366,69	272,89
458,52	159,21	255,41	587,00	625,41	421,61	139,07	331,59	412,86	328,24
167,35	251,27	493,41	324,74	418,40	559,66	383,17	197,30	366,87	617,28
344,63	351,71	312,19	527,21	411,41	586,65	458,88	434,86	512,26	352,33
534,44	463,70	235,07	420,84	198,06	518,87	477,62	455,27	339,38	451,72
455,87	330,57	543,21	507,89	425,76	550,90	239,74	298,51	364,36	391,86
195,52	321,70	483,46	415,84	190,17	423,90	541,35	386,68	374,15	391,98

438,08	339,38	595,00	516,04	374,59	318,08	522,56	445,51	538,36	392,84
483,54	288,59	569,12	395,82	712,27	358,24	235,90	391,38	397,36	449,12
405,83	320,81	288,04	351,95	810,00	159,46	382,62	254,15	114,93	372,23
380,54	406,80	384,57	431,12	448,05	18,00	232,24	543,79	669,12	513,47
310,02	534,98	583,98	396,53	460,88	460,76	365,83	457,13	391,34	269,79
462,11	390,76	358,63	503,10	627,76	405,14	330,89	429,10	404,06	536,21
712,38	660,64	614,58	334,48	548,26	477,20	342,09	361,37	394,56	396,71
520,70	598,59	324,60	492,56	617,17	483,89	482,89	397,67	438,33	805,62
540,11	351,04	219,98	544,50	475,97	488,10	303,16	425,23	209,33	310,90
518,96	264,32	596,40	348,01	712,87	511,36	549,98	509,87	505,55	428,51
481,33	308,77	675,55	563,02	388,14	481,82	315,20	184,36	373,29	450,48
345,98	380,20	359,30	560,85	382,74	240,44	50,85	443,02	240,83	327,57
611,28	606,95	622,22	351,39	344,95	468,78	529,37	208,79	502,45	449,38

Вариант 19.

356,59	281,86	443,27	634,58	271,66	624,97	578,64	326,78	322,52	258,62
608,58	161,28	315,30	692,89	695,27	507,11	150,47	400,83	440,02	405,54
161,84	305,88	609,85	377,34	488,23	668,68	452,22	229,38	404,87	628,17
317,36	402,54	346,80	545,57	470,76	661,60	556,69	512,15	596,51	393,95
573,60	567,39	296,17	442,10	312,43	607,01	601,29	487,38	328,94	512,58
501,65	327,03	544,31	572,30	415,82	690,93	277,26	353,10	381,34	428,96
290,15	408,79	525,84	423,48	146,59	501,62	588,01	507,85	481,88	489,46
496,22	391,36	656,08	530,83	496,92	405,79	569,18	495,14	563,26	437,36
570,42	376,46	635,26	478,38	747,62	375,07	271,53	513,13	490,15	422,16
496,26	387,35	393,47	348,17	910,00	139,54	447,41	266,26	156,61	467,83
417,01	486,20	439,39	451,57	457,04	19,00	284,91	562,49	759,96	582,29
316,81	564,18	690,85	513,92	530,59	597,79	403,98	434,45	457,30	238,86
602,30	504,86	414,07	612,42	707,52	438,23	379,14	455,02	500,87	606,71
763,50	742,38	615,46	403,55	626,01	563,28	411,51	373,99	505,41	498,74
588,22	711,95	404,48	516,01	682,92	606,07	602,85	425,92	510,07	839,19
609,73	338,03	260,93	518,49	531,52	539,94	343,76	505,79	295,33	387,59
599,15	236,70	667,70	359,30	770,00	563,04	694,21	555,37	567,64	492,84
531,96	383,84	776,97	631,59	473,53	532,20	380,98	131,99	511,12	456,99
376,08	443,57	364,53	673,13	461,44	270,16	39,45	458,73	282,92	388,58
668,49	698,31	702,65	400,94	369,18	525,90	530,54	257,70	611,87	465,48

Вариант 20.

363,15	315,33	530,71	728,56	315,27	700,70	618,35	387,98	434,70	348,27
677,16	134,29	278,30	745,95	782,68	564,51	230,96	449,74	480,87	431,13
232,77	253,26	667,66	388,13	524,01	786,91	564,00	326,81	391,91	767,59
456,80	382,82	352,60	635,20	499,84	704,30	582,45	503,72	668,06	353,06
638,93	601,67	304,75	524,80	241,56	662,10	660,60	490,12	429,20	478,50
561,20	409,40	601,43	638,12	492,67	778,89	311,62	404,59	432,51	511,23
285,34	380,26	586,78	506,99	195,06	548,62	600,34	561,24	561,45	511,03
552,61	393,49	761,28	579,52	540,69	367,96	673,70	467,45	671,29	479,88
665,67	351,59	719,17	526,04	840,49	435,39	248,77	521,22	536,85	507,85
476,63	457,46	406,46	381,21	1010,00	145,12	520,52	293,83	219,81	497,18
528,20	498,93	503,63	486,87	532,11	20,00	302,95	581,47	881,17	650,17
446,42	677,64	744,56	516,92	674,35	593,68	355,73	566,57	475,75	348,24

640,17	472,31	456,19	656,34	686,38	465,69	361,43	545,27	491,84	609,83
839,99	881,51	755,18	427,77	712,80	595,04	454,01	381,04	515,57	568,16
595,43	777,65	395,54	656,31	758,49	674,01	628,59	519,12	474,08	948,90
574,07	419,36	331,83	580,16	653,45	679,45	351,85	539,87	294,47	421,83
593,82	291,52	753,30	411,83	796,58	632,64	787,61	612,08	659,93	500,83
655,33	397,21	810,12	740,55	554,95	639,78	422,37	225,17	563,31	497,84
450,19	544,29	428,12	697,10	526,22	334,71	92,27	504,24	309,78	374,13
739,28	745,78	769,60	451,27	420,32	650,53	644,46	279,05	653,68	498,54

Вариант 21.

61,60	52,99	71,23	95,60	44,69	90,42	77,64	56,66	55,25	51,18
80,97	41,16	45,90	97,22	89,71	65,81	40,47	62,46	75,19	63,08
38,68	46,90	86,63	57,65	65,94	90,17	75,91	50,88	57,29	95,32
63,71	60,09	59,24	83,17	65,88	96,62	77,70	67,55	83,79	60,00
81,48	84,43	48,64	65,12	50,52	81,34	86,49	70,97	56,81	74,65
73,94	60,93	82,19	79,33	70,71	95,56	47,53	64,26	61,95	69,60
49,28	54,73	83,78	65,87	33,97	72,72	84,05	66,54	67,67	71,92
66,58	55,10	94,64	78,84	65,07	57,41	79,12	74,70	80,09	65,35
78,39	64,88	91,93	68,92	108,14	56,55	47,83	72,44	75,78	65,81
69,37	63,70	61,35	55,71	120,00	36,20	68,17	53,46	33,89	75,76
72,35	74,08	69,77	69,78	71,54	21,00	44,26	83,39	106,43	80,63
55,64	81,21	92,91	70,38	77,92	85,35	62,96	71,66	71,74	43,70
84,02	70,68	57,64	85,41	95,59	70,25	62,16	70,28	65,62	78,41
98,41	103,89	95,02	55,62	91,46	83,02	64,19	56,62	67,33	66,22
76,43	92,21	56,25	85,22	92,55	84,77	86,09	70,35	71,81	117,06
76,63	61,43	44,74	86,26	80,42	76,16	60,93	70,09	49,85	60,96
84,15	44,71	87,82	57,18	102,03	84,32	87,42	81,52	76,82	65,75
85,17	57,48	102,02	90,57	67,17	82,20	63,08	42,84	69,17	66,52
54,56	75,70	57,48	95,32	70,12	51,20	25,35	72,09	52,13	60,10
87,38	87,45	93,09	55,54	57,57	79,55	79,11	49,18	77,39	67,46

Вариант 22.

106,14	67,35	120,66	175,07	69,07	156,89	133,94	100,35	89,86	79,76
144,84	56,96	85,23	158,86	163,97	130,87	46,32	90,00	118,06	94,45
61,32	69,02	143,91	97,24	113,19	165,65	123,11	72,34	97,36	157,12
99,62	95,44	107,53	136,51	119,47	161,69	135,74	111,69	151,51	109,91
144,69	136,86	87,01	130,98	77,65	141,37	148,54	128,35	103,36	124,80
123,63	90,70	139,19	150,61	130,52	169,45	79,80	107,30	95,85	121,01
75,67	107,98	137,39	114,36	47,56	118,80	153,43	121,70	127,84	122,52
120,59	104,33	159,24	137,05	121,96	89,38	145,47	112,52	138,91	111,23
139,47	100,97	159,57	129,22	196,32	102,99	86,49	117,16	131,91	117,67
128,87	104,85	103,38	90,32	220,00	50,28	125,82	75,24	55,19	112,81
128,52	130,56	128,94	118,09	115,65	22,00	81,15	145,94	176,42	150,24
100,37	133,05	167,98	125,05	140,81	145,96	99,77	128,31	119,60	70,48
135,19	118,08	104,18	152,33	161,70	120,16	92,59	119,29	112,88	152,49
194,93	182,99	164,46	106,92	168,03	148,12	90,50	101,88	124,15	119,67
133,49	156,73	90,10	147,12	173,25	146,30	137,12	129,56	122,84	203,59
140,03	103,74	72,28	147,41	153,84	146,22	104,23	118,34	71,42	92,52
132,17	69,19	172,56	90,13	196,67	149,83	164,23	145,96	151,63	120,09

148,23	91,56	197,62	174,13	120,64	152,83	105,35	47,41	128,59	112,45
96,85	126,72	103,92	169,86	122,26	66,85	41,48	115,17	69,28	99,52
159,15	164,24	161,88	104,72	90,03	152,70	140,41	85,54	148,17	123,65

Вариант 23.

132,66	104,42	157,31	222,86	116,54	223,32	209,42	127,40	152,77	105,64
206,59	66,23	93,71	250,21	223,45	183,53	69,95	147,06	184,94	148,23
82,46	104,16	199,77	139,04	178,26	245,63	158,65	116,75	127,91	244,11
124,83	139,62	135,30	201,00	164,54	249,29	192,37	162,30	219,83	123,25
213,26	206,53	107,22	185,57	101,77	207,33	204,24	183,02	122,52	186,04
166,74	123,14	219,06	214,40	178,64	244,88	89,19	144,30	126,54	179,33
97,66	145,12	202,62	161,33	69,87	179,51	196,73	186,97	186,47	157,56
179,52	132,13	247,69	206,02	161,47	140,38	207,90	169,74	214,49	156,01
202,87	142,05	243,44	169,95	267,83	141,70	100,73	163,77	171,78	181,26
159,37	151,85	153,08	134,67	320,00	57,74	180,89	99,39	78,31	156,22
180,00	166,05	160,31	161,13	186,63	23,00	100,53	215,12	274,57	208,33
126,08	207,92	253,11	160,08	192,25	191,94	140,09	166,38	177,41	99,29
192,46	176,26	151,49	210,76	235,97	178,23	131,46	159,07	185,77	205,79
284,93	264,58	240,24	145,53	231,22	220,27	129,46	143,90	171,64	161,52
198,04	239,56	128,76	189,02	230,90	189,89	210,40	175,34	178,12	305,40
199,34	143,87	121,67	220,07	211,14	202,29	143,11	165,23	94,18	125,49
193,60	112,96	245,06	150,10	254,97	191,04	242,67	217,21	209,53	179,03
188,44	141,26	281,82	236,08	170,21	209,61	152,15	80,70	164,82	179,19
151,46	167,63	128,56	227,38	180,35	101,39	41,74	177,23	90,92	136,06
247,22	253,51	251,95	132,48	123,14	211,90	192,90	106,60	217,04	155,35

Вариант 24.

190,78	148,72	210,48	304,48	115,11	294,71	250,29	185,70	189,21	131,37
261,02	96,38	130,45	297,00	294,34	209,81	68,66	178,71	231,38	169,50
84,69	127,22	273,15	164,08	228,68	305,07	224,68	135,91	167,34	316,16
195,94	161,12	185,39	286,38	206,23	309,49	280,22	236,43	261,22	173,71
279,59	249,30	147,25	202,94	150,70	260,47	262,18	234,09	173,16	232,65
217,85	190,51	277,11	268,20	218,51	309,18	113,24	194,54	182,24	226,54
143,41	196,98	247,37	241,54	76,97	225,81	266,44	214,49	224,14	212,59
227,44	166,81	331,82	246,41	223,68	173,90	261,74	227,36	265,20	222,83
279,98	194,11	310,75	203,95	359,50	187,94	128,20	211,33	224,76	233,00
221,92	181,37	184,84	170,28	420,00	94,99	220,46	133,48	71,46	222,89
219,92	218,53	229,11	219,01	231,35	24,00	147,61	257,33	345,71	276,17
178,80	258,02	325,82	219,53	268,80	284,45	175,61	215,71	209,13	144,36
286,52	216,01	196,54	271,56	307,61	228,18	156,89	242,42	200,21	247,83
340,17	345,06	288,37	169,45	310,07	257,41	187,69	174,04	214,33	227,99
255,24	288,86	191,04	284,76	317,19	274,48	273,93	225,16	216,91	417,81
244,39	182,68	128,34	259,65	246,32	274,60	188,24	218,06	148,02	199,06
258,74	118,11	290,36	160,79	375,42	244,34	315,72	272,10	277,17	236,77
247,25	161,95	357,03	305,48	227,72	273,53	182,83	82,21	243,19	223,47
158,29	206,65	170,62	323,93	221,15	155,14	45,27	243,06	130,24	174,52
325,72	308,49	294,09	189,45	193,73	256,62	268,44	115,77	252,84	232,52

Вариант 25.

243,39	148,08	273,77	399,28	148,85	373,60	331,73	198,68	222,04	167,86

313,48	118,73	174,49	406,68	374,04	272,72	86,53	193,25	268,76	230,59
131,21	177,37	323,94	242,19	270,17	358,77	246,75	179,77	194,25	355,89
226,55	228,50	195,51	339,19	280,77	385,40	321,31	258,24	311,48	243,67
324,21	332,41	186,26	297,86	168,70	307,66	349,60	247,08	200,56	280,55
263,76	197,37	340,98	304,27	251,59	389,51	172,55	227,89	192,81	271,54
166,56	203,69	354,99	297,12	117,01	273,63	314,69	299,19	261,89	245,49
270,63	202,24	368,86	344,34	295,94	234,76	335,02	292,19	306,08	272,86
321,43	199,07	376,14	260,11	428,81	235,47	188,91	297,98	295,92	267,39
270,94	212,64	197,65	237,86	520,00	128,69	281,92	148,52	133,86	246,16
288,56	290,84	260,74	259,62	260,72	25,00	183,37	347,89	415,18	340,10
207,82	344,20	380,55	264,36	302,67	310,70	226,83	270,21	269,52	141,08
301,91	284,78	239,29	317,57	380,40	298,77	214,31	269,95	290,36	353,24
412,90	419,20	366,92	227,00	404,29	300,30	214,87	234,65	283,96	249,17
320,72	403,14	222,61	339,47	397,22	332,56	305,56	279,95	265,69	470,49
337,45	221,32	135,81	332,83	318,24	328,84	239,57	299,40	175,93	243,48
325,87	135,99	367,99	242,73	455,24	340,73	389,53	339,29	331,00	245,52
349,35	197,54	464,03	384,48	253,95	326,49	241,67	88,45	257,36	273,60
190,24	254,75	210,50	380,04	256,07	160,12	33,12	268,90	150,89	220,24
369,71	387,46	372,61	198,32	204,26	338,31	324,54	172,83	331,31	290,34

Вариант 26.

253,80	158,54	331,76	425,25	191,98	476,72	383,18	273,92	228,27	197,22
411,43	150,67	178,97	446,28	457,83	331,92	141,34	230,51	318,75	289,87
124,77	207,41	402,92	246,30	355,90	468,87	353,89	182,26	257,64	462,47
264,92	258,83	270,43	413,90	349,92	484,66	391,06	353,51	357,48	224,20
400,26	394,17	209,37	342,43	168,78	398,90	376,86	294,14	288,72	301,22
347,43	265,40	360,04	405,37	355,26	438,39	221,37	259,39	289,29	335,83
174,47	270,88	359,66	314,99	105,10	321,01	376,52	344,29	325,19	306,72
343,19	258,96	475,25	409,48	312,72	268,52	386,30	311,46	388,70	339,77
390,62	242,39	484,47	309,37	494,39	256,25	208,82	311,09	296,49	320,34
338,07	276,31	249,81	278,65	620,00	153,92	314,37	190,08	157,04	341,04
309,60	316,51	314,74	291,77	320,43	26,00	218,79	375,35	527,35	398,17
233,48	375,24	477,44	298,54	388,16	413,84	289,35	319,44	341,73	169,77
415,29	294,87	238,86	411,46	442,37	336,49	241,55	350,30	350,33	371,24
503,92	531,85	451,04	244,74	480,34	364,35	261,36	241,38	349,65	350,62
378,79	471,00	270,11	382,74	467,38	410,52	387,64	344,07	318,79	559,04
368,89	231,54	177,79	403,15	374,73	373,45	267,69	349,15	188,46	255,14
385,87	185,41	458,08	227,70	516,49	370,46	431,77	381,91	394,52	321,91
407,98	267,35	490,50	483,34	332,06	395,81	263,46	95,06	342,34	301,52
270,09	319,10	282,45	434,63	347,97	198,64	80,75	321,24	217,88	275,59
438,62	453,35	471,86	265,13	280,28	404,41	404,26	161,15	381,58	325,23

Вариант 27.

317,83	254,78	385,29	519,43	190,53	518,92	419,45	261,40	325,42	226,76
426,95	123,64	239,66	560,48	526,80	356,40	149,90	264,49	342,53	300,30
124,56	240,10	462,28	311,51	355,83	496,28	366,88	251,81	277,49	496,03
265,49	286,72	317,29	459,83	357,25	517,66	419,64	359,46	446,59	296,80
430,89	480,96	199,17	395,07	244,15	454,04	467,81	341,53	295,94	396,88
362,99	312,61	446,78	470,67	386,86	541,34	210,61	290,42	324,74	367,73

200,45	274,49	450,28	356,86	122,08	387,23	422,28	407,59	410,83	371,90
391,81	311,34	537,42	416,78	349,64	291,07	484,91	409,12	443,79	394,07
485,33	268,13	506,51	405,91	632,33	275,02	216,89	392,26	386,86	402,21
360,51	334,30	258,84	276,99	720,00	152,58	395,35	209,38	119,96	408,18
370,50	383,65	367,14	380,83	372,51	27,00	214,68	454,35	627,89	421,22
280,79	439,32	495,15	335,75	421,85	465,71	271,92	348,11	396,15	250,92
484,24	382,92	293,57	417,78	508,95	355,06	268,32	396,91	377,12	458,83
603,05	590,65	552,80	315,16	529,28	458,75	261,16	319,05	406,13	376,33
425,15	504,01	266,24	470,49	559,62	424,14	481,69	398,00	338,69	710,80
436,78	329,70	200,01	486,98	484,50	436,95	262,04	406,49	183,88	258,58
471,72	235,67	562,06	333,76	608,06	417,03	501,48	467,65	469,92	338,74
478,36	297,89	590,37	561,95	352,66	436,75	281,28	110,63	391,98	368,91
316,32	404,74	260,55	556,09	365,98	225,25	75,72	392,00	181,02	276,70
522,97	549,04	517,78	275,72	314,23	487,24	429,11	190,81	413,22	351,75

Вариант 28.

315,02	274,48	389,13	580,66	242,28	633,16	475,30	328,94	319,82	251,51
486,39	203,92	217,97	598,51	615,08	439,18	143,39	338,46	402,32	360,23
127,74	284,47	535,38	309,57	465,71	642,41	442,82	283,37	371,31	638,36
356,90	298,45	373,94	530,30	392,75	575,03	489,82	388,26	542,56	351,43
497,18	549,68	216,33	445,84	236,88	509,08	500,01	384,60	379,28	413,44
422,30	309,81	485,96	469,00	414,52	627,49	216,37	330,15	326,02	426,84
272,09	329,97	541,36	432,79	155,81	438,08	551,48	405,96	463,12	426,31
420,07	356,01	614,76	501,12	456,46	351,79	525,62	426,19	477,63	414,88
555,27	350,80	624,45	440,82	707,38	375,29	273,08	451,53	418,68	466,33
466,67	365,65	314,20	367,07	820,00	145,61	451,72	265,87	191,59	409,51
442,05	381,01	415,48	463,80	457,96	28,00	261,23	471,00	722,30	482,38
342,10	545,24	626,32	439,81	550,84	483,87	296,97	435,44	386,59	285,58
487,02	385,02	348,83	492,59	576,81	389,48	312,61	413,72	429,53	493,81
699,35	665,53	631,61	357,90	590,60	479,97	308,07	309,79	455,09	435,52
486,16	613,21	329,00	518,68	614,82	486,73	489,68	426,24	437,95	810,24
505,19	371,27	231,15	527,90	468,04	480,28	293,17	430,37	254,57	350,90
471,04	217,30	619,20	379,37	705,21	505,24	583,13	522,27	503,11	443,69
530,54	313,44	678,60	599,53	389,50	548,65	307,48	144,02	407,74	437,61
350,98	448,18	377,06	618,32	407,38	217,98	31,15	408,91	211,42	360,08
609,19	565,84	577,56	323,56	319,86	543,09	529,90	284,29	533,45	418,96

Вариант 29.

353,20	242,52	467,70	675,98	237,21	665,86	608,66	332,16	414,73	251,03
620,89	171,53	270,13	628,17	669,94	445,41	217,50	395,98	449,55	357,12
158,01	255,29	586,45	410,71	483,03	633,54	518,34	268,02	371,80	686,14
357,88	372,40	378,08	568,58	433,25	651,50	572,97	482,58	571,91	336,94
608,51	546,23	324,49	457,97	302,97	554,06	569,74	506,34	365,68	499,41
465,90	401,93	528,62	524,32	466,73	664,40	308,45	376,70	353,46	509,45
293,45	365,80	556,26	522,87	196,71	469,67	607,46	488,47	492,68	501,64
501,18	398,13	707,33	527,42	447,69	380,30	537,13	426,35	600,83	425,66
558,05	350,85	703,98	503,83	736,45	364,83	272,87	434,02	471,18	429,08
439,72	360,64	349,76	404,53	920,00	166,27	463,40	295,25	216,44	505,21
451,11	514,63	471,68	503,51	430,29	29,00	229,21	538,98	740,33	574,41

361,15	545,67	686,92	480,12	565,24	560,92	396,83	498,24	490,75	308,80
586,78	454,84	373,61	598,16	663,56	433,84	386,28	483,63	496,67	548,00
804,02	757,74	694,37	357,72	627,77	606,66	350,73	369,07	523,16	519,46
551,90	663,37	370,94	580,24	702,20	556,44	536,86	461,21	434,05	878,94
573,25	388,81	245,35	551,45	530,44	597,81	416,35	471,35	271,82	391,33
555,48	232,85	707,14	400,87	759,88	565,30	673,91	579,40	525,59	485,83
538,75	340,50	729,06	663,43	474,72	540,55	417,21	151,98	488,59	523,29
331,10	480,94	404,99	702,85	464,53	285,42	38,75	497,99	230,78	343,25
675,36	688,10	663,77	359,81	400,71	550,96	610,22	230,77	556,01	469,63

Вариант 30.

451,17	344,59	494,44	766,27	344,02	751,46	598,06	466,97	447,51	313,68
649,91	216,14	336,86	695,89	706,47	528,73	152,71	423,97	575,20	416,54
185,36	353,34	654,22	459,18	571,16	732,05	485,95	314,52	406,63	769,43
367,30	370,04	404,53	591,79	492,07	715,93	608,51	542,64	581,64	385,19
690,00	666,13	298,43	502,00	261,04	634,68	663,23	529,24	392,31	531,69
486,46	430,74	613,08	653,33	493,75	716,45	339,67	447,29	386,10	524,93
280,30	450,00	664,28	480,36	195,74	539,38	668,03	535,67	539,14	555,54
576,79	454,57	753,74	592,37	563,11	434,21	631,42	473,64	624,78	474,71
633,21	459,62	771,04	523,23	860,96	457,32	254,63	562,55	507,09	540,65
506,85	422,69	464,70	398,32	1020,00	192,76	545,22	283,34	207,72	575,83
577,13	505,90	556,62	540,82	514,52	30,00	330,50	581,87	882,80	582,16
397,08	669,74	777,75	513,75	625,81	603,54	395,70	486,78	576,30	259,66
585,27	530,66	367,04	683,15	760,09	548,68	436,55	573,39	544,02	641,44
903,65	858,77	794,43	437,54	697,00	630,06	410,74	445,26	476,20	569,80
649,08	702,23	369,91	645,98	705,64	581,72	668,40	542,27	507,50	1004,78
591,43	366,73	287,43	615,12	652,21	600,31	462,31	475,93	290,16	427,24
678,81	340,34	768,95	403,07	847,10	656,27	696,22	629,21	630,21	570,49
615,04	430,52	826,41	699,08	487,81	635,83	467,31	156,12	486,30	482,74
402,98	520,02	361,23	707,13	527,35	261,36	90,82	527,06	292,07	430,80
697,89	766,24	714,55	402,35	461,99	616,94	642,58	330,66	616,04	538,01

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

3.1 Постановка задачи

Предположим, что для оценки закона распределения исследуемой СВ X из генеральной совокупности с неизвестной функцией распределения $F(x)$ извлечена выборка и пусть по виду гистограммы или полигона частостей можно выбрать класс функций определенного вида (нормальных, показательных, биномиальных и т.д.), к которому может принадлежать функция распределения вероятностей исследуемой СВ X.

Тогда необходимо произвести оценку параметров внутри выбранного класса функций. Например, если выбран нормальный класс функций для описания исследуемой случайной величины X, то по выборке x_1, x_2,..., x_n требуется оценить два параметра – математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ, от которых зависит нормальное распределение.

Пусть из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x;\theta)$, где θ – неизвестный параметр, произведена выборка объема n и получены результаты x_1, x_2,..., x_n. Вообще говоря, по результатам выборки, какого бы большого объема она ни была, нельзя определить точное значение неизвестного параметра θ, а можно найти его приближенное значение θ, которое и называется оценкой.

Задача оценки неизвестного параметра θ сводится к нахождению таких выборочных функций $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые можно использовать в качестве оценки неизвестного параметра θ.

Так как любая выборка является конечной и случайной, то будем рассматривать оценку $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ неизвестного параметра θ как случайную величину, а ее значение, вычисленное по данной выборке объема n,– как одну реализацию случайной величины, т.е. как одно из множества возможных значений этой случайной величины.

Оценки параметров подразделяются на точечные и интервальные.

3.2 Точечные оценки параметров генеральной совокупности

Точечная оценка параметра θ определяется одним числом $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

Прежде всего, с точки зрения точности и надежности оценок желательно, чтобы найденные на основании выборочных функций $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ оценки неизвестных параметров по возможности были тесно сконцентрированы около значений оцениваемых параметров, другими словами, чтобы рассеивание случайной величины $\hat{\theta}$ около θ было по возможности наименьшим.

Оценка $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *состоятельной*, если при увеличении числа измерений оценка сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon) = 1$.

Требование состоятельности гарантирует от грубых ошибок ε в определении θ при достаточно больших n.

Оценка $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т.е. если $M(\hat{\theta}) = \theta$. Если это условие не выполняется, то оценка называется *смещенной*.

Состоятельные или несмещенные оценки могут быть получены различными методами. Например, две оценки математического ожидания –

среднее арифметическое $\bar{x}_B$ и выборочная медиана $x_{мед}$ – являются несмещенными и состоятельными оценками. Из этих двух оценок целесообразнее выбрать $\bar{x}_B$, так как дисперсия этой оценки меньше, чем дисперсия выборочной медианы.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки *n*) имеет наименьшую возможную дисперсию.

Таким образом, выборочная средняя $\bar{x}_B$ является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой генеральной средней $\bar{x}_Г$.

Выборочная дисперсия D_B является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_Г$. Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить D_B на дробь *n/(n–1)*. Сделав это, получим исправленную дисперсию, которую обычно обозначают через s^2: $s^2 = \frac{n}{n-1} D_B$. Она и является несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии: $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}$.

3.3 Интервальные оценки параметров генеральной совокупности

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками. *Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по результатам выборки объема *n* статистическая характеристика $\hat{\theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ является точечной оценкой неизвестного параметра θ. Чем меньше разность $|\theta - \hat{\theta}|$, тем лучше качество оценки, тем точнее оценка. Таким образом, положительное число ε характеризует точность оценки $|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon$.

Точность ε зависит от объема выборки *n*. Каков должен быть объем выборки *n*, чтобы обеспечить заданную точность ε или как определить точность ε при данном объеме выборки? При ответе на эти вопросы можно лишь говорить о вероятности $1-\alpha$, с которой данное неравенство выполняется.

Доверительной вероятностью оценки или *надежностью* называют вероятность γ выполнения неравенства $|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon$. Вероятность $\alpha = 1-\gamma$ называется *уровнем значимости*. Обычно доверительная вероятность оценки задается заранее. Наиболее часто полагают $\gamma = 1-\alpha = 0{,}95$; $0{,}99$; $0{,}9973$. Таким образом, $P(|\theta - \hat{\theta}| < \varepsilon) = \gamma$ или $P(\hat{\theta} - \varepsilon < \theta < \hat{\theta} + \varepsilon) = \gamma$.

Доверительным интервалом называется интервал $\left(\hat{\theta}-\varepsilon;\hat{\theta}+\varepsilon\right)$, накрывающий неизвестный параметр θ с заданной доверительной вероятностью γ.

В практических приложениях важную роль играет длина доверительного интервала. Чем меньше длина доверительного интервала $\left(\hat{\theta}-\varepsilon;\hat{\theta}+\varepsilon\right)$, тем точнее оценка. Если же длина доверительного интервала велика, то оценка малопригодна для практики.

Доверительный интервал для оценки $\overline{x}_Г$ – среднего генеральной совокупности (математического ожидания *a*), распределенной по нормальному закону с неизвестным среднеквадратическим отклонением σ определяется из неравенства $\overline{x}_В - t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \overline{x}_Г < \overline{x}_В + t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, где s – исправленное среднее квадратическое отклонение, n – объем выборки, $\overline{x}_В$ – выборочная средняя, $t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$ – квантиль распределения Стьюдента, соответствующий значению доверительной вероятности $\gamma = 1-\alpha$ и объему выборки n.

Доверительный интервал для оценки $\sigma_Г$ – среднего квадратического отклонения генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону с неизвестными параметрами, определяется из неравенства $s\cdot q_1 < \sigma_Г < s\cdot q_2$, где $q_1 = \sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}}$, $q_2 = \sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}}$. Коэффициенты q_1 и q_2, соответствующие доверительной вероятности $\gamma = 1-\alpha$ и числу степеней свободы $k=n-1$, определяются по таблице П.3.

3.4 Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Гипотезы о множестве функций Ω, к которому может принадлежать функция распределения исследуемой СВ *X*, называются *непараметрическими гипотезами*. Предположим, что класс таких функций выбран и произведена точечная оценка параметров этих функций внутри выбранного класса. Дальнейшая задача состоит в выяснении, насколько хорошо подобрана вероятностная модель ряда наблюдений. Проверка гипотезы о предполагаемом законе распределения производится с помощью непараметрических критериев значимости.

Наиболее распространенными критериями значимости являются критерий согласия χ^2 Пирсона и λ-критерий Колмогорова.

3.5 Критерий χ^2 Пирсона

Критерий χ^2 Пирсона позволяет производить проверку согласия эмпирической функции распределения с гипотетической функцией *F(x),* принадлежащей к некоторому множеству Ω функций определенного вида.

Пусть генеральная совокупность имеет функцию распределения *F(x)*. Требуется на основе выборки проверить нулевую гипотезу о том, что гипотетическая функция распределения *F(x)* значимо представляет данную выборку, т.е. $H_0:F(x)\in\Omega$.

При проверке нулевой гипотезы с помощью критерия согласия χ^2 придерживаются следующей последовательности действий:

1) на основании гипотетической функции *F(x)* вычисляют теоретические вероятности попадания СВ *X* в частичные интервалы $[x_{i-1};x_i)$:

$$p_i = P(x_{i-1} \le X < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) \ (i = \overline{1,k}).$$

2) умножая полученные вероятности p_i на объем выборки *n*, получают теоретические частоты np_i частичных интервалов $[x_{i-1};x_i)$, т.е. частоты, которые следует ожидать, если нулевая гипотеза справедлива;

3) вычисляют выборочную статистику (критерий) χ^2: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.

Для того чтобы проверить нулевую гипотезу, необходимо найти по таблице П.3 квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ критическое значение $\chi^2_{\alpha;\nu}$, удовлетворяющее условию $P(\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha;\nu}) = \alpha$. Сравнивая наблюдаемое значение выборочной статистики χ^2, вычисленное по формуле, с критическим значением $\chi^2_{\alpha;\nu}$, принимают одно из двух решений:

1) если $\chi^2_{НАБЛ} \ge \chi^2_{\alpha;\nu}$, то нулевая гипотеза $H_0:F(x)\in\Omega$ отвергается в пользу альтернативной $H_1:F(x)\notin\Omega$, т.е. считается, что гипотетическая функция не согласуется с опытными данными;

2) если $\chi^2_{НАБЛ} < \chi^2_{\alpha;\nu}$, то считается, что нет оснований для отклонения нулевой гипотезы, т.е. гипотетическая функция *F(x)* согласуется с опытными данными.

Замечание. При применении: критерия необходимо, чтобы в каждом частичном интервале было не менее 5 элементов. Если число элементов (частота) меньше 5, то рекомендуется объединять такие частичные интервалы с соседними.

3.6 Критерий λ Колмогорова

Критерий λ Колмогорова применяется для проверки гипотез о законах распределения только непрерывных случайных величин. Его отличие от критерия согласия Пирсона состоит в том, что при применении критерия λ

Колмогорова сравниваются эмпирическая $F^*(x)$ и гипотетическая функции распределения $F(x)$. Проверку нулевой гипотезы с помощью критерия согласия λ Колмогорова производят по следующей схеме:

1) результаты наблюдений представляют в виде интервального статистического ряда;

2) находят эмпирическую функцию распределения $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$;

3) вычисляют, пользуясь гипотетической функцией распределения, значения теоретической функции распределения, соответствующие наблюденным значениям СВ X;

4) находят для каждого значения x, модуль разности между эмпирической и теоретической функциями распределения, т.е. $\left|F^*(x)\text{-}F(x)\right|$;

5) вычисляют наблюдаемое значение выборочной статистики λ Колмогорова: $\lambda = D\sqrt{n} = \max\limits_x \left|F^*(x)\text{-}F(x)\right|\sqrt{n}$.

Сравнивают наблюдаемое значение выборочной статистики $\lambda_{НАБЛ} = D\sqrt{n}$ с критическим значением λ_α, определяемым по таблице П.4 квантилей распределения Колмогорова по заданному уровню значимости α. Если при этом окажется, что $D\sqrt{n} \ge \lambda_\alpha$, то проверяемая нулевая гипотеза отклоняется, если же $D\sqrt{n} < \lambda_\alpha$, то считается, что нет оснований для отклонения нулевой гипотезы, т.е. гипотетическая функция распределения считается согласующейся с опытными данными.

3.7 Порядок выполнения работы

Данная лабораторная работа основана на результатах выполнения предыдущей.

а) Изучить краткий теоретический курс.

б) Найти доверительный интервал для оценки средней $\bar{x}_Г$ генеральной совокупности с надежностью $\gamma = 0{,}95$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении $\sigma_Г$;

в) Найти доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения $\sigma_Г$ генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, с надежностью $\gamma = 0{,}95$;

г) Приняв в качестве нулевой гипотезы H_0: *генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение*, проверить ее с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

д) Проверить эту же нулевую гипотезу H_0 с помощью критерия Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

е) Записать аналитическое выражение для плотности полученного нормального распределения и построить ее график;

ж) Оформить отчет по лабораторной работе.

3.8 Пример выполнения работы

1. Будем считать, что выборочные данные взяты из нормально распределённой генеральной совокупности. Так как среднее квадратическое отклонение нашего распределения неизвестно, то доверительный интервал для математического ожидания имеет вид $\overline{x}_B - t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} < \overline{x}_Г < \overline{x}_B + t_{\frac{\alpha}{2};n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$. Так как $\gamma = 0,95$, то $\alpha = 1-\gamma = 1-0,95 = 0,05$. По таблице П.2 находим

$$t_{\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{\frac{0,05}{2};95-1} = t_{0,025;94} \approx 2,278.$$

Так как $\overline{x}_B \approx 70,89$ и $s \approx 3,979$, то доверительный интервал тогда будет равен

$$70,89 - 2,278\frac{3,979}{\sqrt{95}} < \overline{x}_Г < 70,89 + 2,278\frac{3,979}{\sqrt{95}},$$

$$70,89 - 0,93 < \overline{x}_Г < 70,89 + 0,93 \text{ или } 69,96 < \overline{x}_Г < 71,76.$$

Доверительный интервал для $\overline{x}_Г$ будет $(69,96;71,76)$.

2. Для нахождения доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения генеральной совокупности $\sigma_Г$ найдем по таблице П.3 квантили распределения χ^2. Так как $\alpha = 1-\gamma = 1-0,95 = 0,05$, то

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1} = \chi^2_{0,025;94} = 122,72,\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = \chi^2_{0,975;94} = 69,068.$$

Тогда $\qquad q_1 = \sqrt{\dfrac{95-1}{122,72}} = \sqrt{0,766} \approx 0,875, \qquad q_2 = \sqrt{\dfrac{95-1}{69,068}} = \sqrt{1,361} \approx 1,167.$

Подставляя найденные значения в неравенство, находим доверительный интервал $3,979 \cdot 0,875 < \sigma_Г < 3,979 \cdot 1,167$ или $3,4816 < \sigma_Г < 4,6435$,

Доверительный интервал для $\sigma_Г$ будет $(3,4816;4,6435)$.

3. Выдвинем гипотезу о том, что X распределена нормально, приняв за математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение их оценки $\overline{x}_B \approx 70,89$ и $s \approx 3,979$ соответственно. В пользу того, что X имеет нормальное распределение говорят следующие факты:

а) полигон частот напоминает кривую Гаусса;

б) оценивая математическое ожидание a величиной $\overline{x}_B \approx 70,89$, а среднее квадратическое отклонение σ – величиной $s \approx 3,979$, получим

$$(a-3\sigma;a+3\sigma) \approx (\overline{x}_B - 3s;\overline{x}_B + 3s) = (70,89 - 3\cdot 3,979;70,89 + 3\cdot 3,979) =$$
$$= (70,89 - 11,937;70.89 + 11,937) = (58,953;82,827).$$

То есть выборочные данные вполне удовлетворяют правилу 3σ нормального распределения.

Для дальнейшей работы потребуются выравнивающие частоты $n_i' = np_i$. Их будем считать, используя интервальное распределение. Вычислим вероятности p_i попадания X в i-тый вариационный интервал по формулам $p_i = P(x_{i-1} \le X \le x_i) = \Phi(\dfrac{x_i - \overline{x}}{\sigma}) - \Phi(\dfrac{x_{i-1} - \overline{x}}{\sigma})$ или $p_i = \Phi(a_i) - \Phi(a_{i-1})$, где

$a_i=\dfrac{x_i-70,89}{3,979}$, $a_{i-1}=\dfrac{x_{i-1}-70,89}{3,979}$, x_i – концы интервалов, а $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ находим по таблице П.1.

№ п/п	Границы интервала		Частоты n_i	a_{i-1}	$\Phi(a_i)$	p_i	Выравнивающие частоты		Теор. функц. распред
	x_{i-1}	x_i					$n'_i=np_i$		
1	61	63,6	4	-2,4855	-0,4935	0,0270	2,5649	3	0,0270
2	63,6	66,2	8	-1,8321	-0,4665	0,0858	8,1505	8	0,1128
3	66,2	68,8	14	-1,1787	-0,3807	0,1804	17,1419	17	0,2932
4	68,8	71,4	29	-0,5253	-0,2003	0,2513	23,8727	24	0,5445
5	71,4	74	15	0,1282	0,0510	0,2318	22,0193	22	0,7763
6	74	76,6	20	0,7816	0,2828	0,1416	13,4506	13	0,9179
7	76,6	79,2	4	1,4350	0,4244	0,0573	5,4398	5	0,9752
8	79,2	81,8	1	2,0885	0,4816	0,0153	1,4557	1	0,9905
	81,8			2,7419	0,4969				
Сумма			95			0,9905	94,0954	94	

Сумма p_i отличается от единицы, так как мы рассматриваем не всю прямую, а лишь интервал $(61;81,8)$. Как видим, выравнивающие частоты в основном близки к эмпирическим частотам, что еще раз подтверждает правильность выдвинутой гипотезы о нормальном распределении признака.

4. Для проверки гипотезы о нормальном распределении по критерию согласия Пирсона интервалы, имеющие частоты меньше пяти, объединяем с соседними. Так как в первом и втором интервалах пять вариант, то объединим их, объединим также два последних интервала. Используя результаты предыдущей таблицы, построим таблицу необходимых данных. Все вычисления проведем в таблице:

№ п/п	Частоты n_i	Выравнивающие частоты	n'_i-n_i	$(n'_i-n_i)^2$	$\dfrac{(n'_i-n_i)^2}{n'_i}$
1-2	12	11,3298	-0,6702	0,4491	0,0396
3	14	17,1419	3,1419	9,8714	0,5759
4	29	23,8727	-5,1273	26,2889	1,1012
5	15	22,0193	7,0193	49,2708	2,2376
6	20	13,4506	-6,5494	42,8950	3,1891
7-8	5	7,1857	2,1857	4,7772	0,6648
Сумма	95	95			7,8082

Таким образом, $\chi^2_{НАБЛ}=7,8082$. По таблице квантилей распределения χ^2, по заданному уровню значимости $\alpha=0,05$ и числу степеней свободы $k=l-r-1=6-2-1=3$ ($l=6$ – число объединенных интервалов, $r=2$ – число параметров, вычисленных по выборке (a и σ)), находим $\chi^2_{КРИТ}$: $\chi^2_{КРИТ}=7,8147$.

Так как $\chi^2_{НАБЛ} < \chi^2_{КРИТ}$, то нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

5. Для проверки гипотезы о нормальном распределении по критерию согласия Колмогорова необходимо найти наблюдаемое значение статистики

$$\lambda_{НАБЛ} = \sqrt{n} \cdot \max_x \left| F^*(x) - F(x) \right|,$$

где $F^*(x) = \dfrac{\sum n_i}{n}$ – эмпирическая функции распределения, $F(x) = 0{,}5 + \Phi(a_i)$ – гипотетическая функции распределения. Все вспомогательные расчеты, необходимые для вычисления выборочной статистики, сведем в таблицу:

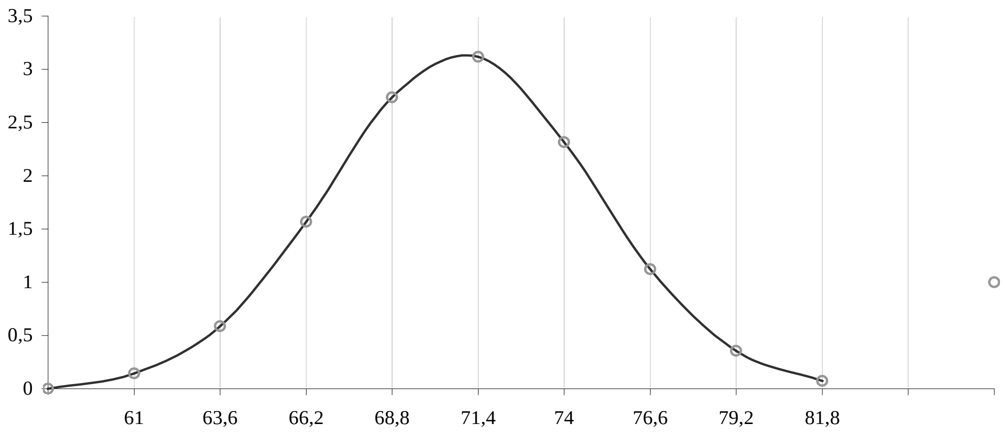
№ п/п	Частоты n_i	Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$	Границы нормир. интервала a_i	Функция Лапласа $\Phi(a_i)$	Теоретическая функция распределения $F(x)$	Разности $\left\|F^*(x) - F(x)\right\|$
1	4	0,0421	-1,8321	-0,4665	0,0335	0,0086
2	8	0,1263	-1,1787	-0,3807	0,1193	0,0071
3	14	0,2737	-0,5253	-0,2003	0,2997	0,0260
4	29	0,5789	0,1282	0,0510	0,5510	0,0280
5	15	0,7368	0,7816	0,2828	0,7828	0,0459
6	20	0,9474	1,4350	0,4244	0,9244	0,0230
7	4	0,9895	2,0885	0,4816	0,9816	0,0079
8	1	1	$+\infty$	0,5	1,0000	0,0000

Из последнего столбца таблицы видим, что наибольший модуль разности между соответствующими значениями эмпирической и теоретической функций распределения $\max_x \left| F^*(x) - F(x) \right| = 0{,}0459$. Вычислим наблюдаемое значение выборочной статистики $\lambda_{НАБЛ} = 0{,}0459 \cdot \sqrt{95} \approx 0{,}447$. По таблице П.4 квантилей λ_α распределения Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находим $\lambda_{КРИТ} = 1{,}358$. Так как у нас $\lambda_{НАБЛ} < \lambda_{КРИТ}$, то нет оснований отвергать гипотезу о нормальном распределении.

6. Функция плотности вероятности для нормального распределения имеет вид: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}}$. Так как принимается гипотеза о том, что X распределена нормально, то в качестве точечной оценки параметра a возьмем $\overline{x}_B = 70{,}89$ и в качестве точечной оценки параметра σ возьмем $s = 3{,}979$. Таким образом, в дальнейшем функция плотности вероятностей признака X считается имеющей вид $f(x) = \dfrac{1}{3{,}979\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-70{,}89)^2}{2\cdot 3{,}979^2}}$ с $a = 70{,}89$ и $\sigma = 3{,}979$.

Построим график функции плотности вероятностей:

$f(x)$

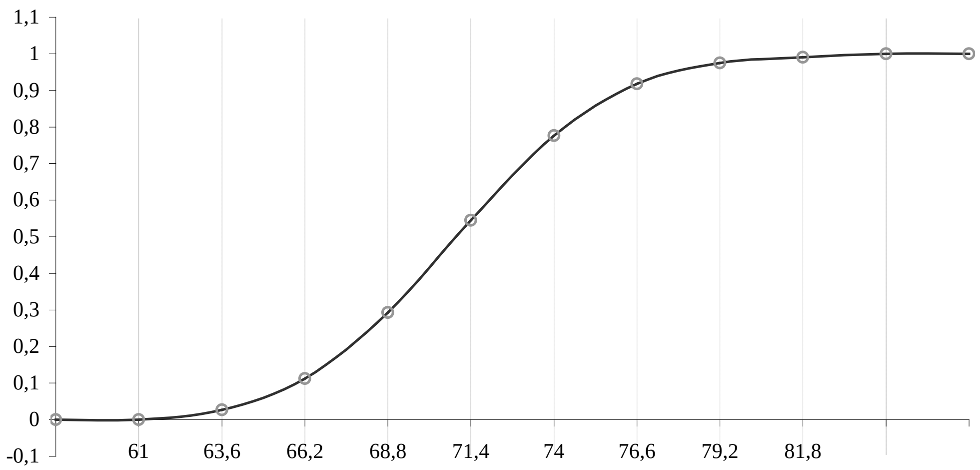


Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt \text{ или } F(x)=\frac{1}{3{,}979\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-70{,}89)^2}{2\cdot 3{,}979^2}}\,dt.$$

Построим теоретическую интегральную функцию распределения:

$F(x)$



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

4.1 Постановка задачи

Одной из основных задач математической статистики является исследование зависимости между двумя или несколькими переменными. Рассмотрим зависимость между двумя переменными X и Y. Две переменные X и Y могут быть либо независимыми, либо связанными функциональной или статистической зависимостью.

<u>Определение.</u> Функциональной зависимостью между переменными X и Y называется правило f, которое каждому элементу X из произвольного множества E ставит в соответствие определенный элемент Y множества F, т. е. y=f(x).

При сравнении функциональных и корреляционных зависимостей следует иметь в виду, что при наличии функциональной зависимости между признаками можно, зная величину факторного признака, точно определить величину результативного признака.

Для социально-экономических явлений характерно, что наряду с существенными факторами, формирующими уровень результативного признака, на него оказывают воздействие многие другие неучтенные и случайные факторы. Это свидетельствует о том, что взаимосвязи явлений, которые изучает статистика, носят корреляционный характер. При наличии корреляционной зависимости устанавливается лишь тенденция изменения результативного признака при изменении величины факторного признака.

<u>Определение.</u> Статистической зависимостью между случайными величинами X и Y называется правило f, которое каждому числу x из числового множества R ставит в соответствие условный закон распределения составляющей Y, т.е. каждому x соответствует f(y/x).

<u>Определение.</u> Случайные величины X и Y называются независимыми, если условный закон распределения одной из составляющих не зависит от того, какие значения приняла вторая составляющая.

При исследовании корреляционных зависимостей между признаками решению подлежит широкий круг вопросов, к которым следует отнести:

1) предварительный анализ свойств моделируемой совокупности единиц;
2) установление факта наличия связи, определение ее направления и формы;
3) измерение степени тесноты связи между признаками;
4) построение регрессионной модели, т.е. нахождение аналитического выражения связи;
5) оценка адекватности модели, ее экономическая интерпретация и практическое использование.

Основная цель изучения зависимостей между случайными величинами заключается в предсказании (прогнозе) с данной вероятностью значений области изменения одной случайной величины на основании наблюденных значений другой случайной величины. Все это требует наличия хорошего статистического материала.

В практических приложениях при исследовании зависимости между случайными величинами X и Y часто ограничиваются исследованием зависимости между X и условным математическим ожиданием $M(Y/X=x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)\,\mathrm{d}y$. Зависимости такого рода называются *регрессионными* зависимостями. Условное математическое ожидание *M(Y/X=x)* зависит от выбранной теоретико-вероятностной модели *f(x,y)*.

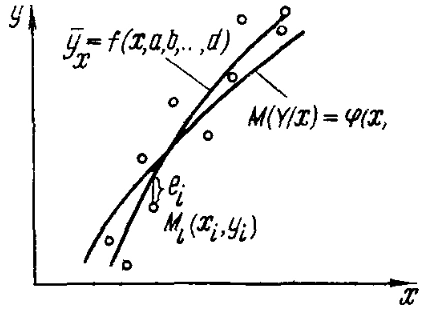
<u>Определение</u>. Уравнением регрессии Y на X называется математическое ожидание случайной величины Y, рассматриваемое как функция x, вычисленное при условии, что случайная величина X приняла некоторое фиксированное значение X=x: $\bar{y}_x = f(x)$.

<u>Определение</u>. Уравнением регрессии X на Y называется условное математическое ожидание случайной величины X, рассматриваемое, как функция y: $\bar{x}_y = \psi(y)$.

Уравнение регрессии позволяет делать «точечное» предсказание значений условных математических ожиданий случайной величины Y по значениям составляющей *X*=*x*. Однако для такого прогноза необходимо знать закон распределения двумерной случайной величины (*X*,*Y*). На практике при обработке экспериментальных данных такой закон, как правило, неизвестен.

В распоряжении экспериментатора имеются только наблюденные значения двумерной величины – точки (x_i, y_i) $(i=1,2,3,...,n)$. Если результаты выборки изобразить в виде точек в декартовой системе координат, то получим точечную диаграмму, называемую корреляционным полем.

Модельную функцию регрессии на основании выборки объема n в практике чаще всего подбирают по характеру расположения точек на корреляционном поле так, чтобы она отображала характерные особенности расположения этих точек. Поскольку же оценками являются средние значения *Y*, соответствующие определенным значениям *X*=*x*, то эмпирическая линия регрессии должна проводиться не через точки, а должна усреднять (сглаживать) результаты измерений.



Дадим окончательное определение эмпирической функции регрессии.

<u>Определение.</u> Эмпирической функцией регрессии Y на X называется функция $\bar{y}_x = f(x, a, b, ..., d)$ *определенного класса, параметры которой a,b,...,d находятся методом наименьших квадратов по наблюденным значениям двумерной случайной величины* (x_i, y_i) $(i=1,2,...,n)$*, т.е. по результатам выборки объема n.*

Корреляционный анализ имеет своей задачей количественное определение тесноты связи между двумя признаками. Теснота связи количественно выражается величиной коэффициентов корреляции.

Регрессионный анализ заключается в определении аналитического выражения связи. С его помощью решаются следующие задачи:

1) находятся точечные и интервальные оценки параметров эмпирической функции регрессии;

2) производится точечное и интервальное оценивание условных математических ожиданий, необходимое для предсказания средних значений одной случайной величины, соответствующих определенным фиксированным значениям другой величины;

3) проверяется согласованность найденной эмпирической функции регрессии с экспериментальными данными и решается ряд других задач.

Корреляционно-регрессионный анализ как общее понятие включает в себя измерение тесноты, направления связи и установление аналитического выражения (формы) связи.

4.2 Коэффициент корреляции

Одним из показателей степени тесноты связи является *линейный коэффициент корреляции*. Вычисление коэффициента корреляции проводится по следующей формуле:

$$r = \frac{\sum_1^n x_i y_j - \overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{n\sum_1^n x_i y_j - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_j}{\sqrt{\left(n\sum_1^n x_i^2 - (\sum_1^n x_i)^2\right)\left(n\sum_1^n y_j^2 - (\sum_1^n y_j)^2\right)}}.$$

Линейный коэффициент корреляции может принимать любые значения в пределах от *-1* до *+1*. Чем ближе коэффициент корреляции по абсолютной величине к *1*, тем теснее связь между признаками. Знак при линейном коэффициенте корреляции указывает на направление связи: прямой зависимости соответствует знак плюс, а обратный зависимости – знак минус.

Квадрат коэффициента корреляции (r^2) носит название *коэффициента детерминации*. Он показывает, на сколько процентов вариация случайной величины *Y* объясняется вариацией случайной величины *X*.

В тех случаях, когда исходная информация представлена в виде корреляционной таблицы, нужно учитывать частоты повторений *X* и *Y*. При расчете линейного коэффициента корреляции по корреляционной таблице формула имеет такой вид:

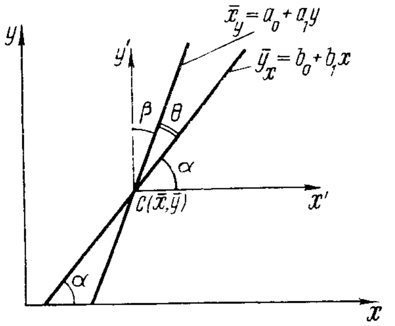
$$r = \frac{n\sum_1^n n_{xy} x_i y_j - \sum_1^n n_x x_i \sum_1^n n_y y_j}{\sqrt{\left(n\sum_1^n n_x x_i^2 - (\sum_1^n n_x x_i)^2\right)\left(n\sum_1^n n_y y_j^2 - (\sum_1^n n_y y_j)^2\right)}}.$$

4.3 Линейная регрессия

Нанося экспериментальные данные в виде точек в декартовой системе координат, получаем корреляционное поле. Если точки на корреляционном поле группируются вокруг прямой линии, то эмпирическое уравнение регрессии подбирается в виде $\overline{y}_x = b_0 + b_1 x$. Следующая задача – нахождение коэффициентов (параметров) b_0 и b_1 линейной эмпирической функции регрессии *Y* на *X*. Они находятся по формулам: $b_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b_0 = \overline{y} - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\overline{x}$. Таким образом, уравнение регрессии *Y* на *X* имеет вид $\overline{y}_x - \overline{y} = b_1(x - \overline{x})$.

Аналогично, уравнение регрессии *X* на *Y* имеет вид $\overline{x}_y - \overline{x} = a_1(y - \overline{y})$, где $a_1 = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$.

Коэффициенты a_1 и b_1 не позволяют судить о степени связи между случайными величинами Y и X. Степень связи зависит от угла, образованного прямыми регрессии. Чем меньше угол между прямыми регрессии, тем теснее связь между случайными величинами X и Y. При слиянии двух прямых линий регрессии в одну имеет место линейная функциональная зависимость.



При отсутствии линейной зависимости между переменными X и Y линии регрессии параллельны координатным осям, коэффициенты регрессии a_1 и b_1 равны нулю, коэффициент корреляции $r=0$; во всех остальных случаях $-1 \le r \le 1$.

4.4 Корреляционное отношение

Коэффициент корреляции достаточно точно оценивает степень тесноты связи лишь в случае наличия линейной зависимости между признаками. При наличии же криволинейной зависимости линейный коэффициент корреляции недооценивает степень тесноты связи и даже может быть равен 0, а потому в таких случаях рекомендуется использовать в качестве показателя степени тесноты связи *эмпирическое корреляционное отношение* η.

Расчет корреляционного отношения основан на использовании теоремы сложения дисперсий. Общая дисперсия случайной величины Y может быть разложена на две составляющие. Первая составляющая – межгрупповая дисперсия, характеризует ту часть колеблемости Y, которая складывается под влиянием изменения случайной величины X. Вторая составляющая (средняя из внутригрупповых дисперсий) оценивает ту часть вариации случайной величины Y, которая обусловлена действием других случайных величин.

Зная общую и межгрупповую дисперсии, можно оценить ту долю, которую составляет вариация под действием случайной величины X в общей вариации случайной величины Y, т.е. найти отношение $\dfrac{\delta^2}{\sigma_0^2}$. Извлекая квадратный корень из этого отношения, мы и получим эмпирическое корреляционное отношение $\eta = \sqrt{\delta^2 / \sigma_0^2}$. Величина корреляционного отношения будет равна нулю, когда нет колеблемости в величине средних по значениям x. В тех случаях, когда практически вся вариация случайной величины Y обусловлена действием случайной величины X, величина корреляционного отношения близка к 1. Направление связи легко устанавливается по данным корреляционной таблицы.

Определенный интерес представляет сопоставление величины линейного коэффициента корреляции и корреляционного отношения. Когда связь между переменными уклоняется от линейной формы, то η и r несколько отличаются по величине, причем η всегда больше r по абсолютной величине.

При проверке возможности использования линейной функции в качестве формы уравнения определяют разность квадратов $\eta^2 - r^2$, и если эта разность менее $0{,}1$, то считается возможным применять линейное уравнение корреляционной зависимости.

4.5 Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Оценка степени тесноты связи с помощью коэффициента корреляции производится, как правило, на основе более или менее ограниченной информации об изучаемом явлении. Возникает вопрос, насколько правомерно наше заключение по выборочным данным в отношении действительного наличия корреляционной связи в той генеральной совокупности, из которой была произведена выборка?

При большом объеме выборки, отобранной из исходной нормально распределенной совокупности, можно считать распределение линейного коэффициента корреляции приближенно нормальным со средней, равной r и дисперсией $\sigma_r^2 = \dfrac{(1-r^2)^2}{n-1}$. Тогда средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции: $\sigma_r = \dfrac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}$, где r – линейный коэффициент корреляции, полученный по данным выборки; n – объем выборки.

Если величина линейного коэффициента корреляции превышает величину средней квадратической ошибки более чем в $t_\alpha \sigma_r$ раза, то можно говорить о существенности выборочного коэффициента корреляции, где α – уровень значимости. Если же отношение $\dfrac{|r|}{\sigma_r}$ окажется меньше 1, то с вероятностью $(1-\alpha)$ следует предполагать отсутствие корреляционной связи в генеральной совокупности.

Доверительный интервал для коэффициента корреляции имеет вид

$$r - t_\alpha \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}} \le r_{ГЕН} \le r + t_\alpha \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}},$$

где $r_{ГЕН}$ – значение коэффициента корреляции в генеральной совокупности.

4.6 Порядок выполнения работы

а) Изучить краткий теоретический курс.

б) По заданной корреляционной таблице определить:

1) Числовые характеристики $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y;

2) Условные средние $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$;

3) Коэффициент корреляции и детерминации;

4) Корреляционные отношения $\eta_{Y/X}$ и $\eta_{X/Y}$.

в) Построить корреляционное поле. По характеру точек на корреляционном поле подобрать общий вид функции регрессии.

г) Определить параметры эмпирических линейных функций регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y* и построить их графики.

д) Определить 95%-ый доверительный интервал для коэффициентов регрессии.

е) При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить адекватность линейной регрессии исходным данным.

ж) Оформить отчет по лабораторной работе.

4.7 Пример выполнения работы

По результатам измерений возраста (X) и дневной выработки молодых рабочих (Y) выполним все задания лабораторной работы.

X \ Y	10-16	16-22	22-28	28-34	34-40	n_i
14-20	3					3
20-26	7	2	3			12
26-32	2	8	50			60
32-38		6	4	2		12
38-44				6	3	9
44-50					4	4
m_j	12	16	57	8	7	100

б) Найдем середины интервалов признаков X и Y. Так как значения вариант X, Y достаточно велики, а длина интервалов их значений соответственно $h_x = 6$, $h_y = 6$, то введем условные варианты: $u = \frac{1}{6}(x - 29)$, $v = \frac{1}{6}(y - 25)$. Вычислим величины условных вариант и составим корреляционную таблицу.

1) По результатам вычислений, сведенным в таблице, находим:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{24}{100} = 0{,}24,\ \bar{v} = \frac{\sum m_j v_j}{n} = \frac{-18}{100} = -0{,}18.$$

Тогда выборочные средние признаков X и Y:

$$\bar{x} = 29 + 6\bar{u} = 29 + 6 \cdot 0{,}24 = 30{,}44,\ \bar{y} = 25 + 6\bar{v} = 25 - 6 \cdot 0{,}18 = 23{,}92.$$

Для вычисления дисперсий признаков X и Y находим дисперсии U и V по формулам:

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i u_i}{n}\right)^2 = \frac{108}{100} - 0{,}24^2 = 1{,}0224\ ,$$

$$\sigma_v^2 = \overline{v^2} - (\bar{v})^2 = \frac{\sum m_j v_j^2}{n} - \left(\frac{\sum m_j v_j}{n}\right)^2 = \frac{100}{100} - (-0{,}18)^2 = 0{,}9676,$$

$$\sigma_u \approx 1{,}011,\ \ \sigma_v \approx 0{,}9837\ .$$

Тогда, $\sigma_x = \sigma_u \cdot h_x = 1{,}011 \cdot 6 = 6{,}066$, $\sigma_y = \sigma_v \cdot h_y = 0{,}9837 \cdot 6 = 5{,}9022$.

X \ Y	u \ v	13	19	25	31	37	n_i	$n_i \cdot u_i$	$\sum n_{ij} v_j$	$n_i \cdot u_i^2$	$u_i \sum n_{ij} v_j$
		-2	-1	0	1	2					
17	-2	3					3	-6	-6	12	12
23	-1	7	2	3			12	-12	-16	12	16
29	0	2	8	50			60	0	-12	0	0
35	1		6	4	2		12	12	-4	12	-4
41	2				6	3	9	18	12	36	24
47	3					4	4	12	8	36	24
m_j		12	16	57	8	7	100	24	-18	108	72
$m_j \cdot v_j$		-24	-16	0	8	14	-18				
$\sum n_{ij} u_i$		-13	4	1	14	18	24				
$m_j \cdot v_j^2$		48	16	0	8	28	100				
$v_i \sum n_{ij} u_i$		26	-4	0	14	36	72				

2) Условным средним $\bar{y}_{x_0}$ называют среднее арифметическое значений Y, соответствующих значению $X=x_0$. Таким образом,

$$\bar{y}_{17} = \frac{3 \cdot 13}{3} = 13, \ \bar{y}_{25} = \frac{7 \cdot 13 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 25}{12} = 17,$$

$$\bar{y}_{29} = \frac{2 \cdot 13 + 8 \cdot 19 + 50 \cdot 25}{60} = 23{,}8, \ \bar{y}_{35} = \frac{6 \cdot 19 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 31}{12} = 23,$$

$$\bar{y}_{41} = \frac{6 \cdot 31 + 3 \cdot 37}{9} = 33, \ \bar{y}_{47} = \frac{4 \cdot 37}{4} = 37.$$

Занесем полученные данные в таблицу:

X	17	23	29	35	41	47
$\bar{y}_x$	13	17	23,8	23	33	37

Аналогично найдем условные средние $\bar{x}_y$:

Y	13	19	25	31	37	47
$\bar{x}_y$	22,5	30,5	29,10526	39,5	44,42857	37

3) Коэффициент корреляции признаков X и Y совпадает с коэффициентом корреляции условных вариант, который вычисляем по формуле

$$r = \frac{1}{\sigma_u \sigma_v}\left(\frac{\sum n_{ij} u_i v_j}{n} - \bar{u} \cdot \bar{v}\right) = \frac{1}{1{,}011 \cdot 0{,}9837}\left(\frac{72}{100} - 0{,}24 \cdot (-0{,}18)\right) \approx 0{,}767.$$

Следовательно, коэффициент детерминации $r^2 \approx 0{,}588$. Полученный результат означает, что *58,8%* рассеивания зависимой переменной объясняется линейной регрессией Y на X, а *41,2%* рассеивания Y остались необъясненными. Эти *41,2%* необъясненной дисперсии Y могут быть вызваны либо случайными ошибками, либо тем, что линейная регрессионная модель плохо согласуется с экспериментальными данными.

4) Статистическим корреляционным отношением *Y* на *X* (*X* на *Y*) называют отношение средних квадратов отклонения регрессии от соответствующих общих средних к статистическим средним квадратичным отклонениям:

$$\eta_{Y/X} = \frac{\sigma_{\overline{y}}}{\sigma_y}, \ \eta_{X/Y} = \frac{\sigma_{\overline{x}}}{\sigma_x}, \text{ где } \sigma_{\overline{y}}^2 = \frac{1}{n}\sum(\overline{y_i} - \overline{y})^2 n_i, \ \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{n}\sum(\overline{x_j} - \overline{x})^2 n_j.$$

Тогда,

$$\sigma_{\overline{y}}^2 = \frac{1}{100}(3(13-23{,}92)^2 + 12(17-23{,}92)^2 + 60(23{,}8-23{,}92)^2 +$$

$$+12(23-23{,}92)^2 + 9(33-23{,}92)^2 + 4(37-23{,}92)^2) = 0{,}01 \cdot 2369{,}76 \approx 23{,}7;$$

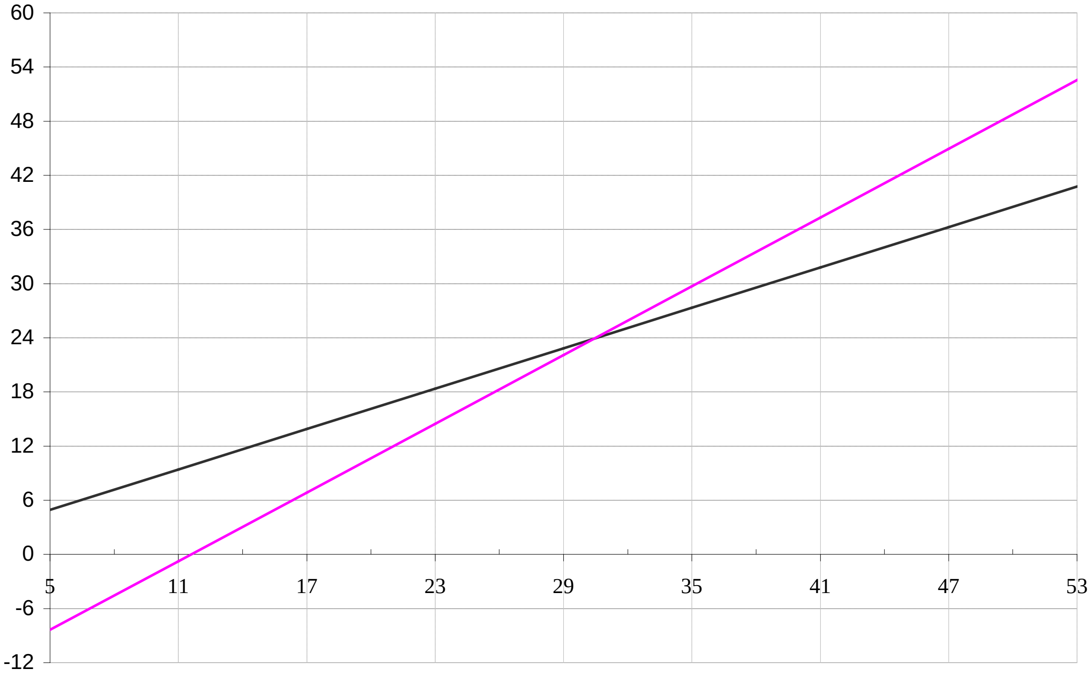
$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{100}(12(22{,}5-30{,}44)^2 + 16(30{,}5-30{,}44)^2 + 57(29{,}1-30{,}44)^2 +$$

$$+8(39{,}5-30{,}44)^2 + 7(44{,}43-30{,}44)^2) = 0{,}01 \cdot 2884{,}557 \approx 28{,}8;$$

$$\sigma_{\overline{y}} \approx 4{,}868, \ \sigma_{\overline{x}} \approx 5{,}37.$$

Таким образом, получим: $\eta_{Y/X} = \frac{4{,}868}{5{,}9022} \approx 0{,}825$, $\eta_{X/Y} = \frac{5{,}37}{6{,}066} \approx 0{,}885$.

в) Построим корреляционное поле.



По характеру расположения точек на корреляционном поле можно предположить, что функция регрессии имеет линейный вид.

г) Найдем значения параметров эмпирической линейной функции регрессии *Y* на *X*: $\overline{y}_x - \overline{y} = b_1(x - \overline{x})$, где $b_1 = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0{,}767 \cdot \frac{5{,}9022}{6{,}066} \approx 0{,}746$.

Тогда, уравнение регрессии Y на X имеет вид: $y-23{,}92=0{,}746(x-30{,}44)$ или $y=0{,}746x+1{,}212$.

Найдем значения параметров эмпирической линейной функции регрессии X на Y: $\bar{x}_y-\bar{x}=a_1(y-\bar{y})$, где $a_1=r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}=0{,}767\cdot\dfrac{6{,}066}{5{,}9022}\approx0{,}788$. Тогда, уравнение регрессии X на Y имеет вид: $x-30{,}44=0{,}788(y-23{,}92)$ или $x=0{,}788y+11{,}591$.

Построим на корреляционном поле прямые линии регрессии $y=0{,}746x+1{,}212$ и $x=0{,}788y+11{,}591$.

д) Найдем *95%*-ый доверительный интервал для коэффициентов регрессии. Если уравнение регрессии имеет вид $\bar{y}_x=b_0+b_1x$, то границы доверительных интервалов равны:

для коэффициента b_0:

$$\left(\hat{b}_0-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2}\cdot\sigma_{y\cdot x}\cdot\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}};\hat{b}_0+t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2}\cdot\sigma_{y\cdot x}\cdot\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}\right);$$

для коэффициента b_1:

$$\left(\hat{b}_1-t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2}\cdot\sigma_{y\cdot x}\cdot\sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}};\hat{b}_1+t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2}\cdot\sigma_{y\cdot x}\cdot\sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}\right);$$

где $\hat{b}_0$, $\hat{b}_1$ – найденные оценки коэффициентов; $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2}$ – квантиль распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы; $\sigma_{y\cdot x}$ – остаточная дисперсия ($\sigma_{y\cdot x}{}^2=\dfrac{n\sigma_y^2(1-r^2)}{n-2}$).

$$\hat{b}_0=1{,}212;\ \hat{b}_1=0{,}746;\ \alpha=\frac{100-95}{100}=0{,}05;\ t_{1-\frac{\alpha}{2};n-2}=t_{0{,}975;98}=1{,}98;$$

$$\sigma_{y\cdot x}{}^2=\frac{n\sigma_y^2(1-r^2)}{n-2}=\frac{100\cdot5{,}9022^2\cdot(1-0{,}767^2)}{100-2}\approx14{,}635,\ \sigma_{y\cdot x}\approx3{,}826;$$

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n^2\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)}}=\sqrt{\frac{\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2+\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}{n\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\bar{x}^2}{n\sigma_x^2}}=\frac{1}{\sigma_x}\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\bar{x}^2}{n}}=\frac{1}{6{,}066}\sqrt{\frac{6{,}066^2+30{,}44^2}{100}}\approx0{,}512;$$

$$\sqrt{\frac{n}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}}=\sqrt{\frac{n}{n^2\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)}}=\sqrt{\frac{1}{n\left(\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2\right)}}=\sqrt{\frac{1}{n\sigma_x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{n}}=\frac{1}{6{,}066\cdot 10}\approx 0{,}016\,.$$

Доверительный интервал для коэффициента b_0 тогда будет равен $(1{,}212-1{,}98\cdot 3{,}826\cdot 0{,}512;1{,}212+1{,}98\cdot 3{,}826\cdot 0{,}512)$ или $(-2{,}667;5{,}091)$.

Доверительный интервал для коэффициента b_1 будет равен $(0{,}746-1{,}98\cdot 3{,}826\cdot 0{,}016;0{,}746+1{,}98\cdot 3{,}826\cdot 0{,}016)$ или $(0{,}625;0{,}867)$.

е) Для проверки значимости полученного выборочного коэффициента корреляции вычислим статистику $t=r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$, имеющую распределение Стъюдента с $\nu=n-2$ степенями свободы:

$$t_{НАБЛ}=0{,}767\sqrt{\frac{100-2}{1-0{,}767^2}}\approx 11{,}8\,.$$

Для проверки нулевой гипотезы $H_0:r_Г=0$ найдем по таблицам распределения Стъюдента по фиксированному уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu=100-2=98$ критическое значение $t_{\frac{\alpha}{2};n-2}=t_{0,025;98}=1{,}984$. Поскольку $t_{НАБЛ}>t_{\frac{\alpha}{2};n-2}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, то есть возраст *X* и дневная выработка *Y* коррелированы.

ж) Для проверки значимости полученного выборочного коэффициента корреляции вычислим статистику $t=r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$, имеющую распределение Стъюдента с $\nu=n-2$ степенями свободы:

$$t_{НАБЛ}=0{,}767\sqrt{\frac{100-2}{1-0{,}767^2}}\approx 11{,}8\,.$$

Для проверки нулевой гипотезы $H_0:r_Г=0$ найдем по таблицам распределения Стъюдента по фиксированному уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu=100-2=98$ критическое значение $t_{\frac{\alpha}{2};n-2}=t_{0,025;98}=1{,}984$. Поскольку $t_{НАБЛ}>t_{\frac{\alpha}{2};n-2}$, то нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, то есть возраст *X* и дневная выработка *Y* коррелированы.

2.9 Индивидуальные задания

Вариант № 1

X \ Y	3	5	7	9	11	13	15	17
5	2	3	8					
10		4	7	6				
15			11	16	7			
20				24	12	7		
25					5	8	9	
30						7	6	8

Вариант № 2

X \ Y	26	36	46	56	66	76	86	96
3	5	12						
7		8	11	7				
11			10	8	15			
15				17	9	6		
19					9	10	8	
23						6	5	4

Вариант № 3

X \ Y	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6
21	3	6	9					
22		8	4	13				
23			17	13	9			
24				4	11	9	6	
25						9	8	4
26					2	4	6	5

Вариант № 4

X \ Y	8	22	36	50	64	78	92	106
4	7	6	4	1				
20		6	4	8	3			
36			7	19	15			
52				11	9	6		
68				1	8	9	5	
84						8	6	7

Вариант № 5

X \ Y	20	40	60	80	100	120	140	160
10	6	2	9	2				
20		6	11	15	3			
30			8	19	7			
40			3	9	14	8		
50					7	8	6	
60							4	3

Вариант № 6

X \ Y	12	20	28	36	44	52	60	68
10,5	4	5	9	2				
14,5		9	11	15				
18,5			6	18	14	9		
22,5					12	7	3	
26,5					10	6		
30,5						5	3	2

Вариант № 7

X \ Y	24,0	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8
300	6	4	3					
305		2	6	3				
310			8	12	14	3		
315			4	19	12	6		
320					5	8	5	7
325						9	8	6

Вариант № 8

X \ Y	35	40	45	50	55	60	65	70
28	7	8	3					
40		8	14	9				
52		6	12	9	9			
64				18	11	8		
76					7	5	3	
88						4	7	2

Вариант № 9

X \ Y	18,5	19,7	20,9	22,1	23,3	24,5	25,7	26,9
12,5	4	8	6					
20,0		7	14	8				
27,5				15	13	7		
35,0				9	18	9	6	
42,5						9	5	1
50,0							6	5

Вариант № 10

X \ Y	8,0	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6
120	5	9						
130		6	8	7				
140			14	15	16	4		
150				9	15	7		
160						6	9	5
170							7	8

Вариант № 11

X \ Y	36	56	76	96	116	136	156	176
5,4	6	4	4					
7,0		8	17	9				
8,6		3	9	18	9			
10,2				16	7	8		
11,8					6	8	5	1
13,4						6	4	2

Вариант № 12

X \ Y	2,3	3,8	5,3	6,8	8,3	9,8	11,3	12,8
21	5	13	8	5				
34		6	17	18				
47			10	12	18			
60					9	4	3	
73						6	8	
86							3	5

Вариант № 13

X \ Y	2,2	3,6	5,0	6,4	7,8	9,2	10,6	12,0
20	5	3	4					
36		7	9	6				
52			12	15	14			
68			3	18	13	9		
84				2	12	4	2	
100							6	6

Вариант № 14

X \ Y	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
30	2	3	6	1				
40		4	7	6	5	2		
50			1	7	15	8	4	
60			4	18	12	10	1	
70				2	9	8	3	
80						3	6	3

Вариант № 15

X \ Y	18,5	19,7	20,9	22,1	23,3	24,5	25,7	26,9
125	4	3	6	2				
200		7	4	7	3			
275			5	15	19	7	1	
350			1	7	18	8	6	
425					5	4	5	1
500						1	6	5

Вариант № 16

X \ Y	16	18	20	22	24	26	28	30
2,3	3	2	4					
2,7		8	12	7				
3,1			8	19	6			
3,5			2	18	16	9		
3,9				6	8	7	5	
4,3						4	5	1

Вариант № 17

X \ Y	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0
1,5	2	5	4					
2,0			9	8				
2,5			5	17	17	4		
3,0				13	15	7		
3,5				2	18	9	2	
4,0						8	4	1

Вариант № 18

X \ Y	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
300	2	3	9					
400			5	12	8			
500				14	21	8		
600			1	8	15	11		
700					7	9	7	
800						1	6	3

Вариант № 19

X \ Y	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	24,4	24,8
1,0	3	2	1					
1,2		6	9	5				
1,4			10	27	6	3		
1,6				12	19	5		
1,8				4	7	6	3	
2,0						5	9	8

Вариант № 20

X \ Y	11	13	15	17	19	21	23	25
10	1	3	7	2				
13		5	12	8				
16		2	14	16	6			
19			6	19	12	2		
22					8	8	7	
25						3	7	2

Вариант № 21

X \ Y	0,58	1,08	1,58	2,08	2,58	3,08	3,58	4,08
50	3	3	9	6				
74		5	9	9	2			
98				13	23	9	2	
122				7	19	9	4	
146						2	3	5
170							5	3

Вариант № 22

X \ Y	14	17	20	23	26	29	32	35
1,8	2	6	9					
2,4		2	8	16	2			
3,0			6	18	15	1		
3,6				8	16	7		
4,2					5	6	9	
4,8						2	6	6

Вариант № 23

X \ Y	2,3	3,8	5,3	6,8	8,3	9,8	11,3	12,8
210	3	3	6					
340		5	12	19	8			
470			9	24	12			
600				2	15	2	5	
730					3	6	7	
860							4	5

Вариант № 24

X \ Y	5	12	19	26	33	40	47	54
0,54	5	3	2	2				
0,68		4	8	11	6			
0,82			2	21	27	9	6	
0,96				2	12	6	5	
1,10						6	3	2
1,24							4	4

Вариант № 25

X \ Y	21,0	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1
0,90	1	3	2					
1,05		4	2	5				
1,20			5	17	8	1		
1,35			6	22	24	9		
1,50				3	7	6	7	
1,65						6	7	5

Вариант № 26

X \ Y	64	72	80	88	96	104	112	120
1,0	6	2	4					
1,3		3	8	6				
1,6			2	8	14	5		
1,9			8	17	28	9		
2,2				5	9	5	6	
2,5						1	1	3

Вариант № 27

X \ Y	56	68	80	92	104	116	128	140
0,9	2	3	5					
1,3		6	3	5				
1,7			5	18	15			
2,1				16	29	10		
2,5			3	6	2	6	8	
2,9						3	4	1

Вариант № 28

X \ Y	16	20	24	28	32	36	40	44
11,6	1	4	5					
16,6	2	6	7	3				
21,6			5	8	7			
26,6			2	19	23	9		
31,6				7	11	13	5	
36,6						4	6	3

Вариант № 29

X \ Y	12	27	42	57	72	87	102	117
2	4	2	5					
52			7	5	2			
102		1	3	9	14	6		
152			5	19	28	6		
202			1	2	9	6	7	
252						3	2	4

Вариант № 30

X \ Y	1,8	2,9	4	5,1	6,2	7,3	8,4	9,5
5,1	2	3	4					
7,3		4	6	8				
9,5			7	15	14	1		
11,7			5	29	19	7		
13,9				4	5	5	3	1
16,1							6	2

ЛИТЕРАТУРА

1. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш.шк., 1993.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш.шк., 1991.
3. Лихолетов И.И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш.шк., 1976.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., 1979.
5. Рябушко А.П. и др. Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Выш.шк., 1992.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П.1

Функция распределения $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900

X	Десятые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,49865	0,49903	0,49931	0,49952	0,49966	0,49977	0,49984	0,49989	0,49993	0,49995
4	0,49997	0,49998	0,49999	0,49999	0,49999	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

Таблица П.2

Квантили распределения Стьюдента

k \ α	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	3,07768	6,31375	12,70615	25,45188	63,65590	127,32111	636,57761
2	1,88562	2,91999	4,30266	6,20537	9,92499	14,08916	31,59977
3	1,63775	2,35336	3,18245	4,17655	5,84085	7,45320	12,92443
4	1,53321	2,13185	2,77645	3,49541	4,60408	5,59754	8,61008
5	1,47588	2,01505	2,57058	3,16339	4,03212	4,77332	6,86850
6	1,43976	1,94318	2,44691	2,96868	3,70743	4,31683	5,95872
7	1,41492	1,89458	2,36462	2,84124	3,49948	4,02935	5,40807
8	1,39682	1,85955	2,30601	2,75153	3,35538	3,83254	5,04137
9	1,38303	1,83311	2,26216	2,68501	3,24984	3,68964	4,78089
10	1,37218	1,81246	2,22814	2,63377	3,16926	3,58137	4,58676
12	1,35622	1,78229	2,17881	2,56003	3,05454	3,42843	4,31784
14	1,34503	1,76131	2,14479	2,50957	2,97685	3,32569	4,14031
16	1,33676	1,74588	2,11990	2,47288	2,92079	3,25199	4,01487
18	1,33039	1,73406	2,10092	2,44500	2,87844	3,19658	3,92174
20	1,32534	1,72472	2,08596	2,42311	2,84534	3,15340	3,84956
25	1,31635	1,70814	2,05954	2,38461	2,78744	3,07820	3,72514
30	1,31042	1,69726	2,04227	2,35957	2,74998	3,02978	3,64598
35	1,30621	1,68957	2,03011	2,34197	2,72381	2,99606	3,59112
40	1,30308	1,68385	2,02107	2,32893	2,70446	2,97117	3,55096
45	1,30065	1,67943	2,01410	2,31889	2,68959	2,95207	3,52025
50	1,29871	1,67591	2,00856	2,31092	2,67779	2,93698	3,49595
60	1,29582	1,67065	2,00030	2,29905	2,66027	2,91457	3,46015
70	1,29376	1,66692	1,99444	2,29064	2,64790	2,89874	3,43498
80	1,29222	1,66413	1,99007	2,28437	2,63870	2,88695	3,41635
90	1,29103	1,66196	1,98667	2,27952	2,63157	2,87790	3,40195
94	1,29062	1,66123	1,98552	2,27787	2,62915	2,87480	3,39700
100	1,29008	1,66023	1,98397	2,27566	2,62589	2,87066	3,39045
110	1,28930	1,65882	1,98177	2,27250	2,62127	2,86476	3,38114
130	1,28810	1,65666	1,97838	2,26766	2,61418	2,85574	3,36702
150	1,28722	1,65508	1,97590	2,26412	2,60901	2,84916	3,35654
175	1,28641	1,65361	1,97361	2,26085	2,60421	2,84308	3,34694
199	1,28582	1,65255	1,97196	2,25849	2,60075	2,83868	3,34010
200	1,28580	1,65251	1,97189	2,25840	2,60063	2,83850	3,33981

Таблица П.3

Квантили распределения χ^2 Пирсона

ν \ α	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,001	0,95	0,975	0,9975
1	2,7055	3,8415	5,0239	5,4119	6,6349	10,827	0,0039	0,0010	0,0000
2	4,6052	5,9915	7,3778	7,8241	9,2104	13,815	0,1026	0,0506	0,0050
3	6,2514	7,8147	9,3484	9,8374	11,345	16,266	0,3518	0,2158	0,0449
4	7,7794	9,4877	11,143	11,668	13,277	18,466	0,7107	0,4844	0,1449
5	9,2363	11,071	12,833	13,388	15,086	20,515	1,1455	0,8312	0,3075
6	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	22,458	1,6354	1,2373	0,5266
7	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	24,321	2,1673	1,6899	0,7945
8	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	26,124	2,7326	2,1797	1,1042
9	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	27,877	3,3251	2,7004	1,4501
10	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	29,588	3,9403	3,2470	1,8274
93	110,85	116,51	121,57	123,10	127,63	140,89	71,760	68,211	59,270
94	111,94	117,63	122,72	124,26	128,80	142,12	72,640	69,068	60,065
95	113,04	118,75	123,86	125,40	129,97	143,34	73,520	69,925	60,861
100	118,50	124,34	129,56	131,14	135,81	149,45	77,929	74,222	64,857
199	224,96	232,91	239,96	242,08	248,33	266,39	167,36	161,83	147,57
200	226,02	233,99	241,06	243,19	249,45	267,54	168,28	162,73	148,43

Таблица П.4

Квантили распределения λ_α Колмогорова

α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: С.Т. Гусева, доцент
А.В. Санюкевич, к.ф.-м.н., доцент
М.Г. Журавель, ассистент
О.К. Денисович, ассистент

Лабораторные работы

Часть II

Ответственный за выпуск: А.В. Санюкевич
Редактор Т.В. Строкач

Подписано к печати __.__.2002 г. Формат 60x84/16. Бумага писчая № 1.
Усл. п. л. __.___. Уч. изд. л. __.__. Заказ № ____. Тираж ____ экз.
Бесплатно. Отпечатано на ротапринте Брестского государственного технического университета.
224017. Брест, ул. Московская, 267.