МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Практикум по высшей математике

Часть I

Линейная алгебра в экономике.
Производная в экономике.

Брест 2003

В настоящей разработке дается краткое изложение некоторых разделов линейной алгебры и дифференциального исчисления функций одной переменной применительно к экономике. Указаны варианты заданий к аттестационным работам по темам «Линейная алгебра в экономике» и «Производная в экономике», а также приведены решения типовых вариантов этих работ.

Составители: Гладкий И.И., ст. преподаватель,
Махнист Л.П., к.т.н., доцент,
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент,
Сидоревич М.П., к.ф.-м.н., доцент.

Рецензент: зав. кафедрой алгебры и геометрии УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент Савчук В.Ф.

Вопросы учебной программы

1. Определители второго и третьего порядков, их свойства и вычисление. Понятие определителя n-го порядка.
2. Матрицы и их виды. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.
3. Обратная матрица.
4. Ранг и элементарные преобразования матриц.
5. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли (формулировка).
6. Решение невырожденных систем линейных уравнений. Формулы Крамера и метод обратной матрицы.
7. Решение произвольных систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Однородные линейные системы.
8. Векторы в R^3. Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов. Базис и координаты вектора. Скалярное произведение векторов.
9. Понятие линейного пространства R^n. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора. Матрица системы векторов. Переход от одного базиса к другому.
10. Евклидово пространство. Скалярное произведение. Ортонормированный базис.
11. Понятие линейного преобразования. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
12. Продуктивная модель Леонтьева.
13. Модель равновесных цен.
14. Линейная модель обмена (модель международной торговли).
15. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости.
16. Системы линейных неравенств с двумя переменными, их геометрическая интерпретация.
17. Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.
18. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Свойства функций, имеющих предел.
19. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Неопределенные выражения.
20. Непрерывность функций в точке. Свойства функций непрерывных в точке. Точки разрыва функции и их классификация.
21. Первый и второй замечательный пределы.
22. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые.
23. Непрерывность функции на отрезке. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

24. Производная функции. Геометрический и экономический смысл производной.
25. Основные правила дифференцирования: производные элементарных функций, производная сложной и обратной функций, логарифмическая производная.
26. Предельные величины в экономике. Темп роста и эластичность функции. Эластичность спроса по цене.
27. Дифференцируемость функции. Дифференциал и его применение в приближенных вычислениях.
28. Производные и дифференциалы высших порядков.
29. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопиталя.
30. Формула Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.
31. Условия монотонности функции.
32. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия.
33. Выпуклость функции и точки перегиба.
34. Асимптоты графика функции.
35. Общая схема исследования поведения функции.

Перечень основных задач по темам первого семестра

Определители

1. Вычислить определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить указанные определители двумя способами: а) по «правилу треугольника»; б) разложением по элементам какой-либо строки (столбца):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить указанные определители, пользуясь их свойствами:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрицы

4. Транспонировать матрицу $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 0\\ 5 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 3 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

5. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $3F+2B-C$.

6. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & -6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 5 & -6\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицы: а) $3A+B^T$; б) $2A^T-3B$.

7. Решить уравнение $2A-3X=B$, где $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

8. Решить уравнение $2X+3A=E$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 4 & 3 & -8\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9. Найти *AB* и *BA*, если:

а) $A=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

10. Найти $f(A)$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & -3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-3x+5$.

11. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$.

12. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$.

13. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья заданы следующей матрицей

$$\begin{array}{c|c} \text{Вид сырья} & \\ 1\quad 2\quad 3\quad 4 & \\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \ \text{Вид изделия} \end{array}$$

Требуется: **а)** найти расходы сырья каждого вида при заданном плане выпуска каждого вида изделия $Q = (60 \quad 50 \quad 35 \quad 40)$; **б)** общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку, если себестоимости каждого вида сырья и его доставки задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **в)** общие затраты на сырье и его транспортировку при реализации плана выпуска Q.

14. Найти матрицу A^{-1}, если а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

15. Решить уравнение $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

16. Решить уравнение $X \cdot A - 2B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. С помощью элементарных преобразований найти ранг матрицы A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$; **б)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; **в)** $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для каждой из этих матриц указать какой-либо ее базисный минор.

Системы линейных уравнений

18. Решить системы уравнений: **а)** по формуле Крамера; **б)** методом обратной матрицы; **в)** методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

19. Решить однородные системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

20. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период (в усл. ед.).

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2		
Производство	1	100	160	240	500
	2	275	40	85	400

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться в 2 раза, а второй отрасли – на 20 %.

Векторы в R^3

21. Даны $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$.

22. Определить начало вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$, если его конец совпадает с точкой (1;-1;2).

23. Нормировать вектор $\vec{a} = (-6;\ 2;\ -3)$.

24. Даны векторы $\vec{a} = (3;\ -2;\ 6)$, $\vec{b} = (-4;\ 0;\ 2)$. Определить координаты следующих векторов: **1)** $\vec{a} + \vec{b}$; **2)** $2\vec{a}$; **3)** $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$; **4)** $\vec{b} - 2\vec{a}$; **5)** $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

25. Определить, при каких значениях m и n векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + n\vec{k}$ и $\vec{b} = (m;\ -6;\ 2)$ колинеарны.

26. Даны точки $A(1;\ 2;\ -3)$, $B(0;\ -1;\ -2)$, $C(3;\ -4;\ -1)$. Найти $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right|$, $\left|2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right|$.

27. Доказать, что векторы $\vec{a} = (3;\ -2;\ 1)$, $\vec{b} = (-1;\ 1;\ -2)$ и $\vec{c} = (2;\ 1;\ -3)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d} = (11;\ -6;\ 5)$ в этом базисе.

28. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^0$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: **1)** $\vec{a}\,\vec{b}$; **2)** $\vec{a}^2$; **3)** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; **4)** $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$.

29. Определить, при каком значении m векторы $\vec{b} = m\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{a} = (2;\ -3;\ m)$ перпендикулярны.

30. Даны векторы $\vec{a}=(4;-2;4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить: **1)** $\vec{a}\,\vec{b}$; **2)** $\vec{b}^2$; **3)** $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
31. Три вида товара в количествах 50, 20 и 30 единиц соответственно реализуются по ценам 10, 15 и 5 усл. ед. за единицу товара. Найти выручку от реализации товара.

Линейные пространства

32. В некотором базисе даны векторы $\vec{x}=(2;-1;3;5)$ и $\vec{y}=(-1;4;0;-2)$. Найти координаты вектора $2\vec{x}+3\vec{y}$.
33. Найти максимальное число линейно-независимых векторов в системе векторов $\vec{x}_1=(2,3,-1,4)$, $\vec{x}_2=(-1,1,2,0)$, $\vec{x}_3=(0,0,1,1)$, $\vec{x}_4=(1,4,1,4)$, $\vec{x}_5=(2,3,0,5)$.
34. Даны векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\vec{x};\vec{y})$, $|\vec{x}|$ и $|\vec{y}|$, если: **а)** $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_5$, $\vec{y}=3\vec{e}_2+\vec{e}_3-\vec{e}_4+2\vec{e}_5$; **б)** $\vec{x}=(5;-3;1;4;0)$ и $\vec{y}=(0;2;-1;1;0)$.
35. Найти координаты вектора $\vec{e}=(2;-1;7;10)\in R^4$ в базисе из векторов $\vec{e}_1^{\,o}=(1;0;0;0)$, $\vec{e}_2^{\,o}=(0;1;0;0)$, $\vec{e}_3^{\,o}=(0;0;1;0)$, $\vec{e}_4^{\,o}=(0;0;0;1)$.

Линейные преобразования

36. Пусть линейное преобразование $A\vec{x}$ пространства R^2 в базисе $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ задано матрицей $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -5\end{pmatrix}$. Найти $A\vec{x}$, если $\vec{x}=2\vec{e}_1-4\vec{e}_2$.
37. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей A:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

38. Структурная матрица торговли **а)** трех стран; **б)** четырех стран есть матрица A. Найти бюджеты этих стран при условии, что сумма бюджетов равна S:

а) $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,1\\ 0,2 & 0,3 & 0,4\\ 0,5 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$, $S=4600$; **б)** $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2\\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2\\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4\end{pmatrix}$, $S=12540$.

Прямая на плоскости

39. Найти угловой коэффициент прямой $3x-4y=12$. Построить эту прямую.
40. Даны прямая l: $2x+3y-7=0$ и точка $M_0(-3;\,4)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0: **а)** параллельно прямой l; **б)** перпендикулярно прямой l.
41. Дан треугольник ABC с вершинами $A(-3;\,6)$, $B(3;\,-4)$ и $C(7;\,4)$. Требуется: **а)** составить уравнение прямой AB; **б)** найти длину стороны AB; **в)** составить уравнение медианы проведенной из вершины A; **г)** составить уравнение высоты CK; **д)** найти расстояние от точки C до прямой AB; **е)** вычислить площадь треугольника ABC.
42. Даны уравнения сторон треугольника: AB: $3x-4y+24=0$, BC: $4x+3y+32=0$ и AC: $2x-y-4=0$. Составить уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины B.
43. В плоскости Ox_1x_2 изобразить область, определяемую системой линейных неравенств:

а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2\ge 6, \\ -x_1+x_2\le 3, \\ 2x_1-3x_2\le 12, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x_1-x_2\ge 4, \\ x_1+x_2\ge 3, \\ 3x_1+6x_2\le 24, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$

Плоскость и прямая в пространстве

44. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;\,1;\,-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(1;\,-2;\,3)$.
45. Проверить, что плоскости $2x-3y+5z-7=0$ и $2x-3y+5z+10=0$ параллельны.
46. Проверить, что плоскости $6x+3y-2z+3=0$ и $x+2y+6z-12=0$ перпендикулярны.
47. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\,-3;\,4)$: **а)** параллельно вектору $\vec{s}=(3;\,-4;\,2)$; **б)** перпендикулярно плоскости $x-3y+5z-4=0$.
48. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(4;\,5;\,-2)$ и $M_2(-1;\,3;\,6)$.

Предел функции

49. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cos\pi(2x-1)}{(x+1)e^{x-1}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{\ln(x-1)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{4x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x(x^2+4x+4)}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+6}{4x^2+2x-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3+x^2+5}$; з) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3\sin 2(x-1)}{x^2-1}$; и) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(1-\cos 6x)}{x^2}$;

к) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$; л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$; м) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}}$;

н) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$; о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x-1}$; п) $\lim\limits_{x\to2}\left(3-x\right)^{\frac{2}{x-2}}$.

Непрерывность функции

50. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность в точках x_1 и x_2:

а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, $x_1=1$, $x_2=3$; **б)** $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}$, $x_1=0$, $x_2=-1$.

51. Исследовать на непрерывность функцию

а) $f(x)=\begin{cases}2+x, & \textit{при}\ \ x\le-1,\\ x^2-1, & \textit{при}\ \ -1<x\le2,\\ 9-3x, & \textit{при}\ \ x\ge2.\end{cases}$ **б)** $f(x)=\begin{cases}x+4, & \textit{при}\ \ x\le-1,\\ x^2+2, & \textit{при}\ \ -1<x\le1,\\ 2x, & \textit{при}\ \ x\ge1.\end{cases}$

Дифференцирование функций

52. Найти производные функций:

а) $y=x^3-\dfrac{2}{x^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^2}+2$; **б)** $y=x^3\cdot\ln^2 x$; **в)** $y=\dfrac{\ln\cos x}{\cos x}$;

г) $y=\sqrt{1+e^{-2x}}$; **д)** $y=\dfrac{arctg\,x}{\sqrt{1+x^2}}$; **е)** $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$;

ж) $y=\dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$; **з)** $y=3^{\sqrt{arcsin\,2x}}$; **и)** $y=\left(xe^{2x}+1\right)^3$;

к) $y=tg^2\cos^3 3x$; **л)** $y=arctg^2\dfrac{1}{x}$; **м)** $y=\arcsin^3\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$;

н) $y=\cos^2 x+\ln tg\dfrac{x}{2}$; **о)** $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4$.

53. Найти логарифмические производные функций:

а) $y=2x+3$; **б)** $y=(x^2+1)e^{-2x}$; **в)** $y=(\sin 2x)^x$; **г)** $y=\dfrac{(2x+3)(1-x^2)}{\sqrt{x^2+2}}$.

54. Объем продукции Q (усл.ед.) цеха в течение рабочего дня представляет функцию $Q=-t^3-5t^2+75t+425$, где t-время (ч). Найти производительность труда через 2 часа после начала работы.

55. Зависимость между общими издержками производства TC (ден.ед.) и объемами выпускаемой продукции q (ед.) выражается функцией $TC = 10q - 0,04q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме продукции, равном 5 ед.
56. Функция потребления некоторой страны имеет вид $C(y) = 10 + 0,47y + 0,36y^{\frac{3}{4}}$, где y - совокупный национальный доход. Найти предельную склонность к потреблению и предельную склонность к сбережению при национальном доходе, равном 15 млрд. руб.
    Указание. Национальный доход, т.е. доход остающийся у населения после уплаты налогов, равен $y = C(y) + S(y)$, где $C(y)$ - функция потребления, выражающая ту часть дохода , которую население тратит, а $S(y)$ - функция сбережения. Тогда $C'(y) + S'(y) = 1$. Производные $C'(y)$ и $S'(y)$ называются соответственно предельной склонностью к потреблению и предельной склонностью к сбережению.
57. Приближенная величина вклада описывается функцией $K(t) = K_0(2t+3)^{3/2}$, где K_0 - величина вклада в начальный момент, t - число лет после открытия вклада. Найти номинальный банковский процент: **а)** через два года после открытия вклада; **б)** через пять лет после открытия вклада. Как при этом изменилась абсолютная скорость роста вклада?
58. Найти темп роста и эластичность функции $y = (2x+3)e^{-x^2}$ при $x = 2$.
59. На однотоварном рынке опытным путем установлены функции спроса $D = \dfrac{5p+5}{p+2}$ и предложения $S = p+1$, где D и S - количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p - цена товара. Определить: **а)** равновесное состояние рынка; **б)** эластичность спроса и предложения при равновесной цене; **в)** изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% от равновесной; **г)** указать величину затрат потребителя после введения дополнительного налога $t = 0,5$ на покупку единицы товара; **д)** указать величину уменьшения дохода производителя на единицу товара при дополнительном налоге t.
    Указание. Дополнительные затраты на единицу продукции при налоге t находят из равенства $\Delta p = \dfrac{t \cdot S'(p_0)}{S'(p_0) - D'(p_0)}$. Доход производителя при этом уменьшится на величину $t - \Delta p$.
60. Найти производные второго порядка функций:
    а) $y = xe^{-x}$; **б)** $y = e^{2x}\sin 2x$; **в)** $y = x^3 \ln x$; **г)** $y = (x^2+1)\cos x$.

Дифференциал функции

61. Вычислить приращение функции x^2+x-3 в точке $x_0=2$ при $\Delta x=0{,}1$. Найти дифференциал функции в точке $x_0=2$.
62. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, вычислить приближенно: а) $\sqrt{101}$; б) $\sqrt[5]{33}$; в) $\sin 32^0$.
63. Расход бензина автомобилями фирмы изменяется по закону $\mathrm{Q}=10-0{,}003\mathrm{v}-0{,}0001\mathrm{v}^2\left(\text{л}/100\text{км}\right)$, где v - скорость автомобиля. Цена бензина 0,5 доллара за литр. Рассчитать приближенно расход бензина автомобилем фирмы в условиях города: пробег 50км, $\mathrm{v}=55{,}2\,\text{км}/\text{ч}$. Каковы при этом затраты фирмы на эксплуатацию одного автомобиля?

Правило Лопиталя

64. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2+x-1}{2-x-3x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$; ж) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{5}{x}$; и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1-2x}+1}{\sqrt{3+x}-2}$; к) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x^2-4}\right)$.

Применение производной в исследовании поведения функции

65. Найти интервалы убывания и возрастания функций:

а) $y=x+\dfrac{9}{x}$; б) $y=(2+x)e^{-x}$; в) $y=x^3+x^2-5x+3$.

66. Найти точки экстремума функций:

а) $y=x^3+2x^2-7x+4$; б) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; в) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$;

г) $y=12x^3-12x^2-30x+1$.

67. Найти наибольшее значение функции $y=x^3-2x^2-4x+5$ на отрезке $[1;\,3]$.
68. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; б) $y=2x+e^{-x}$; в) $y=\dfrac{3x^2+4x+1}{x+2}$; г) $y=\dfrac{3-4x}{x-1}$.

69. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функций:

а) $y=2x^3-3x^2+15$; б) $y=x^3-6x^2$; в) $y=e^{-x^2}$; г) $y=\dfrac{1}{x}+x^2$.

70. Издержки производства некоторого товара объема q характеризуются функцией $TC=10q^2+16q+50$. Определить, при каком объеме

производства прибыль $\pi(q)$ будет максимальной, если цена товара изменяется по закону $p = 136 - 2q$.

Указание: $\pi(q) = q \cdot p - TC$.

71. Найти максимум прибыли, если доход и затраты на производство товара определяются функциями $R(q) = 100q - q^2$, $TC(q) = q^3 - 37q^2 + 169q + 4000$.

    Указание: $\pi(q) = R(q) - TC(q)$.

72. Исследовать функции и построить их графики:

    а) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$; б) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$; в) $y = x^3 - 12x^2 + 36x$, г) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

    д) $y = (2 + x)e^{-x}$; е) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4x + 5}$.

1. Линейная алгебра в экономике

Общественное производство на макроуровне должно подчиняться определенным закономерностям. Одной из таких закономерностей является сбалансированность общественного производства, как важнейшее условие его эффективного функционирования и развития. Балансовые модели нашли широкое применение при экономико-математическом моделировании экономических систем и процессов. В основе создания этих моделей лежит балансовый метод, т.е. метод взаимного сопоставления имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов и потребностей в них.

1.1. Модель межотраслевого баланса

Предположим, что производственная сфера народного хозяйства имеет *n* отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Для обеспечения производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление), т.е. каждая отрасль выступает одновременно и в роли производителя, и в роли потребителя. Будем рассматривать процесс производства за некоторый период времени *T* (квартал, год, пятилетка и т.д.).

Введем следующие обозначения:

x_i - общий объем продукции *i*–ой отрасли за промежуток времени *T* – так называемый валовой выпуск *i*-ой отрасли;

y_j - объем продукции *i*-ой отрасли, предназначенной к потреблению в непроизводственной сфере – объем конечного потребления. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, общественное потребление (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), возмещение потерь, экспорт;

x_{ij} - объем продукции i-ой отрасли, расходуемый отраслью j в процессе производства за время T, – так называемые производственно-эксплуатационные нужды j-ой отрасли в продукции i-ой отрасли. Значит, величины x_{ij} характеризуют межотраслевые потоки продукции.

Все указанные величины могут быть выражены либо в натуральных единицах (тонны, кубометры, штуки, киловатт-часы и т.д.), либо в стоимостных единицах. В дальнейшем будем иметь в виду, что величины x_i, x_{ij}, y_j даны в стоимостных единицах. Тогда, к примеру, величина x_{ij} понимается как стоимость средств производства, произведенной i-ой отраслью и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли j.

Принципиальная схема межотраслевого баланса (МОБ) дана в следующей таблице.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли						Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	…	j	…	n		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	y_2	x_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	y_i	x_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Амортизация	C_1	C_2	…	C_j	…	C_n		
Оплата труда	V_1	V_2	…	V_j	…	V_n		
Чистый доход	m_1	m_2	…	m_j	…	m_n		
Валовой продукт	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n		$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$

Балансовый характер таблицы выражается в следующем:

а) во-первых, для i-ой отрасли должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + ... + x_{ij} + ... + x_{in} + y_i \qquad (1.1.)$$

Равенство (1.1) следует понимать так: валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}$, и непроизводственное потребление, равное y_i.

б) Во-вторых, для j-ой отрасли должно выполняться соотношение

$$x_j = x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{nj} + z_j, \qquad (1.2)$$

где $z_j = C_j + (V_j + m_j)$.

<u>Определение.</u> Назовем условно чистой продукцией z_j по j-ой отрасли сумму амортизации C_j и чистой продукции $V_j + m_j$.

Экономический смысл равенства (1.2): валовой выпуск x_j есть сумма материальных затрат непосредственно в производстве, равная $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj}$, и условно чистой продукции в объеме z_j отрасли j.

Соотношения (1.1)-(1.2) называют соотношениями баланса или уравнениями распределения продукции по отраслям производства.

1.2. Продуктивные модели В. Леонтьева

В. Леонтьев установил важный факт: отношение x_{ij} / x_j зависит от технологии производства и, поскольку за время Т технология постоянна, то и отношение является постоянным. Пусть

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}. \qquad (1.3)$$

Величины a_{ij} называют коэффициентами прямых материальных затрат. Впрочем, иногда их называют технологическими или структурными, или коэффициентами материалоемкости.

Коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-ой отрасли необходимо, если учитывать только прямые затраты, для производства единицы продукции j-ой отрасли.

Запишем равенство (1.3) в виде

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j. \qquad (1.4)$$

Из равенства (1.4) вытекает следующее: для выпуска объема x_j продукции j-ой отрасли необходимо затратить продукции i-ой отрасли в количестве $a_{ij} \cdot x_j$. Иначе говоря, материальные издержки пропорциональны валовому объему производимой продукции. Это выражает известный принцип линейности существующей технологии.

Обратимся к равенству (1.1). В силу (1.4) это равенство примет вид

$$x_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n + y_i.$$

Следовательно, поскольку $i = 1, 2, ..., n$, балансовые соотношения по всем отраслям запишутся системой

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2, \\ .... \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Матрица А называется матрицей прямых затрат (технологическая или структурная матрица); матрица X - вектор-столбец валового выпуска; У – вектор-столбец конечного потребления, который характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода.

В матричной форме система уравнений (1.5) запишется в виде

$$X = AX + Y. \qquad (1.6)$$

Система уравнений (1.5), или в матричной форме (1.6) называется экономико-математической моделью (МОБ) Леонтьева.

Будем решать основную задачу МОБ: при известной матрице прямых затрат и заданном векторе конечного потребления найти вектор валового выпуска (за период времени Т).

Из (1.6) имеем $X = AX = (E - A)X = Y$.

Если $\det(E - A) \neq 0$, то получим матричное решение (1.6) в виде

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \qquad (1.7)$$

Равенство (1.7) и дает ответ на поставленный выше вопрос: сколько нужно произвести продукции различных видов, чтобы при имеющейся технологии производства обеспечить заданный уровень конечного потребления?

Заметим, что по экономическому смыслу все элементы матриц А, X, У неотрицательны, т.е. все эти матрицы неотрицательны: $A \geq 0,\ X \geq 0,\ Y \geq 0$.

Матрица $S = (s_{i\,j}) = (E - A)^{-1}$ называется матрицей полных материальных затрат, а ее элементы $s_{i\,j}$ - коэффициентами полных затрат.

Коэффициент полных затрат $s_{i\,j}$ *есть величина валового выпуска продукции i-ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j-ой отрасли.*

Обращаем внимание на следующее обстоятельство: коэффициент полных затрат включает в себя как прямые, так и косвенные затраты всех порядков.

Замечание. Если в задаче МОБ нужно найти лишь вектор валового выпуска, то систему уравнений (1.5) проще решить не методом обратной матрицы, а, скажем, методом Гаусса.

Определение. Матрица $A \geq 0$ называется продуктивной, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения (1.6).

Модель Леонтьева, определяемая продуктивной матрицей А, называется продуктивной.

Укажем критерии продуктивности матрицы.

Критерий 1. Если для матрицы $A \geq 0$ и некоторого вектора $Y \geq 0$ уравнение (1.6) имеет решение $X \geq 0$, то матрица А – продуктивная.

Критерий 2. Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и все ее элементы неотрицательны.

Пример 1. Исследовать на продуктивность матрицу $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Покажем сначала, что матрица $(E - A)^{-1}$ существует. Так как

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \text{ то } \det(E - A) = \begin{vmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 \\ -0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}2 - 0{,}18 = 0{,}02 \neq 0.$$

То, что матрица $(E - A)^{-1}$ неотрицательна, очевидно:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 30 & 20 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, по критерию 2 матрица А продуктивна.

Критерий 3. Для продуктивности матрицы $A \geq 0$ достаточно (но не необходимо!) выполнение неравенства

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} \leq 1 \tag{1.8}$$

и существование номера j такого, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} < 1. \tag{1.9}$$

Поясним этот критерий. Матрица $A \geq 0$ продуктивна, если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит единицы (неравенство (1.8)), причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы (неравенство (1.9)).

Критерий 3 имеет важный экономический смысл. Если сумма элементов любого столбца матрицы $A \geq 0$ меньше единицы, то матрица продуктивна. Значит тогда все элементы матрицы меньше единицы, т.е. должно выполняться неравенство

$$0 \leq a_{i\,j} < 1. \tag{1.10}$$

Экономический смысл неравенства (1.10): внутреннее потребление в достаточной мере мало по сравнению с валовым выпуском, что свидетельствует о рентабельности всех отраслей производства. В <u>стоимостной</u> модели баланса неравенство (1.9) означает, что при любом j суммарный вклад всех отраслей в выпуск продукции на одну денежную единицу продукции отрасли j меньше единицы, т.е. что отрасль j рентабельна.

<u>**Критерий 4.**</u> Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда наибольшее по модулю собственное значение λ^* (число Фробениуса) матрицы А меньше единицы.

Число λ^* служит оценкой общего уровня коэффициентов прямых затрат, а величина 1-λ^* характеризует остаток после затрат, т.е. продуктивность. Чем меньше λ^*, тем больше возможности достижения других целей, кроме текущего производственного потребления. Другими словами, чем выше уровень коэффициентов матрицы А, тем больше наибольшее по модулю собственное значение λ^* и ниже уровень продуктивности, и наоборот.

<u>**Пример.**</u> При каких значениях *a>0* матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & 3a & 5a \\ 3a & a & 6a \\ 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}$$

продуктивна?

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 3a & 5a \\ 3a & a-\lambda & 6a \\ 0 & 0 & 8a-\lambda \end{vmatrix} = (8a-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} a-\lambda & 3a \\ 3a & a-\lambda \end{vmatrix} = (8a-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda - 8a^2) = 0.$$

имеет корни $\lambda_1 = 8a,\ \lambda_2 = 4a,\ \lambda_3 = -2a.$ Число Фробениуса $\lambda^* =$ 8a. Значит, по критерию 4 матрица А будет продуктивной тогда и только тогда, когда $8a < 1$, т.е. $0 < a < \frac{1}{8}$.

<u>Определение.</u> Запасом продуктивности матрицы $A \geq 0$ называется число $\alpha > 0$, такое, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1 + \alpha$, продуктивны, а матрица $(1 + \alpha)A$ - не продуктивна.

<u>Пример.</u> Какой запас продуктивности имеет матрица из примера 1?

Рассмотрим матрицу

$$E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}6\lambda & -0{,}6\lambda \\ -0{,}3\lambda & 1 - 0{,}5\lambda \end{pmatrix},$$

для которой

$$\Delta = \det(E - \lambda A) = (1 - 0{,}6\lambda)(1 - 0{,}5\lambda) - 0{,}18\lambda^2 = 0{,}12\lambda^2 - 1{,}1\lambda + 1.$$

Следовательно,

$$(E - \lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - 0{,}5\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}6\lambda}{\Delta} \\ \dfrac{0{,}3\lambda}{\Delta} & \dfrac{1 - 0{,}6\lambda}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица согласно критерию 2 будет продуктивной, если $\Delta \neq 0$ и все ее элементы неотрицательны. Так как $\lambda > 1$, то приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 1 - 0{,}5\lambda \geq 0, \\ 1 - 0{,}6\lambda \geq 0, \\ 0{,}12\lambda^2 - 1{,}1\lambda + 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \leq 2, \\ \lambda \leq \dfrac{5}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} \lambda < \lambda_1, \\ \lambda > \lambda_2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Здесь

$$\lambda_1 = \frac{1{,}1 - \sqrt{0{,}73}}{0{,}24} \approx 1{,}023,$$

$$\lambda_2 = \frac{1{,}1 + \sqrt{0{,}73}}{0{,}24} \approx 8{,}143.$$

Отсюда следует, что $(E - \lambda A)^{-1} \geq 0$, если $1 < \lambda < 1{,}023$. Запас продуктивности матрицы A равен 0,023, т.е. $\alpha = 0{,}023$. Как видим, матрица A «на пределе» продуктивности.

<u>Замечание.</u> Рост производственных затрат вызывает увеличение коэффициентов прямых затрат и, как следствие, снижение запаса продуктивности матрицы A.

1.3. Модель равновесных цен

Рассмотрим модель Леонтьева с матрицей прямых затрат А и вектором валового выпуска $X=(x_1,x_2,...,x_n)$. Пусть p_i - цена единицы продукции i-ой отрасли, тогда вектор $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ назовем вектором цен. Доход i-ой отрасли будет равен $x_i p_i$. С другой стороны, часть своего дохода, равную $x_i(a_{1i}p_i+a_{2i}p_2+...+a_{ni}p_n)$, отрасль i затрачивает на закупку нужной ей продукции других отраслей; оставшуюся часть дохода обозначим через V_i и назовем добавленной стоимостью (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, инвестиции и т.д.).

Таким образом, для i-ой отрасли получаем балансовое уравнение

$$x_i p_i = x_i(a_{1i}p_i + a_{2i}p_2 + ... + a_{ni}p_n) + V_i.$$

Разделив это равенство на $x_i \neq 0$ и приняв обозначение $v_i = V_i / x_i$, получим

$$p_i = (a_{1i}p_i + a_{2i}p_2 + ... + a_{ni}p_n) + v_i.$$

По всем отраслям балансовые равенства примут вид

$$\begin{cases} p_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n + v_1, \\ p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n + v_2, \\ p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n + v_n. \end{cases} \tag{1.11}$$

или в матричной форме

$$P = A^T P + v, \tag{1.12}$$

где $v=(v_1,v_2,...,v_n)^T$.

В равенствах (1.11)-(1.12) величина v_i - норма добавленной стоимости i-ой отрасли (добавленная стоимость, приходящаяся на единицу валовой продукции i-ой отрасли).

Система уравнений (1.11), или, что то же, система (1.12), называется экономико-математической моделью равновесных цен. Если матрица А и вектор v заданы, то из (1.12) получим вектор равновесных цен

$$P = (E - A^T)^{-1} \cdot v,$$

где $(E-A^T)^{-1}$- транспонированная матрица полных затрат.

1.4. Линейная модель обмена или модель международной торговли

Пусть имеется n стран, торгующих между собой. Бюджеты (национальные доходы) стран соответственно равны $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ставится задача: какими должны быть соотношения между бюджетами стран, чтобы торговля была взаимовыгодной?

Будем считать, что весь свой бюджет каждая страна тратит на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Значит, если a_{ij} - доля бюджета i-ой страны, расходуемая на закупку товаров у j-ой страны, то должно выполняться равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.13}$$

<u>Определение.</u> Матрица $A = (a_{ij})$ со свойством (1.13) называется структурной матрицей торговли.

Для матрицы $A \geq 0$ условие (1.13) означает, что сумма элементов любого ее столбца равна единице.

Предположим, что структурная матрица торговли A для рассматриваемой системы стран задана. Тогда для i-ой страны выручка от торговли составит

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Для того, чтобы торговля между странами была взаимовыгодной, необходима ее сбалансированность и бездефицитность: выручка любой страны от торговли должна быть не меньше ее бюджета, т.е. $P_i \geq x_i$ для любого i. Однако, можно показать, что условием бездефицитной торговли являются равенства

$$P_i = x_i, \quad i = \overline{1, n},$$

из которых следует, что

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = x_i, \; P_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Окончательно линейная модель обмена запишется в виде системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = x_n, \end{cases}$$

или в матричной форме

$$AX = X, \tag{1.14}$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - вектор-столбец бюджета.

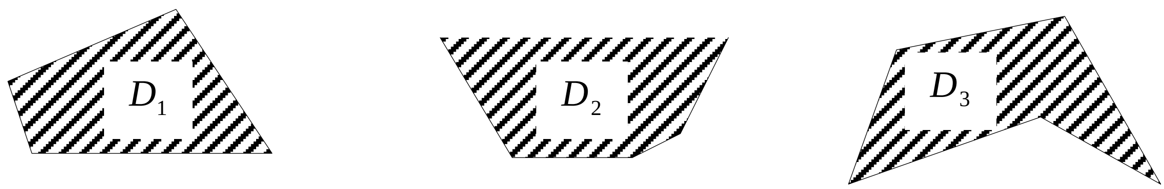
Из (1.14) следует, что вектор бюджета X есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda = 1$. Экономически это означает следующее: если одна из стран получает прибыль от торговли, то по крайней мере одна из остальных стран терпит убыток.

2. Выпуклые множества на плоскости

Рассмотрим некоторое множество D точек плоскости R^2.

Определение. Множество $D \subset R^2$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

На рисунке множества D_1 и D_2 - выпуклые, а множество D_3 – не выпукло.



По определению сама плоскость – выпуклое множество. Пересечение нескольких выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Возьмем на плоскости декартову систему координат $O x_1 x_2$. Тогда по отношению к этой системе всякую прямую на плоскости будем рассматривать как множество точек (x_1, x_2), координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени

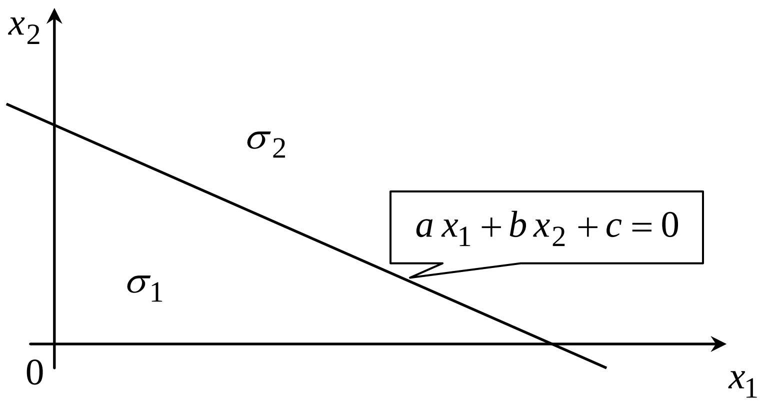
$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \tag{2.1}$$

где a, b, c – некоторые действительные числа, не все равные нулю одновременно.

Определение. Полуплоскостью в R^2 называется множество всех точек (x_1, x_2), координаты которых удовлетворяют заданному неравенству первой степени

$$ax_1 + bx_2 + c \geq 0. \tag{2.2}$$

Полуплоскость есть выпуклое множество, а пересечение нескольких полуплоскостей также будет выпуклым множеством. Любая прямая (2.1) «разделит» плоскость на две полуплоскости, которые условно обозначим через σ_1 и σ_2 и каждая из которых будет выпуклым множеством.



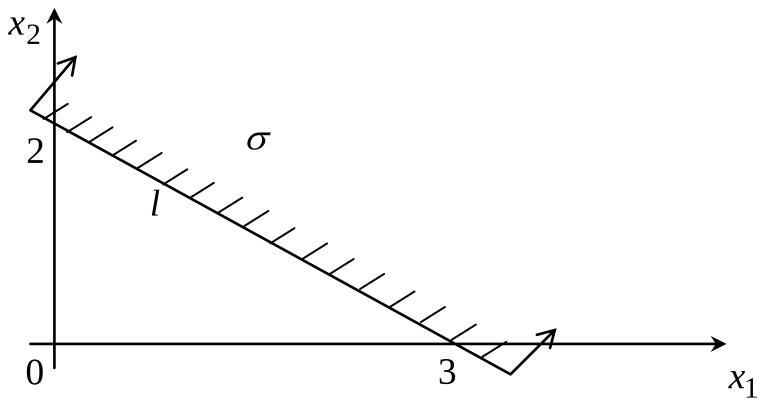
Значит неравенство (2.2) на плоскости $O\,x_1 x_2$ геометрически определяет либо полуплоскость σ_1, либо полуплоскость σ_2.

Пример. Какая полуплоскость задается неравенством

$$2x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0\,?$$

Чтобы ответить на поставленный вопрос построим прямую $l: 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$ и выясним, принадлежит ли искомой полуплоскости произвольная точка, не лежащая на l. В качестве такой точки обычно берут начало координат. При $x_1 = x_2 = 0$ из данного неравенства следует ложное неравенство $-6 \geq 0$.

Следовательно, искомой полуплоскостью будет полуплоскость σ, лежащая выше прямой l.



Определение. Пересечение нескольких полуплоскостей в R^2 называется выпуклой многоугольной областью в R^2.

Иначе говоря, выпуклая многоугольная область в R^2 задается с помощью системы нескольких неравенств вида (2.2).

Определение. Множество $D \subset R^2$ называется ограниченным, если существует положительное число m, такое, что координаты любой точки $(x_1, x_2) \in D$ по модулю не превосходят m: $|x_1| \leq m,\quad |x_2| \leq m.$

Определение. Ограниченная выпуклая многоугольная область D в R^2 называется выпуклым многоугольником в R^2.

Пример. Изобразить выпуклый многоугольник, определяемый системой неравенств

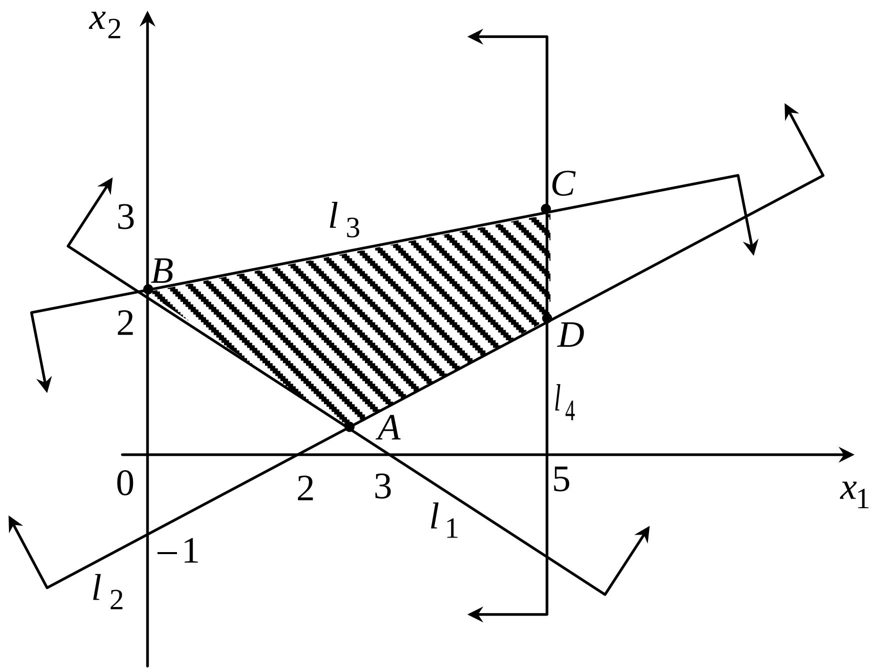
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 5. \end{cases}$$

В плоскости Ox_1x_2 строим прямые:

$$l_1 : 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0,$$
$$l_2 : \ x_1 - 3x_2 - 3 = 0,$$
$$l_3 : \ -x_1 + 4x_2 - 3 = 0,$$
$$l_4 : \ x_1 = 5.$$

По этим прямым определяем полуплоскости (на рисунке они отмечены стрелками), отвечающие соответствующим неравенствам системы. Пересечением четырех полуплоскостей будет ограниченная выпуклая многоугольная область – четырехугольник ABCD.

Окончательно данная система неравенств на плоскости Ox_1x_2 задает выпуклый четырехугольник ABCD.



3. Задания для аттестационной работы по теме «Линейная алгебра в экономике»

<u>Задание 1.</u> Предприятие состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции. В следующей таблице указаны: расходные коэффициенты a_{ij} («прямые» затраты) единиц продукции i-го цеха, используемые как «сырье» для выпуска единиц продукции j-го цеха; количество y_i единиц продукции, предназначенных для реализации (конечный продукт); расходные нормы b_{ij} двух видов сырья S_1 и S_2 и топлива на единицу продукции соответствующего цеха; трудоемкость b_j продукции в человеко-часах на единицу продукции; стоимость c_i (в условных единицах) соответствующего материала и оплата p за 1 человеко-час.

Цеха	a_{ij}			y_i	**Материал**	b_{ij}			**Стоим.** c_i
	I	II	III			I	II	III	
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	y_1	**Сырьё** S_1	b_{11}	b_{12}	b_{13}	c_1
II	a_{21}	a_{22}	a_{23}	y_2	**Сырьё** S_2	b_{21}	b_{22}	b_{23}	c_2
III	a_{31}	a_{32}	a_{33}	y_3	**Топливо**	b_{31}	b_{32}	b_{33}	c_3
					Трудоемкость	b_1	b_2	b_3	p

Требуется:

1) составить в координатной и матричной формах уравнения межотраслевого балланса по Леонтьеву;

2) определить:

а) коэффициенты полных затрат;

б) валовой выпуск (план) для каждого цеха;

в) производственную программу цехов;

г) коэффициенты косвенных затрат;

д) суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы;

е) коэффициенты затрат сырья, топлива и трудовых ресурсов на единицу конечной продукции каждого цеха;

ж) расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по цехам;

з) производственные затраты (в условных единицах) по цехам и на всю производственную программу предприятия;

и) производственные затраты на единицу конечной продукции для каждого цеха.

Необходимые числовые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Данные	**Вариант**														
	01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a_{11}	0,4	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,4	0,4	0,2	0,5	0,1
a_{12}	0,3	0,3	0,2	0,4	0,3	0,4	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4
a_{13}	0,2	0,2	0,1	0,2	0,4	0,4	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
a_{21}	0,5	0,2	0,5	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1
a_{22}	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,5	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	0,3	0,2	0,3	0,2
a_{23}	0,2	0,3	0,2	0,3	0,5	0,2	0,5	0,1	0,4	0,3	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3
a_{31}	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,5	0,4	0,3	0,5	0,2	0,2	0,4	0,1	0,3
a_{32}	0,2	0,1	0,1	0,5	0,2	0,2	0,2	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1
a_{33}	0,2	0,4	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1	-	0,1	0,4	0,2
y_1	6	35	50	22	1	8	8	7	21	15	12	12	5	20	4
y_2	66	0	22	23	32	32	4	43	31	19	5	18	45	10	5
y_3	4	5	4	2	0	2	50	5	4	15	6	2	50	9	12
b_{11}	1,4	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	1,7	1,8	1,3
b_{12}	2,4	2,0	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,5	2,4	2,5	2,3	1,9
b_{13}	0,8	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,1	1,2	1,4	2,3
b_{21}	-	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,5	2,4	2,3	2,4	2,3	2,4	1,8	1,7	1,4
b_{22}	0,6	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	-	1,2	1,3	1,8
b_{23}	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	1,8	2,2	2,3	2,5
b_{31}	2,0	1,9	1,8	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,3	1,7	0,6	0,9	1,3
b_{32}	1,8	2,1	2,2	2,3	2,4	2,3	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	0,8	0,9	2,1	2,5
b_{33}	2,2	2,3	2,4	2,5	2,4	2,5	2,4	2,5	2,1	2,2	2,4	0,7	0,6	1,2	1,8
b_1	10	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	15	14	12	10
b_2	15	10	11	8	9	11	12	13	14	15	16	13	18	20	11
b_3	20	15	14	9	10	12	13	14	15	16	17	12	19	21	15
c_1	5	6	7	8	5	6	7	8	9	10	11	6	4	5	5
c_2	8	9	8	10	4	7	8	9	10	11	12	7	8	9	6
c_3	6	7	10	11	3	8	9	10	11	12	13	10	11	12	10
p	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1,4	1,3	1,2	1,2	2,1	2,3	2,4	2,5	3,0

Продолжение таблицы 1

Дан-ные	Вариант														
	16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a_{11}	0,1	0,4	0,1	0,5	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5
a_{12}	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1
a_{13}	0,4	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,4	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1
a_{21}	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,4	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
a_{22}	0,1	0,4	0,2	0,5	0,1	0,3	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3
a_{23}	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3	0,2	0,3	0,2
a_{31}	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,4	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1
a_{32}	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4	0,1
a_{33}	0,1	0,4	0,3	0,5	0,3	0,3	0,2	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2
y_1	13	11	26	20	30	46	10	10	100	5	45	45	100	40	80
y_2	71	13	68	30	120	23	70	80	120	65	60	5	180	20	40
y_3	7	3	14	20	90	47	10	50	140	20	15	50	20	15	50
b_{11}	-	1,5	1,8	2,1	-	2,3	2,4	2,2	2,0	1,9	2,5	2,1	2,3	2,0	1,9
b_{12}	0,6	-	0,7	2,2	1,5	1,6	1,8	2,0	-	1,8	2,4	1,5	1,6	1,7	-
b_{13}	0,7	2,5	0,9	2,3	1,6	1,7	1,5	1,6	1,9	1,7	1,8	1,1	0,9	0,7	0,8
b_{21}	0,9	0,5	-	0,8	0,4	-	1,2	1,5	2,4	2,1	-	2,3	1,4	2,4	0,4
b_{22}	1,2	0,6	1,2	1,5	2,1	0,8	2,3	2,4	-	2,3	1,9	0,7	2,0	-	1,8
b_{23}	1,3	1,5	1,4	2,1	1,8	1,5	1,6	1,7	1,5	1,6	1,7	2,4	2,3	2,2	2,1
b_{31}	1,4	2,3	2,5	2,0	2,3	1,6	1,7	1,8	0,5	0,9	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8
b_{32}	2,3	2,1	3,1	1,9	1,7	2,3	2,0	2,4	0,7	2,3	0,6	2,0	1,9	1,8	1,7
b_{33}	0,8	0,9	1,6	1,7	0,6	0,7	0,5	0,6	1,3	0,7	1,5	0,6	0,7	0,9	0,4
b_1	16	15	10	15	14	13	10	11	12	15	14	10	10	11	13
b_2	17	16	17	18	12	11	12	13	15	10	13	12	12	14	15
b_3	12	10	18	20	13	12	13	14	15	14	12	15	20	20	21
c_1	5	6	7	8	6	9	6	7	7	8	5	6	7	9	7
c_2	4	5	9	10	7	10	9	5	7	8	4	8	10	6	4
c_3	3	10	11	10	12	15	10	8	10	5	3	5	12	8	6
p	2,6	2,4	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,6	1,3	2,2	2,1	1,8	1,4	1,5

Задание 2. В таблице представлен межотраслевой баланс модели хозяйства

Отрасли производ-ства	Отрасли потребления				
	x_{ij}			Конечный продукт, y_i	Валовый Продукт, x_j
	I	II	III		
I	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1
II	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2
III	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3
Затраты труда	b_1	b_2	b_3		

Требуется:

а) найти структурную матрицу и коэффициенты полных затрат;

б) найти полные затраты труда на обеспечение вектора конечного продукта $Y=(y_1, y_2, y_3)$;

в) вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если объемы конечного продукта на первой и второй отрасли увеличить на α %, а конечное потребление в третьей отрасли уменьшить на β %

Данные к задаче приведены в таблицах 2.

Таблица 2

Вар	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
x_{11}	7	3	4	17	13	14	15	21	21	5	10	6	10	5	10
x_{12}	21	13	23	14	7	16	23	15	15	8	13	14	13	13	50
x_{13}	13	5	50	23	14	30	21	15	30	4	11	5	17	12	60
x_{21}	12	5	10	30	15	34	18	30	30	6	17	4	14	11	90
x_{22}	15	10	15	16	16	17	13	14	40	9	9	7	12	5	70
x_{23}	14	4	30	15	17	10	14	13	10	12	8	14	4	4	40
x_{31}	21	4	13	21	21	8	21	12	10	7	5	15	16	8	45
x_{32}	30	20	40	15	8	31	17	17	40	10	14	13	5	6	25
x_{33}	20	7	10	12	5	15	15	20	15	13	13	25	19	7	40
x_1	100	50	120	100	50	100	100	100	200	30	50	50	100	50	300
x_2	100	100	100	100	80	80	80	100	200	40	50	60	80	50	300
x_3	100	80	100	80	50	100	100	100	100	50	50	80	60	30	250
y_1	59	29	43	46	16	40	41	49	134	13	16	25	60	20	180
y_2	59	81	45	39	32	19	35	43	120	13	16	35	50	30	100
y_3	29	49	37	32	16	46	47	51	35	20	18	27	20	9	140

Продолжение таблицы 2

b_1	25	5	10	20	16	5	20	15	20	15	21	17	30	5	15
b_2	15	7	15	15	14	7	15	4	10	10	14	12	40	7	14
b_3	10	4	12	5	20	10	7	13	15	5	7	20	20	6	13
$\alpha\%$	3	4	5	4	2	4	1	2	3	4	2	3	1	2	5
$\beta\%$	4	3	4	2	3	5	3	1	3	2	4	1	3	5	2

Вар	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_{11}	21	15	21	14	5	10	70	50	30	49	3	31	7	52	12
x_{12}	15	14	14	13	8	80	60	15	40	31	10	22	15	14	13
x_{13}	4	13	10	60	10	90	10	30	13	60	15	81	19	3	51
x_{21}	20	12	17	60	3	70	15	21	17	50	7	17	16	17	21
x_{22}	8	11	16	21	7	30	14	30	20	14	12	33	17	50	16
x_{23}	16	10	15	15	21	10	50	60	16	16	17	15	21	31	14
x_{31}	13	9	13	20	4	40	10	20	21	40	14	16	21	13	71
x_{32}	17	8	15	51	12	10	20	25	31	25	16	51	18	10	15
x_{33}	11	7	20	30	15	15	40	30	20	20	18	17	27	50	13
x_1	200	100	100	250	50	300	300	200	150	230	50	200	150	200	150
x_2	100	100	90	250	100	200	200	200	110	200	60	150	100	150	100
x_3	100	100	80	250	100	150	150	160	150	200	100	150	100	200	150
y_1	160	58	55	163	27	120	160	105	67	90	22	66	109	131	74
y_2	56	67	42	154	69	90	121	89	57	120	24	85	46	52	49
y_3	59	76	32	149	69	85	80	85	78	115	52	66	34	127	51
b_1	17	15	15	15	12	15	17	12	20	17	4	7	10	25	17
b_2	12	13	20	7	14	17	8	13	15	13	13	8	15	5	5
b_3	20	17	10	3	16	2	10	4	25	5	6	10	5	10	10
$\alpha\%$	3	6	2	4	2	6	7	5	2	4	6	3	3	3	3
$\beta\%$	6	5	6	1	6	5	5	1	2	4	3	6	5	5	2

Задание 3. Производственная сфера народного хозяйства состоит из трёх отраслей и характеризуется структурной матрицей $A = (a_{i\,j}),\ i, j = \overline{1,3}$. Рассчитать равновесные цены по отраслям при заданном векторе норм добавленной стоимости $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Как изменятся цены на продукцию, если норму добавленной стоимости по i-ой отрасли увеличить на p %?

Коэффициенты $a_{i\,j}$ взять согласно своего варианта из таблицы 1. Значения параметров $v_1, v_2,\ v_3,\ i,\ p$ даны в таблице 3.

Таблица 3

Вар.	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
v_1	2	4	10	8	4	6	5	3	7	6	8	9	7	2	3
v_2	4	5	8	7	2	12	5	4	10	5	9	16	9	10	4
v_3	10	2	6	3	8	10	4	6	4	3	5	6	5	4	7
i	2	3	1	3	3	1	1	2	2	3	3	2	2	3	1
p%	3	2	4	5	3	2	3	5	3	3	2	4	5	3	4

Вар.	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
v_1	6	4	5	4	6	6	7	3	5	4	8	3	9	4	6
v_2	9	4	2	8	2	5	3	7	3	3	9	6	4	9	2
v_3	5	5	2	2	4	2	4	6	4	3	2	8	3	5	8
i	1	2	3	3	2	3	1	1	2	3	1	1	3	2	1
p%	6	3	2	5	4	2	4	3	2	3	2	6	6	5	6

Задание 4. Осуществляется сбалансированная бездефицитная торговля четырёх стран со структурной матрицей $A=(a_{i\,j})$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$. Найти бюджеты стран при условии, что сумма бюджетов составляет S условных единиц.

1. $A=\begin{pmatrix}0.3&0.5&0.2&0.3\\0.2&0.2&0.2&0.3\\0.1&0.2&0.4&0.1\\0.4&0.1&0.2&0.3\end{pmatrix}$, S = 22204.	**2.** $A=\begin{pmatrix}0.4&0.1&0.2&0.3\\0.1&0.2&0.4&0.1\\0.2&0.2&0.2&0.3\\0.3&0.5&0.2&0.3\end{pmatrix}$, S = 16254.	**3.** $A=\begin{pmatrix}0.2&0.2&0.2&0.3\\0.4&0.1&0.2&0.3\\0.3&0.5&0.2&0.3\\0.1&0.2&0.4&0.1\end{pmatrix}$, S = 59480.
4. $A=\begin{pmatrix}0.3&0.5&0.2&0.3\\0.4&0.1&0.2&0.3\\0.2&0.2&0.2&0.3\\0.1&0.2&0.4&0.1\end{pmatrix}$, S = 89110.	**5.** $A=\begin{pmatrix}0.2&0.5&0.3&0.3\\0.2&0.2&0.2&0.3\\0.4&0.2&0.1&0.1\\0.2&0.1&0.4&0.3\end{pmatrix}$, S = 49880.	**6.** $A=\begin{pmatrix}0.2&0.1&0.4&0.3\\0.4&0.2&0.1&0.1\\0.2&0.2&0.2&0.3\\0.2&0.5&0.3&0.3\end{pmatrix}$, S = 59616.
7. $A=\begin{pmatrix}0.2&0.2&0.2&0.3\\0.2&0.1&0.4&0.3\\0.2&0.5&0.3&0.3\\0.4&0.2&0.1&0.1\end{pmatrix}$, S = 50920.	**8.** $A=\begin{pmatrix}0.2&0.5&0.3&0.3\\0.2&0.1&0.4&0.3\\0.2&0.2&0.2&0.3\\0.4&0.2&0.1&0.1\end{pmatrix}$, S = 47584.	**9.** $A=\begin{pmatrix}0.2&0.5&0.3&0.3\\0.2&0.1&0.4&0.3\\0.4&0.2&0.1&0.1\\0.2&0.2&0.2&0.3\end{pmatrix}$, S = 52920.

10. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 38120.	**11.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 40680.	**12.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 40920.
13. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$, S = 63210.	**14.** $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$, S = 55090.	**15.** $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$, S = 58590.
16. $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 70290.	**17.** $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 61530.	**18.** $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 109710.
19. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$, S = 44360.	**20.** $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 4914.	**21.** $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$, S = 81690.
22. $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 106290.	**23.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 40040.	**24.** $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 69300.
25. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 50568.	**26.** $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 65826.	**27.** $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 133080.

28.	29.	30.
$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 76930.	$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 92316.	$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$, S = 70770.

Задание 5. Малое предприятие изготавливает два вида продукции $П_1$ и $П_2$. На изготовление одной единицы продукции $П_1$ требуется m_1 чел.--часов, а на изготовление одной единицы продукции $П_2$ нужно затратить m_2 чел.-часов. Стоимость сырья необходимого для изготовления единицы продукции $П_1$ равна p_1 денежных единиц, для продукции $П_2$ эта стоимость равна p_2 денежных единиц. Прибыль от реализации одной единицы продукции $П_1$ равна C_1 денежных единиц, для продукции $П_2$ –C_2 денежных единиц. Возможности предприятия ограничены следующими обстоятельствами:

1. по контракту предприятие за неделю должно произвести по меньшей мере n_1 единиц продукции $П_1$ и n_2 единиц продукции $П_2$;
2. на изготовление продукции должно быть затрачено не более К чел.-часов за неделю;
3. еженедельные затраты на сырьё не должны превышать N денежных единиц;
4. прибыль должна быть не менее С денежных единиц.

Используя таблицу 4, составить систему линейных неравенств, удовлетворяющую ограничениям задачи по производству продукции. Изобразить графически выпуклую многоугольную область, определяемой составленной системой неравенств.

Таблица 4

Вар.	m_1	m_2	p_1	p_2	n_1	n_2	C_1	C_2	**К**	**N**	**C**
01	11	7	6	8	20	24	1,5	1,2	600	450	72
02	9	8	7	8	6	5	3	4	774	600	120
03	4	2	2	2,5	8	5	1,5	1,2	160	100	35
04	7	8	14	16	6	5	0,3	0,4	800	1200	12
05	8	5	4	5	15	10	1,5	1,2	320	200	45
06	6	4	5	8	10	15	3	2	360	400	60
07	5	4	10	8	8	7	0,5	1,5	250	720	30
08	11	10	12	14	20	25	1,2	1,4	800	960	60
09	12	7	3	4	20	15	1,5	1,2	600	300	70
10	14	8	3,5	4,5	22	17	1,5	1,2	640	320	75
11	2	3	4	5	6	4	1,2	1,5	120	140	30

Продолжение таблицы 4.

12	6	5	12	10	10	10	2	3	300	720	50
13	9	6	2,5	3,5	16	14	1,5	1,2	300	180	50
14	10	9	4	6	18	16	15	12	400	250	300
15	15	12	5	4	8	10	1	0,8	600	400	16
16	12	14	6	4,5	14	18	1,5	1,2	550	380	48
17	7	9	4,5	3	10	12	1,5	1,2	380	600	70
18	10	15	7	5	15	12	2,5	1,5	750	495	75
19	15	10	5	7	12	15	1,5	2,5	750	495	75
20	8	10	5	6	12	15	1,5	1,2	540	650	80
21	10	8	6	5	15	12	1,2	1,5	540	650	80
22	8	10	4	5	9	10	4	5	800	300	80
23	7	9	8	6	8	12	1,3	1,8	450	480	39
24	6	8	15	5	20	10	1,4	1,2	480	750	56
25	15	5	6	8	12	13	0,8	1	750	480	32
26	12	8	4	6	10	8	1,5	2	600	300	45
27	5	7	3	7	9	10	1,6	1,7	420	350	64
28	6	14	10	14	7	13	1,8	1,3	700	840	72
29	7	6	2	12	8	15	1,4	1,3	450	540	42
30	14	12	7	6	9	8	1	2	960	450	30

Задание 6. Собственные средства коммерческого банка в сумме с депозитами составляют не более N млн. дол. Часть этих средств, но не менее n млн. дол., должна быть размещена в кредитах, которые являются неликвидными активами банка. Для компенсации неликвидности кредитов банк должен покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги. Предположим, что ликвидное ограничение таково: ценные бумаги составляют не менее p% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Составить систему линейных неравенств, удовлетворяющих ограничениям задачи о работе банка. Изобразить графически область, определяемую системой неравенств.

Данные к задаче взять из таблицы 5.

Таблица 5

Вар.	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
N	200	150	180	175	125	220	250	195	160	190	240	225	120	240	200
n	40	25	32	30	20	38	35	26	42	35	45	28	24	45	30
p%	35	36	45	38	28	30	32	40	35	30	25	32	35	40	33

Вар.	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
N	100	300	250	250	140	260	170	230	180	280	175	400	420	450	350
n	34	38	39	40	31	40	30	35	36	44	29	32	45	42	30
p%	31	34	42	36	25	35	30	40	35	30	24	37	35	34	32

4. Решение типового варианта

Задача 1. $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0.2$, $a_{13} = 0.1$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.3$, $a_{23} = 0.2$, $a_{31} = 0.5$, $a_{32} = 0.1$, $a_{33} = 0.2$, $y_1 = 150$, $y_2 = 100$, $y_3 = 200$, $b_{11} = 1.5$, $b_{12} = 2.4$, $b_{13} = 0.8$, $b_{21} = 0.6$, $b_{22} = 0$, $b_{23} = 2.1$, $b_{31} = 1.6$, $b_{32} = 1.2$, $b_{33} = 2.0$, $c_1 = 10$, $c_2 = 15$, $p = 1.8$, $b_1 = 10$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$.

Решение. Запишем данные задачи в следующую таблицу:

Цеха	a_{ij}			y_i	Материал	b_{ij}			Стоимость
	I	II	III			I	II	III	
I	0	0,2	0,1	150	**Сырье S_1**	1,5	2,4	0,8	10
II	0,4	0,3	0,2	100	**Сырье S_2**	0,6	-	2,1	15
III	0,5	0,1	0,2	200	**Топливо**	1,6	1,2	2,0	5
					Трудоемк.	10	20	30	1,8

1. Пусть производственная программа (план) предприятия есть вектор $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, где x_i – валовой выпуск (объем) продукции i-го цеха. План выпуска товарной продукции обозначим через вектор $Y = (y_1, y_2, y_3)$, а структурную матрицу – матрицей $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1.3}; j = \overline{1.3}$. Тогда производственные взаимосвязи предприятия представляются балансовыми уравнениями (см. (1.5))

$$x_i - \left(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3\right) = y_i; \quad i = \overline{1.3} \tag{4.1}$$

Заметим, что сумма в скобках в левой части (4.1) отражает внутрипроизводственное потребление.

В матричной форме балансовые равенства (4.1) примут вид

$$(E - A) \cdot X = Y, \tag{4.2}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Из (4.1) получим линейную систему

$$\begin{cases} x_1 - (0 \cdot x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3) = 150, \\ x_2 - (0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3) = 100, \\ x_3 - (0{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3) = 200, \end{cases}$$

откуда приходим к системе:

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3 = 150, \\ -0{,}4x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}2x_3 = 100, \\ -0{,}5x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}8x_3 = 200 \end{cases} \text{ с матрицей } E - A = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.2 & -0.1 \\ -0.4 & 0.7 & -0.2 \\ -0.5 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

2. а) Решением уравнения (4.2) служит матрица $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$. Коэффициенты полных затрат являются элементами матрицы $(E - A)^{-1}$. Найдем эту матрицу.

Вычислим определитель матрицы $(E - A)$:

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 1{,}0 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 1{,}0 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{vmatrix} -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{vmatrix} -$$

$$- 0{,}1 \cdot \begin{vmatrix} -0{,}4 & 0{,}7 \\ -0{,}5 & -0{,}1 \end{vmatrix} = 1{,}0 \cdot 0{,}54 + 0{,}2 \cdot (-0{,}42) - 0{,}1 \cdot 0{,}39 = 0{,}417.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы E - A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}54; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}42;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -0{,}4 & 0{,}7 \\ -0{,}5 & -0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}39; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}17;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1{,}0 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}75; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1{,}0 & -0{,}2 \\ -0{,}5 & -0{,}1 \end{vmatrix} = 0{,}20;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}7 & -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}11; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1{,}0 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}2 \end{vmatrix} = 0{,}26;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1{,}0 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}62.$$

Следовательно, матрица полных затрат примет вид:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0.417} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}17 & 0{,}11 \\ 0{,}42 & 0{,}75 & 0{,}26 \\ 0{,}39 & 0{,}20 & 0{,}62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}295 & 0{,}408 & 0{,}264 \\ 1{,}007 & 1{,}799 & 0{,}576 \\ 0{,}935 & 0{,}480 & 1{,}487 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что, к примеру, для выпуска одной единицы конечной продукции цехами I, II, III необходимо затратить валовой продукции цеха II соответственно 1,007; 1,799 и 0,576 единиц.

б) Определим валовой выпуск продукции цехами:

$$X = (E-A)^{-1}\cdot Y \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}295 & 0{,}408 & 0{,}264 \\ 1{,}007 & 1{,}799 & 0{,}576 \\ 0{,}935 & 0{,}480 & 1{,}487 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}295\cdot 150 + 0{,}408\cdot 100 + 0{,}264\cdot 200 \\ 1{,}007\cdot 150 + 1{,}799\cdot 100 + 0{,}576\cdot 200 \\ 0{,}935\cdot 150 + 0{,}480\cdot 100 + 1{,}487\cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287{,}85 \\ 446{,}15 \\ 485{,}65 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$x_1 = 287{,}85; \qquad x_2 = 446{,}15; \qquad x_3 = 485{,}65,$$

а вектор

$$X = (287{,}85;\ 446{,}15;\ 485{,}65)$$

есть вектор валового выпуска продукции по цехам.

в) Производственную программу цехов определим из соотношения Леонтьева

$$x_{ij} = a_{ij}\cdot x_j:$$

$x_{11} = a_{11}\cdot x_1 = 0\cdot 287{,}85 = 0;$ $\quad x_{12} = a_{12}\cdot x_2 = 0{,}2\cdot 446{,}15 = 89{,}23;$

$x_{13} = a_{13}\cdot x_3 = 0{,}1\cdot 485{,}65 = 48.57;$ $\quad x_{21} = a_{21}\cdot x_1 = 0{,}4\cdot 287{,}85 = 115{,}14;$

$x_{22} = a_{22}\cdot x_2 = 0{,}3\cdot 446{,}15 = 133{,}85;$ $\quad x_{23} = a_{23}\cdot x_3 = 0{,}2\cdot 485{,}65 = 97{,}13;$

$x_{31} = a_{31}\cdot x_1 = 0{,}5\cdot 287{,}85 = 143{,}93;$ $\quad x_{32} = a_{32}\cdot x_2 = 0{,}1\cdot 446{,}15 = 44{,}62;$

$x_{33} = a_{33}\cdot x_3 = 0{,}2\cdot 485{,}65 = 97{,}13.$

В результате получим следующую таблицу:

Цеха	**Внутрипроизводственное потребление (x_{ij})**			$\sum x_{ij}$	**Конечный продукт, y_i**	**Валовый выпуск, x_i**
I	-	89,23	48,57	137,80	150	287,85
II	115,14	133,85	97,13	346,12	100	446,15
III	143,93	44,62	97,13	285,68	200	485,65

Из таблицы видно, что балансовые равенства по всем цехам

$$\sum_i x_{ij} + y_i = x_i, \quad i = \overline{1{,}3}$$

выполняются в некотором приближении. Это обусловлено ошибками, возникающими в результате округлений промежуточных вычислений.

г) Коэффициенты косвенных затрат найдем как разность между соответствующими коэффициентами полных и прямых затрат:

$$(E-A)^{-1}-A=\begin{pmatrix}1,295 & 0,408 & 0,264\\ 1,007 & 1,799 & 0,576\\ 0,935 & 0,480 & 1,487\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0,2 & 0,1\\ 0,4 & 0,3 & 0,2\\ 0,5 & 0,1 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,295 & 0,208 & 0,164\\ 0,607 & 1,499 & 0,376\\ 0,435 & 0,380 & 1,287\end{pmatrix}$$

д) Находим суммарные расходы сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение плана X.

В нашем случае расходная матрица по сырью, топливу и трудовым ресурсам имеет вид:

$$B=\begin{pmatrix}1,5 & 2,4 & 0,8\\ 0,6 & 0 & 2,1\\ 1,6 & 1,2 & 2,0\\ 10 & 20 & 30\end{pmatrix}.$$

Тогда суммарные расходы (в условных единицах) на выполнение плана X составят:

$$B\cdot X=\begin{pmatrix}1,5 & 2,4 & 0,8\\ 0,6 & 0 & 2,1\\ 1,6 & 1,2 & 2,0\\ 10 & 20 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}287,85\\ 446,15\\ 485,65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1891,05\\ 1192,58\\ 1967,24\\ 26371,00\end{pmatrix}\left|\begin{array}{l}\text{сырье } S_1\\ \text{сырье } S_2\\ \text{топливо}\\ \text{чел.}-\text{ч.}\end{array}\right.$$

е) Вычислим коэффициенты затрат сырья, топлива и трудовых ресурсов на единицу конечной продукции:

$$B\cdot(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1,5 & 2,4 & 0,8\\ 0,6 & 0 & 2,1\\ 1,6 & 1,2 & 2,0\\ 10 & 20 & 30\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1,295 & 0,408 & 0,264\\ 1,007 & 1,799 & 0,576\\ 0,935 & 0,480 & 1,487\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5,11 & 5,31 & 2,97\\ 2,74 & 1,25 & 3,28\\ 5,15 & 3,77 & 4,09\\ 61,14 & 54,46 & 58,77\end{pmatrix}$$

Полученные данные занесем в таблицу:

Ресурсы	**Цеха**		
	I	**II**	**III**
Сырье S_1	5,11	5,31	2,97
Сырье S_2	2,74	1,25	3,28
Топливо	5,15	3,77	4,09
Чел.-ч.	61,14	54,46	58,77

Для изготовления, например, первым цехом одной единицы продукции нужно затратить 5,11 ед. сырья S_1, 2,74 ед. сырья S_2, 5,15 ед. топлива и 61,14 чел.-ч.

ж) Расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по каждому из цехов получим следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 2,4 & 0,8 \\ 0,6 & 0 & 2,1 \\ 1,6 & 1,2 & 2,0 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 89,23 & 48.4 \\ 115,14 & 133,85 & 97,13 \\ 143,93 & 44,62 & 97,13 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|l} \begin{matrix} \mathrm{I} & \quad\mathrm{II} & \quad\mathrm{III} \end{matrix} & \\ \hline \begin{pmatrix} 391,48 & 490,78 & 383,67 \\ 302,25 & 147,24 & 233,12 \\ 426,03 & 392,63 & 388,53 \\ 6620,70 & 4907,90 & 5342,20 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \textit{сырье } S_1 \\ \textit{сырье } S_2 \\ \textit{топливо} \\ \textit{чел.-ч.} \end{matrix} \end{array}$$

з) Производственные затраты (в усл. ед.) по цехам равны:

$$(10 \quad 15 \quad 5 \quad 1,8) \cdot \begin{pmatrix} 391,48 & 490,78 & 383,67 \\ 302,25 & 147,24 & 233,12 \\ 426,03 & 392,63 & 388,53 \\ 6620,70 & 4907,90 & 5342,20 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} I & \qquad II & \qquad III \end{matrix} \\ (22495,96 \quad 17913,77 \quad 18892,11) \end{array}$$

Расходы на всю производственную программу предприятия составят $22495,96 + 17913,77 + 18892,11 = 59301,84$ усл. ед.

и) Производственные затраты на единицу конечной продукции, необходимые для определения ее себестоимости, по цехам равны:

$$(10 \quad 15 \quad 5 \quad 1,8) \cdot \begin{pmatrix} 5,11 & 5,51 & 2,97 \\ 2,74 & 1,25 & 3,28 \\ 5,15 & 3,77 & 4,09 \\ 61,14 & 54,46 & 58,77 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} I & \qquad II & \qquad III \end{matrix} \\ (228,00 \quad 188,73 \quad 205,14) \end{array}.$$

Итак, внутрипроизводственные затраты на единицу товарной продукции I, II, III цехов соответственно составляют 228,00; 188,73; 205,14 условных единиц.

Задача 2. $x_{11} = 30$, $x_{12} = 30$, $x_{13} = 20$, $x_{21} = 40$, $x_{22} = 45$, $x_{23} = 20$, $x_{31} = 32$, $x_{32} = 18$, $x_{33} = 40$, $y_1 = 120$, $y_2 = 45$, $y_3 = 160$, $x_1 = 200$, $x_2 = 150$, $x_3 = 250$, $b_1 = 20$, $b_2 = 30$, $b_3 = 60$, $\alpha = 6\%$, $\beta = 7\%$.

Решение. 1) Коэффициенты прямых затрат a_{ij}, которые служат элементами структурной матрицы, найдем из равенства

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

В нашем случае будем иметь

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{30}{200} = 0,15; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{30}{150} = 0,2; \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0,08;$$

$$a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{40}{200}=0,2;\quad a_{22}=\frac{x_{22}}{x_2}=\frac{45}{150}=0,3;\quad a_{23}=\frac{x_{23}}{x_3}=\frac{20}{250}=0,08;$$

$$a_{31}=\frac{x_{31}}{x_1}=\frac{32}{200}=0,16;\quad a_{32}=\frac{x_{32}}{x_2}=\frac{18}{150}=0,12;\quad a_{33}=\frac{x_{33}}{x_3}=\frac{40}{250}=0,16.$$

Следовательно, структурная матрица примет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0,15 & 0,20 & 0,08\\ 0,20 & 0,30 & 0,08\\ 0,16 & 0,12 & 0,16\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$E-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,15 & 0,20 & 0,08\\ 0,20 & 0,30 & 0,08\\ 0,16 & 0,12 & 0,16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,85 & -0,20 & -0,08\\ -0,20 & 0,70 & -0,08\\ -0,16 & -0,12 & 0,84\end{pmatrix}.$$

Для матрицы E-A находим

$$\det(E-A)=0,85\cdot\left(0,7\cdot 0,85-0,12\cdot 0,08\right)+0,2\cdot\left(-0,84\cdot 0,20-0,16\cdot 0,08\right)-$$
$$-0,08\cdot\left(0,20\cdot 0,12+0,16\cdot 0,70\right)=0,85\cdot 0,5784+0,20\cdot\left(-0,1808\right)+$$
$$+0,08\cdot 0,1360=0,466$$

$$A_{11}=0,5784;\quad A_{21}=0,1776;\quad A_{31}=0,0720;$$
$$A_{12}=0,1808;\quad A_{22}=0,7012;\quad A_{32}=0,0840;$$
$$A_{13}=0,1360;\quad A_{23}=0,1340;\quad A_{33}=0,5550.$$

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,466}\cdot\begin{pmatrix}0,5784 & 0,1776 & 0,0720\\ 0,1808 & 0,7012 & 0,0840\\ 0,1360 & 0,1340 & 0,5550\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,241 & 0,381 & 0,155\\ 0,388 & 1,505 & 0,180\\ 0,292 & 0,287 & 1,191\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы S и будут коэффициентами полных затрат. При этом валовые объемы выпуска по отраслям на вектор $Y=(120;\,45;\,160)$ будут определятся матрицей

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1,241 & 0,381 & 0,155\\ 0,388 & 1,505 & 0,180\\ 0,292 & 0,287 & 1,191\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}120\\ 45\\ 160\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}190,87\\ 143,09\\ 238,52\end{pmatrix}.$$

2) Вычислим коэффициенты прямых затрат труда

$$a_{41}=\frac{b_1}{x_1}=\frac{20}{200}=0,10;\quad a_{42}=\frac{b_2}{x_2}=\frac{30}{150}=0,20;\quad a_{43}=\frac{b_3}{x_3}=\frac{60}{250}=0,24.$$

Значит вектор прямых затрат труда запишется: $T=(0{,}10;\ 0{,}20;\ 0{,}24)$. Находим коэффициенты полных затрат

$$T\cdot S=\begin{pmatrix}0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1{,}241 & 0{,}381 & 0{,}155\\ 0{,}388 & 1{,}505 & 0{,}180\\ 0{,}292 & 0{,}287 & 1{,}191\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}27 & 0{,}41 & 0{,}53\end{pmatrix}.$$

Полные затраты труда на обеспечение вектора конечного продукта $Y=\left(120;\ 45;\ 160\right)$ составят

$$\left(T\cdot S\right)\cdot Y=0{,}27\cdot 120+0{,}41\cdot 45+0{,}53\cdot 160=135{,}65.$$

3) Предположим, что объемы конечного продукта по первой и второй отраслям увеличены на 6%, а по третьей отрасли уменьшены на 7%. Это значит, что конечный продукт будет определяться вектором $Y_1=(y_1,\ y_2,\ y_3)$, где

$$y_1=120\cdot 1{,}06=127{,}2;\qquad y_2=45\cdot 1{,}06=47{,}7;\qquad y_3=160\cdot 0{,}93=148{,}8.$$

Тогда необходимый объем валового выпуска по отраслям на вектор конечного продукта $Y_1=(127{,}2;\ \ 47{,}7;\ \ 148{,}8)$ будет равен:

$$X_1=S\cdot Y_1=\begin{pmatrix}1{,}241 & 0{,}381 & 0{,}155\\ 0{,}388 & 1{,}505 & 0{,}180\\ 0{,}292 & 0{,}287 & 1{,}191\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}127{,}2\\ 47{,}7\\ 148{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}199{,}09\\ 147{,}93\\ 228{,}05\end{pmatrix}.$$

Сравнивая компоненты векторов X и X_1, приходим к следующему заключению: если объемы конечного продукта по первой и второй отраслям увеличить на 6%, а по третьей отрасли уменьшить на 7%, то валовой объем по первой отрасли увеличится на 4,31%, по второй – на 3,38%, по третьей уменьшится на 4,39%.

Задача 3. $a_{11}=0;\quad a_{12}=0{,}2;\quad a_{13}=0{,}1;\quad a_{21}=0{,}4;\quad a_{22}=0{,}3;\quad a_{23}=0{,}2;$
$a_{31}=0{,}5;\quad a_{32}=0{,}1;\quad a_{33}=0{,}2;\quad v_1=6;\quad v_2=3;\quad v_3=8;\quad i=2;\quad p=7\%.$

Решение. Пусть $P=(p_1,\ p_2,\ p_3)$ есть вектор равновесных цен. Тогда (см. п. 1.3)

$$P=(E-A^T)^{-1}\cdot\bar{v},\tag{4.3}$$

где

$$A^T=\begin{pmatrix}0 & 0{,}4 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу полных затрат (см. решение задачи 1)

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}295 & 0{,}408 & 0{,}264\\ 1{,}007 & 1{,}799 & 0{,}576\\ 0{,}935 & 0{,}480 & 1{,}487\end{pmatrix}.$$

Транспонируя эту матрицу, получим

$$(E-A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}295 & 1{,}007 & 0{,}935\\ 0{,}408 & 1{,}799 & 0{,}480\\ 0{,}264 & 0{,}576 & 1{,}487\end{pmatrix}.$$

Теперь по заданному вектору норм добавленной стоимости $\overline{v}$ находим вектор равновесных цен.

$$\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}295 & 1{,}007 & 0{,}935\\ 0{,}408 & 1{,}799 & 0{,}480\\ 0{,}264 & 0{,}576 & 1{,}487\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18{,}27\\ 11{,}69\\ 15{,}21\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}p_1=18{,}27,\\ p_2=11{,}69,\\ p_3=15{,}21.\end{cases}$$

Таким образом, $P=(18{,}27;\ 11{,}69;\ 15{,}21)$.

Допустим, что во второй отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 7%. Принимая во внимание, что $\overline{v_1}=(6;\ 3{,}21;\ 8)$, получим

$$P_1=(E-A^T)^{-1}\cdot\overline{v_1}=\begin{pmatrix}18{,}48\\ 12{,}06\\ 15{,}33\end{pmatrix}.$$

Значит продукция первой отрасли подорожала на 1,11%, второй – на 3,17%, третьей отрасли – на 0,79%.

Задача 4.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix},$$

$$S=17289.$$

Решение. Пусть $X=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ – вектор бюджетов торгующих стран. Тогда по условию задачи

$$x_1+x_2+x_3+x_4=17289 \qquad (4.4)$$

С другой стороны, вектор X есть собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, удовлетворяющий уравнению

$$AX=X \quad \text{или} \quad (A\text{-}E)\,X=0 \qquad (4.5)$$

В координатной форме (4.5) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.6)$$

Из равентва (4.6) следует, что координаты x_1, x_2, x_3, x_4 вектора X являются ненулевыми решениями однородной линейной системы.

$$\begin{cases} -0{,}7x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 = 0, \\ 0{,}1x_1 - 0{,}8x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}1x_4 = 0, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}8x_3 + 0{,}3x_4 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 0{,}7x_4 = 0. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Будем решать систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & -0{,}8 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 18 & -16 & 1 & 0 \\ 0 & 33 & -14 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 276 & -231 & 0 \\ 0 & 0 & -276 & 231 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 276 & -231 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -51 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 92 & -77 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы (4.7) равен трем. Возьмем в качестве базисного минора матрицы системы (4.7) минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 0 & -51 & 30 \\ 0 & 0 & 92 \end{vmatrix} = -51 \cdot 92 \neq 0.$$

Тогда переменные x_1, x_2, x_3 – базисные, а x_4 – свободная. При $x_4 = m \neq 0$, $m \in R$ система (4.7) равносильна системе

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + \ 4x_3 = -m, \\ \quad -51x_2 + 30x_3 = -10m, \\ \qquad\qquad 92x_3 = 77m. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x_3 = \frac{77}{92}m, \qquad x_2 = \frac{3230}{4692}m, \qquad x_1 = \frac{5440}{4692}m, \qquad x_4 = m.$$

Подставляя значения x_1, x_2, x_3 и x_4 в равенство (4.4), получим:

$$\frac{5440}{4692}m + \frac{3230}{4692}m + \frac{77}{92}m + m = \frac{17289}{4692}m = 17289 \Rightarrow m = 4692.$$

Следовательно,

$x_1 = 5440$, $x_2 = 3230$, $x_3 = 3927$, $x_4 = 4692$.

Окончательно имеем искомый вектор бюджета

$$X = (5440; \quad 3230; \quad 3927; \quad 4692).$$

<u>Задача 5.</u> $m_1 = 7,\ m_2 = 3,\ p_1 = 7,\ p_2 = 9,\ c_1 = 1{,}6,\ c_2 = 1{,}2,$
$K = 420,\ N = 630,\ C = 48,\ n_1 = 12,\ n_2 = 13.$

<u>Решение.</u> Обозначим через x_1 и x_2 – количество единиц продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно, еженедельно планируемых к производству. Тогда вектор $X = (x_1, x_2)$ будет планом производства на неделю. Переменные x_1 и x_2, участвующие в решении задачи, должны удовлетворять следующим ограничениям:

- ограничения по трудовым ресурсам: $m_1x_1 + m_2x_2 \leq K$;
- ограничения по стоимости сырья: $p_1x_1 + p_2x_2 \leq N$;
- ограничения по прибыли от реализации плана X: $c_1x_1 + c_2x_2 \geq C$;
- ограничения по объему выпуска: $x_1 \geq n_1$ и $x_2 \geq n_2$.

Кроме того, по экономическому смыслу задачи $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$. Окончательно система ограничений задачи по еженедельному производству продукции есть система линейных неравенств вида

$$\begin{cases} m_1x_1 + m_2x_2 \leq K, \\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq N, \\ c_1x_1 + c_2x_2 \geq C, \\ x_1 \geq n_1, \\ x_2 \geq n_2. \end{cases} \qquad (4.8)$$

Подставляя в (4.8) числовые данные задачи, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 420, \\ 7x_1 + 9x_2 \le 630, \\ 1{,}6x_1 + 1{,}2x_2 \ge 48, \\ x_1 \ge 12, \\ x_2 \ge 13. \end{cases} \tag{4.9}$$

Изобразим графически область допустимых решений системы (4.9) (см. рис.). В плоскости Ox_1x_2 строим прямые:

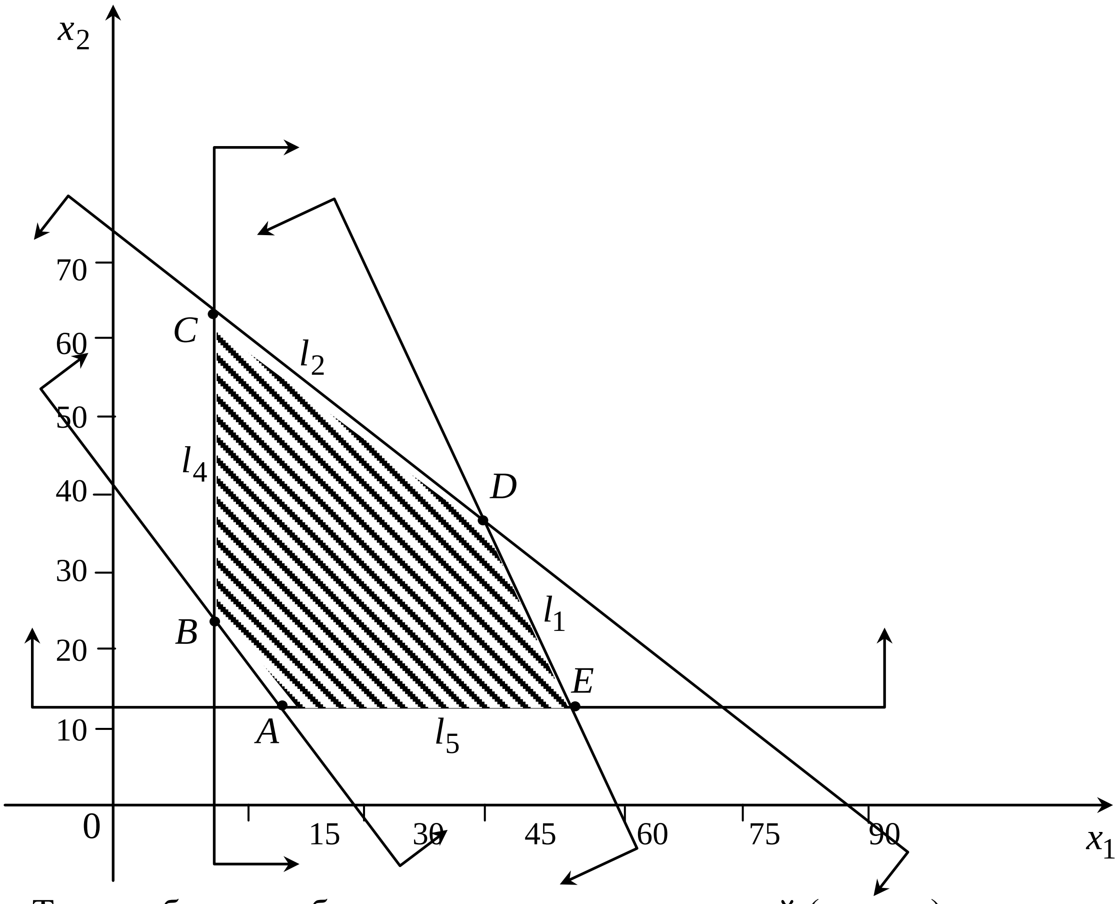
$l_1: \ 7x_1 + 3x_2 = 420;$

$l_2: \ 7x_1 + 9x_2 = 630;$

$l_3: \ 1{,}6x_1 + 1{,}2x_2 = 48;$

$l_4: \ x_1 = 12;$

$l_5: \ x_2 = 13.$



Таким образом, областью допустимых решений (планов) задачи есть выпуклый пятиугольник ABCDE.

Задание 6. $N \le 200$, $n = 30$, $p = 32\%$.

Решение. Пусть x_1 - средства банка (млн. дол.), размещенные в кредитах, x_2 - средства, вложенные в ценные бумаги. Значит, вектор $X = (x_1;\ x_2)$ будет вектором средств банка. По условию задачи переменные x_1 и x_2 удовлетворяют следующим ограничениям неравенствам:

- балансовое ограничение: $x_1 + x_2 \le N$;
- ограничение по кредитам (неликвидное ограничение): $x_1 \ge n$;
- ограничение по ценным бумагам (ликвидное ограничение): $x_2 \ge \dfrac{p}{100}(x_1 + x_2)$;
- ограничение по знакам: $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$.

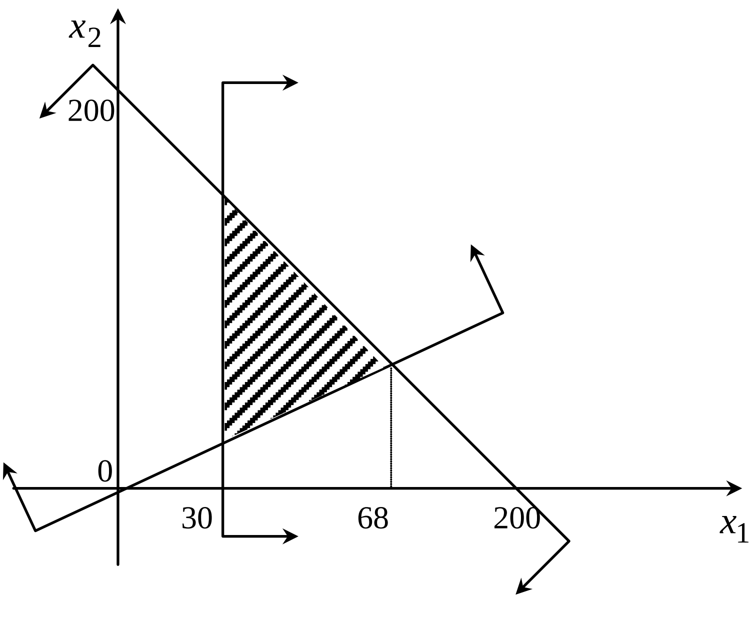
Таким образом, система ограничений задачи о работе банка есть система линейных неравенств вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le N; \\ x_1 \ge n; \\ x_2 \ge \dfrac{p}{100}(x_1 + x_2); \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

При заданных N, n и p получим систему неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 200; \\ x_1 \ge 30; \\ 17x_2 \ge 8x_1. \end{cases}$$

Изобразим схематически область решений этой системы:



5. Производная в экономике

5.1. Основные функции, используемые в экономике.

Класс функций, используемых в экономике, достаточно широк: от основных элементарных функций до функций нескольких переменных, а также некоторых специальных функций, таких, например, как мультипликативные и сепарабельные функции. Однако, наиболее часто в экономике встречаются следующие функции:

Функция полезности – которая выражает зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия, от уровня этого действия. Функция полезности $U(x)$ - субъективная оценка полезности.

Производственная функция – зависимость результатов производственной деятельности от факторов производства.

Частными видами производственной функции являются: *функция выпуска*, выражающая зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов, и *функция издержек* – зависимость издержек производства от объема выпуска.

Приведем примеры конкретных производственных функций:

1. Однофакторная (одноресурсная) функция выпуска $Q = f(x)$, где Q – суммарный выпуск в стоимостном выражении, x – суммарная величина затрат в стоимостном выражении.

2. Функция издержек (себестоимости) $C = c(q)$, характеризующая зависимость издержек (себестоимости) производства от объема выпуска q.

3. Функция дохода $R = R(q)$ - зависимость дохода R от величины реализованного товара в объеме q.

4. Функция прибыли $\pi = \pi(q)$ или $\Pi = \Pi(q)$ выражает зависимость прибыли от величины q проданного товара.

5. Макроэкономическая функция Кобба-Дугласа $Q = A \cdot K^{\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$. Здесь параметр A отражает производительность данной технологии производства, а α - доля капитала в доходе. Эта функция дает зависимость объема Q выпускаемой продукции в расчете на одного работника от капиталовооруженности труда K, т.е. величины капитала в расчете на одного работника.

Функция спроса, потребления и предложения – зависимость объема спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (цены, дохода и т.д.).

Рассмотрим простейшую модель изолированного однотоварного рынка. Тогда величина спроса на товар и предложение товара зависят только от его цены p. Функция $D = D(p)$, указывающая, на какое количество товара предъявляется спрос при цене товара p, называется функцией спроса. Зависимость количества товара, предлагаемого для продажи, от цены товара p называется функцией предложения $S = s(p)$. Представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению: $D(p) = S(p)$. В реальности это уравнение имеет единственное решение p_0. Цена p_0, при которой спрос равен предложению, называется равновесной. Тройка (p_0, D_0, S_0), где $D_0 = D(p_0)$, $S_0 = S(p_0)$, называется состоянием равновесия рынка или точкой рыночного равновесия.

Возможны случаи, когда вводится налог t на товар или предоставляется субсидия S для установления на этот товар разумной цены. При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_C, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями:

$$\begin{cases} P_C = P_S + t, \\ P_C = P_S - s, \end{cases}$$

где t и s – соответственно налог и субсидия на единицу товара.

Пример. Известно, что механизм рыночной конкуренции сдвигает цену товара до уровня, при котором спрос и предложение становятся равными друг другу. Предположим, что функция спроса на автомобили имеет вид: $D = 3200 - 0{,}45p$, а функция предложения $S = 200 + 0{,}05p$, где p - цена автомобиля в усл. ед. Требуется:

1) найти точку рыночного равновесия;
2) найти точку равновесия после введения налога, равного 400 усл. ед. на каждый автомобиль, увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;
3) вычислить субсидию, которая приведет к увеличению объема продаж на 18 автомобилей.

Решение: 1) Равновесную цену на автомобиль найдем из уравнения $3200 - 0{,}45p = 200 + 0{,}05p$, откуда $p_0 = 6000$ усл. ед. При такой цене спрос будет равен предложению, т.е. $D_0 = S_0 = 320 - 0{,}45 \cdot 6000 = 500$ автомобилей. Значит тройка (6000; 500; 500) и будет состоянием равновесия.

2) Принимая во внимание, что $D = S = q$, из уравнений спроса и предложения находим: $p = (3200 - q)/0{,}45$, $p = (q - 200)/0{,}05$.

Если введен налог t = 400 усл. ед., то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

$$D: \quad S: \begin{cases} p_C = (320 - q)/0{,}45, \\ p_S = (q - 200)/0{,}05, \\ p_C = p_S + 400, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p_C = (320 - q)/0{,}45, \\ p_C = (q - 200)/0{,}05 + 400. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $q = 482$, $p_C = 6040$. Следовательно, точка (6040; 482; 482) будет новой точкой равновесия. После введения налога равновесная цена увеличилась на 40 усл. ед., а равновесный объем продаж уменьшился на 18 единиц.

3) Если предоставлена субсидия *S*, то система уравнений для определения точки равновесия при *q* = 518 примет вид

$$\begin{cases} p_C = (3200 - q)/0{,}45, \\ p_S = (q - 200)/0{,}05, \\ p_C = p_S - S, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} p_C = 5960, \\ p_S = 6360, \\ S = 6360 - 5960 = 400. \end{cases}$$

5.2. Экономические примеры

<u>**Определение.**</u> Производная $(\ln y)'_x$ называется логарифмической производной положительной функции $y = f(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

Если производную y' функции $y = f(x) > 0$ рассматривать как мгновенную скорость изменения функции, то величину $\frac{y'}{y}$, т.е. $(\ln y)'$, естественно считать как скорость относительного изменения функции $f(x)$ в точке x или темпом роста этой функции T_y: $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$.

Рассмотрим примеры использования логарифмической производной в экономике. Пусть $K = K(t)$ - приближенная величина вклада в момент времени *t*. Найдем ставку банковского процента *r* по функции *K*(t). Предположим, что за период времени Δt проценты начисляются один раз. Тогда проценты по вкладу за период времени Δt составят $K r \Delta t$, где *r* – номинальная ставка за год, Δt - доля года. Так как приращение вклада и проценты по вкладу совпадают, то $\Delta K = K r \Delta t$, откуда

$$r = \frac{\Delta K}{K \Delta t} \approx \frac{K'}{K} = (\ln K)' \tag{5.1}$$

Итак, согласно (5.1) ставка банковского процента совпадает с логарифмической производной от величины вклада.

Рассмотрим более общую модель: предположим, что в момент времени *t* скорость некоторого актива *A* определяется функцией $A(t) > 0$, а доходность от вложения денег в другие активы (преобладающая ставка процента на денежном рынке) равна *r*. Если *r* не зависит от времени, то мгновенная доходность актива *A* совпадает с мгновенным темпом роста стоимости актива и, стало быть, равна логарифмической производной $(\ln A(t))'$ от функции стоимости этого актива. Возникает вопрос: когда выгодно купить или продать актив *A*? Интервал времени, в течение которого мгновенная доходность актива *A* будет больше *r*, задается неравенством

$$(\ln A(t))' > r \tag{5.2}$$

Если решением неравенства (5.2) служит интервал $(t_1; t_2)$, то актив *A* следует покупать в момент времени t_1 и продавать в момент времени t_2. Если же неравенству (5.2) удовлетворяют все значения $t \in (-\infty; t_1) \cup (t_2; +\infty)$, то актив выгодно продать в момент времени t_1 и снова купить в момент времени t_2.

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \tag{5.3}$$

Поскольку $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, а $f'(x_0)\Delta x = d\, f'(x_0)$, то из (5.3) следует, что $\Delta f(x_0) \approx d\, f(x_0)$. Значит при малых Δx приращение функции можно заменить ее дифференциалом.

Из (5.3) получаем приближенное равенство:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{5.4}$$

которое используется в приближенных вычислениях.

Пример. Найти приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 - x^2 + 10x + 3$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0{,}01$. Оценить абсолютную и относительную погрешности, возникающие при замене приращения функции ее дифференциалом.

Решение. Находим приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + 0{,}01) - f(1) = 2 \cdot (1 + 0{,}01)^3 - (1 + 0{,}01)^2 +$$
$$+10 \cdot (1 + 0{,}01) + 3 - (2 - 1 + 10 + 3) \approx 0{,}1405$$

Находим дифференциал функции в точке $x_0 = 1$:

$$d\,y = f'(x_0)\Delta x = (6x^2 - 2x + 10)\Big|_{x=1} \cdot 0{,}01 = 0{,}14.$$

Абсолютная погрешность замены

$$|\Delta y - dy| = |\,0{,}1405 - 0{,}14\,| = 0{,}0005.$$

Относительная погрешность равна

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}0005}{0{,}1405} = 0{,}0035 \quad \textit{или} \quad 0{,}35\%.$$

<u>Пример.</u> Функция затрат C фирмы имеет вид $C = 1{,}72q^2 - 0{,}56q + 2$, где q – объем реализации. Оценить приближенно увеличение затрат фирмы при увеличении объемов реализации с 1000 до 1012 единиц.

<u>Решение.</u> В нашем случае $x_0 = 1000,\quad \Delta x = 12$. Заменяя приращение $C(q)$ ее дифференциалом, получим

$$\Delta C \approx dC = (3{,}44q - 0{,}56)\big|_{q=1000} \cdot 12 = 41280.$$

<u>Пример.</u> Даны функции $f(x) = \ln(1+x)$ и $x_0 = 0$. Тогда $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. При достаточно малых x и $\Delta x = x$ из равенства (5.4) получим:

$$\ln(1+x) \approx x \tag{5.5}$$

<u>Пример.</u> Пусть r – ставка банковского процента за год. Определить количество лет T, в течение которых первоначальная сумма вклада увеличится в два раза.

<u>Решение.</u> Если A_0 - начальная сумма вклада, то за T лет вклад составит $A_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^T$. По условию задачи $A_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^T = 2A_0$, откуда приходим к уравнению

$$\left(1+\frac{r}{100}\right)^T = 2 \qquad \textit{или} \qquad T\ln\left(1+\frac{r}{100}\right) = \ln 2\,.$$

Величина $r/100$ достаточно мала, поэтому согласно приближенного равенства (5.5) будем иметь, что

$$\ln\left(1+\frac{r}{100}\right) \approx \frac{r}{100}.$$

Окончательно время удвоения вклада («правило 70») будет

$$T = \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)} \approx \frac{100\cdot\ln 2}{r} \approx \frac{100\cdot 0{,}7}{r} = \frac{70}{r}.$$

Так, например, при ставке 5% годовых время удвоения вклада составит около 14 лет.

5.3. Предельные величины в экономике

В различных экономических дисциплинах широко используют понятия предельных величин, таких, как предельные издержки, предельный доход, предельный продукт, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению и т.д. Все эти величины тесным образом связаны с понятием производной. Поясним это следующими примерами.

Пусть $C(q)$ - функция издержек, отвечающая выпуску продукции в объеме q. Предельные издержки обозначим символом MC, причем

$$MC = \Delta C = C(q+\Delta q) - C(q).$$

С другой стороны, заменяя приращение функции $C(q)$ ее дифференциалом, получим $MC = C'(q)\Delta q,$ откуда при $\Delta q = 1$ следует, что $MC = C'(q)$. Таким образом, предельные издержки производства характеризуют дополнительные затраты на производство еще одной дополнительной единицы продукции.

Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа $Q = A \cdot K^{\alpha}$, описывающую зависимость производительности труда Q от капиталовооруженности труда K . Если начальное значение капиталовооруженности равно $K_0 > 0$, то производная $Q'(K_0)$ называется предельным продуктом капитала, который приближенно численно равен приращению производительности труда, вызванному единичным приращением капиталовооруженности $(\Delta K = 1)$. В данном случае малость ΔK весьма относительна.

В общем случае для произвольной экономической функции $y = f(x)$ получаем следующую экономическую интерпретацию: предельная величина $f'(x)$ функции $f(x)$ все более точно выражает численное значение ее приращения Δy, вызванное единичным приращением аргумента $(\Delta x = 1)$, когда единица измерения последнего стремится к нулю при неизменности единицы измерения функции. Совершенно очевидно, что в случае, когда $f(x)$ линейная, предельная величина $f'(x)$ численно равна приращению функции, вызванному единичным приращением аргумента.

Заметим, что в экономике величину $\overline{y} = Ay = f(x)/x$ называют средним значением функции y в точке x. Так, например, величина $\overline{C} = AC = C(q)/q$ означает средние издержки на производство единицы продукции.

<u>Определение.</u> Предел отношения относительного приращения функции $y = f(x)$ к относительному приращению аргумента x при $\Delta x \to 0$, т.е. предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y', \tag{5.6}$$

называется эластичностью функции в точке x и обозначается $\mathrm{E}_x(y)$.

Итак, по определению

$$\mathrm{E}_x(y) = x \cdot \frac{y'}{y}. \tag{5.7}$$

Из равенства (5.6) вытекает, что при малых Δx имеет место приближенное равенство

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \approx \mathrm{E}_x(y) \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{y} \approx \mathrm{E}_x(y) \cdot \frac{\Delta x}{x} \tag{5.8}$$

<u>Вывод:</u> 1) эластичность $\mathrm{E}_x(y)$ - это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями $\frac{\Delta x}{x}$ и $\frac{\Delta y}{y}$ величины x и y соответственно; 2) поскольку относительные изменения величины x и y безразмерны и не зависят от выбора единиц измерения этих величин, то эластичность является безразмерной величиной, не зависящей от выбора единиц измерения x и y; 3) если за единицу измерения величины взять 1%, то согласно (5.8) эластичность функции показывает, на сколько процентов изменяется функция $f(x)$ при изменении аргумента x на 1%.

Предположим, что функция $y = f(x) > 0$. Тогда темп роста функции $T_y = (\ln y)' = y'/y$. Следовательно, равенство (5.6) можно записать в виде

$$\mathrm{E}_x(y) = x \cdot (\ln y)' = x \cdot T_y,$$

т.е. эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп роста функции T_y.

<u>Пример.</u> Зависимость между себестоимостью продукции C и объемом ее производства q выражается формулой $C = 60 - 0{,}4q$. Определить эластичность себестоимости при объеме выпуска $q = 30$ ден. ед.

<u>Решение.</u> По формуле (5.7) получаем

$$\mathrm{E}_q(C) = \frac{q}{C} \cdot C' = q \cdot \frac{(60 - 0{,}4q)'}{60 - 0{,}4q} = -\frac{0{,}4q}{60 - 0{,}4q},$$

откуда при $q=30$ искомая эластичность будет равна

$$\mathrm{E}_{30}(C)=-\frac{0{,}4\cdot 30}{60-0{,}4\cdot 30}=-0{,}25.$$

Значит при объеме выпуска в 30 ден. ед. увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,25%.

В анализе и прогнозах ценовой политики применяется понятие эластичности спроса по цене. Пусть $D=D(p)$ - спрос на некоторый товар при цене p. Тогда эластичность спроса по цене равна

$$\mathrm{E}_p(D)=p\cdot\frac{D'(p)}{D(p)} \tag{5.9}$$

С увеличением цены спрос уменьшается, поэтому функция $D(p)$ убывающая, т.е. $D'(p)<0$ во всей области определения функции D. Согласно (5.9) эластичность спроса по цене отрицательная $\mathrm{E}_p(D)<0$. Различают следующие виды спроса в зависимости от величины $\left|\mathrm{E}_p(D)\right|$:

1) $\left|\mathrm{E}_p(D)\right|>1$ - спрос эластичный $(\mathrm{E}_p(D)<-1)$;
2) $\left|\mathrm{E}_p(D)\right|<1$ - спрос неэластичен $(\mathrm{E}_p(D)>-1)$;
3) $\left|\mathrm{E}_p(D)\right|=1$ - спрос нейтрален $(\mathrm{E}_p(D)=-1)$.

Возможны еще крайние случаи: совершенно неэластичный спрос при изменении цены не приводит ни к какому изменению спроса $(\mathrm{E}_p(D)=0)$; совершенно эластичный спрос $(\left|\mathrm{E}_p(D)\right|=\infty)$, при котором малейшее изменение цены побуждает покупателей увеличивать покупки до предела своих возможностей.

Найдем эластичность выручки по цене, для чего будем считать, что товар на рынке предлагается монополистом, назначающим цену p на товар. Если $D(p)$ - спрос на товар, то выручка от продажи товара в количестве равном спросу будет представлять собой функцию от цены

$$R=R(p)=p\cdot D(p).$$

Эластичность выручки по цене

$$\mathrm{E}_p(R)=p\frac{R'(p)}{R(p)}=p\frac{D(p)+p\cdot D'(p)}{p\cdot D(p)}=1+p\frac{D'(p)}{D(p)}=1+\mathrm{E}_p(D)$$

Следовательно, при эластичном спросе $\mathrm{E}_p(R)<0$, а при неэластичном спросе $\mathrm{E}_p(R)>0$. Дадим экономическое пояснение этому факту, установив зависимость между предельной выручкой по цене $R'(p)$ и эластичностью спроса по цене:

$$R'(p) = (p \cdot D\ \ (p))' = D\ \ (p) + p \cdot D'(p) = D\ \ (p) \cdot \left(1 + \frac{D'(p)}{D\ \ (p)}\right) = D\ \ (p)\ \ (1 + \mathrm{E}_p(D))$$

Заметим сначала, что предельная выручка по цене $R'(p)$ - это приращение выручки, вызванное изменением цены на одну единицу, когда изменение цены достаточно мало. Если $\mathrm{E}_p(D) < -1$, т.е. спрос эластичный, то $R'(p) < 0$. Значит увеличение цены на 1% вызовет уменьшение спроса более чем на 1%, что приведет к уменьшению выручки. При неэластичном спросе $\mathrm{E}_p(D) > -1$ увеличение цены товара на 1% вызовет уменьшение спроса менее чем на 1% и в результате этого выручка увеличится.

<u>Пример.</u> Функция спроса относительно цены имеет вид $D(p) = D_0 \exp(-0{,}2p^2)$, где $D_0 > 0$. Как изменится спрос, если цена увеличится с 2 у.е. до 2,2 у.е.?

<u>Решение.</u> Найдем эластичность спроса по цене по формуле (5.9):

$$\mathrm{E}_p(D) = -p\frac{0{,}4p \cdot D_0 \exp(-0{,}2p^2)}{D_0 \exp(-0{,}2p^2)} = -0{,}4p^2.$$

При цене $p = 2$ получим, что $\mathrm{E}_2(D) = -0{,}4 \cdot 2^2 = -1{,}6$. Так как цена увеличилась на $(2{,}2/2 - 1) \cdot 100\% = 10\%$, то спрос уменьшится на $10 \cdot 1{,}6\% = 16\%$.

Безусловно, задачу можно решить и без привлечения понятия эластичности спроса по цене. Действительно, найдем спрос при заданных ценах

$$D(2) = D_0 e^{-0{,}8} = 0{,}449 D_0; \qquad D(2{,}2) = D_0 e^{-0{,}968} = 0{,}380 D_0.$$

Тогда относительное приращение спроса, вызванное приращением, составит

$$\frac{D(2{,}2) - D(2)}{D(2)} = \frac{0{,}380 D_0 - 0{,}449 D_0}{0{,}449 D_0} = -0{,}154,$$

что отвечает уменьшению спроса на 15,4%. Несовпадение результатов объясняется недостаточной малостью приращения цены.

6. Задания для аттестационной работы по теме «Производная в экономике»

Задание 1. Найти производные следующих функций:

1.1	а) $y=2x^3-\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+\frac{3}{x^2}-5$; б) $y=\left(e^{-\sin 2x}-x\right)\cdot\cos 3x$; в) $y=\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$.
1.2	а) $y=8-x\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{x}+2x^6$; б) $y=\frac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{\left(2x+1\right)^2}$ в) $y=\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{8x-x^2-7}-9\arccos\sqrt{\frac{x-1}{6}}$.
1.3	а) $y=4x^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}+6x^3\cdot\sqrt{x}-1$; б) $y=\frac{e^{-x^2}}{(2x-5)^2}$; в) $y=\sqrt{1+x^2}\,arctg\ \ x-\ln\ \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
1.4	а) $y=3x^3-\frac{2x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x^3}+4x$; б) $y=(\cos^3 2x+x)ctg 2x$; в) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{3}\ \ arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.
1.5	а) $y=x^2-\frac{1}{2x^3}+4\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x}}+3x$; б) $y=\left(2^{-tg 3x}-3x\right)\cdot(3x-2)^2$; в) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.
1.6	а) $y=1-\frac{9}{5}x\ \ \sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\cdot\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x^3}$; б) $y=(x-3)^4\arcsin^2 5x^3$; в) $y=arctg\ \ x+\frac{5}{6}\ \ \ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$.

1.7	а) $y=1-\frac{9}{5}x\ \ \sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\cdot\sqrt[4]{x}-\frac{1}{x^3}$; б) $y=(x-3)^4\arcsin^2 5x^3$; в) $y=arctg\ \ x+\frac{5}{6}\ \ \ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$.
1.8	а) $y=\sqrt{x}\left(x^3-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3\right)-\frac{1}{5}x^5$; б) $y=e^{-\cos 2x}(2-3x)^3$; в) $y=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+arctg\sqrt{x}$.
1.9	а) $y=3x^{2/3}-2x\cdot\sqrt{x^3}-\frac{2}{x^3}+3$; б) $y=2^{-3\sin 2x^2}(1-4x)^3$; в) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
1.10	а) $y=\frac{6}{x^4}3x^2+\frac{4}{\sqrt{x}}+2$; б) $y=\sqrt{x^2+3x+10}\ \ \left(e^{-tg3x}+2\right)$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{2}}+\frac{2x+1}{4x^2+4x+3}$.
1.11	а) $y=4x^5-\frac{5}{x^3}-x\ \ \sqrt[3]{x}+2$; б) $y=\frac{(x^2+3)^2}{\sin 3x+2}$; в) $y=x^3\arcsin x+\frac{x^2+2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2}$.
1.12	а) $y=\sqrt{x^6}-\frac{7}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{3}x^3+5$; б) $y=\frac{2^{\cos x^2}-x}{(4-3x)^2}$; в) $y=(2x^3+5x)\ \ \sqrt{x^2+1}+3\ln\ \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
1.13	а) $y=2x^2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{4}x^4+x$; б) $y=\frac{3\sin x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^4 x}$; в) $y=(2+3x)\ \ \sqrt{x-1}+\frac{3}{2}arctg\ \ \sqrt{x-1}$.
1.14	а) $y=6+2x^4-\frac{3}{x^5}+x^2\cdot\sqrt{x^3}$; б) $y=3^{-x^2+2}\cdot\ \ (x^3+5)^3$; в) $y=arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln\ \ x}{\sqrt{x^2-1}}$.
1.15	а) $y=8x-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{\sqrt[4]{x^3}}+2$; б) $y=(1+x^2)\ \ e^{arctgx}$; в) $y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}-2\cos x-3\ln tg\frac{x}{2}$.

1.16	а) $y=1-\frac{1}{3}x^6+x\sqrt{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y=\frac{2\cos x}{\sin^4 x}+\frac{3\cos x}{\sin^2 x}$; в) $y=(2x^3+x)\ \sqrt{x^2+1}-\ln\ \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
1.17	а) $y=3x^2-\frac{4}{x^3}+4x\ \sqrt[4]{x^3}-7$; б) $y=ctg\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+2x-3x^2}$; в) $y=\frac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$.
1.18	а) $y=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{3}x^3+2x\ \sqrt[3]{x^2}+4x^2$; б) $y=\frac{ctgx+x}{1-xctgx}$; в) $y=x-\ln\ (1+e^x)-2e^{-x/2}arctg\ \ e^{x/2}$.
1.19	а) $y=6+\frac{3}{x}+x^2\ \ \sqrt{x}-\frac{1}{4}x^4$; б) $y=arctg\frac{\sqrt{2\ \ tgx}}{1-tgx}$; в) $y=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln\ \ (1+\sqrt{x}+1)$.
1.20	а) $y=4x^3-\frac{8}{x}+x^3\cdot\sqrt{x}-3$; б) $y=\frac{1}{4}\ln\ \ \frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\ \ arctg\,x^2$; в) $y=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.
1.21	а) $y=5+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x^5\ \ \sqrt{x}}+7\cdot\sqrt[7]{x}$; б) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}-\frac{3\cos^2 x+1}{3\cos^3 x}$; в) $y=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$.
1.22	а) $y=\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x}+x\ \ \sqrt[6]{x}+\frac{1}{5}x^5$; б) $y=\ln\arcsin^2\sqrt{1-e^{2x}}$; в) $y=\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}}$.
1.23	а) $y=9x-\frac{1}{x\sqrt{x}}+2x\ \ \sqrt[5]{x^3}+2$; б) $y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$; в) $y=\frac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2}+\ln\ \ \frac{1+\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$.
1.24	а) $y=\frac{2}{3}x^3+x^3\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}+1$; б) $y=\sin^2\ln x\cdot\sqrt{2x+1-x^2}$; в) $y=\frac{4x+1}{16x^2+8x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

1.25	а) $y=4x^2-\frac{1}{3x^3}+x^3\sqrt[6]{x}+6$; б) $y=\frac{\arcsin 3x^2}{x^2+3x+6}$; в) $y=\ln\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right)-\sqrt{25x^2+1}\cdot arctg 5x$.
1.26	а) $y=9-\frac{1}{7}x^7-\sqrt{x}(x+x^2)$; б) $y=\cos x\cdot\ln tgx-e^{-2\sqrt{1-x^2}}$; в) $y=arctg\frac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$.
1.27	а) $y=2x^6-\frac{3}{x^6}+2\sqrt[3]{x}\ (x+1)$; б) $y=(\sin^2 x-\cos 2x)(4-3x)^3$; в) $y=\frac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.
1.28	а) $y=\frac{1}{2}x^{10}-\frac{2}{x^{10}}+x\sqrt[3]{x}+2$; б) $y=\ln^2\cos\frac{2x+3}{2x+1}$; в) $y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}(x^2+18)\ \sqrt{x^2-9}$.
1.29	а) $y=5+\frac{2}{x^4}-\sqrt[3]{x}\left(\frac{1}{x}+3\right)$; б) $y=\frac{e^{-\sqrt{\cos x}}}{(3-6x^2)^3}$; в) $y=\frac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\frac{x^2}{16}\arcsin\frac{2}{x},\quad x>0$.
1.30	а) $y=-\frac{8}{x}+x^3\cdot\sqrt[3]{x}+3x^4-1$; б) $y=\frac{(x^2-3x+4)^3}{tg^2 3x+1}$; в) $y=\arcsin e^{-2x}+\ln\ \left(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1}\right)$.

<u>Задание 2</u>. Найти производные второго порядка следующих функций:

2.1.	$y=e^x(\sin 2x+\cos 2x)$;	2.16.	$y=x\,tgx$;
2.2.	$y=(2x+3)e^{2x}$;	2.17.	$y\ln(x^2+1)$;
2.3.	$y=(2x-3)\arcsin x$;	2.18.	$y=e^x\cdot\ln x$;
2.4.	$y=x^2\cdot\sin\frac{x}{3}$;	2.19.	$y=\cos(x^2+x+1)$;
2.5.	$y=(x^2+2)^3$;	2.20.	$y=x^2\cdot 2^{-x}$;
2.6.	$y=\sin^2 3x$;	2.21.	$y=\sqrt{x^2+2x+3}$;

2.7.	$y=(1-3x)\ln x$;	2.22.	$y=x\sqrt{x^2+1}$;
2.8.	$y=(x^2+1)\ln 2x$;	2.23.	$y=x\arcsin 2x$;
2.9.	$y=\dfrac{3x-2}{5x+4}$;	2.24.	$y=\sin 2x\cdot\cos x$;
2.10.	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;	2.25.	$y=\sin x\cdot tgx$;
2.11.	$y=\dfrac{x^2+3x-1}{2x+1}$;	2.26.	$y=e^{2x}\cdot\sin 2x$;
2.12.	$y=x^2 actg\, x$;	2.27.	$y=2\sin^2 x+3\cos^2 x$;
2.13.	$y=e^{x^2}\cdot(x+1)$;	2.28.	$y=(x^2+3)\cdot\ln x$;
2.14.	$y=\sin^2 x-3\cos x$;	2.29.	$y=e^x(\sin x-3\cos 2x)$;
2.15.	$y=\dfrac{2-x^2}{2+x^2}$;	2.30.	$y=\sin(x^2+2x)$.

Задание 3. Издержки, связанные с выпуском q единиц продукции, определяются функцией $C(q)=\ln(aq^2+bq+c)$. Требуется:

1) найти непосредственно изменение издержек при изменении объема выпуска q_o на величину Δq;
2) вычислить средние и предельные издержки, связанные с выпуском продукции в объеме q_o;
3) с помощью дифференциала найти изменение издержек при изменении объема выпуска q_o на величину Δq;
4) указать абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $C(q)$ ее дифференциалом;
5) вычислить эластичность издержек при объеме выпуска q_o.

Необходимые данные взять из таблицы 6.

Таблица 6

Вар	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a	1	2	3	3	2	1	1	2	3	4	4	1	1	2	2
b	2	1	5	2	4	3	6	2	4	1	2	5	6	3	5
c	4	5	6	10	40	21	30	50	20	15	16	17	22	27	25
q_0	11	12	15	13	15	14	10	14	20	9	8	6	11	16	13
Δq	1	-1	-2	-1	1	2	-1	-1	1	-2	1	1	-1	2	-1

Продолжение таблицы 6

Вар	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	5	5	6	1	1	2	1	4	3	2	1	3	3	2	1
b	2	3	2	8	3	6	4	4	2	5	8	7	6	10	5
c	11	15	29	31	28	18	33	26	23	38	40	42	39	43	44
q_0	7	5	10	18	12	9	10	15	8	13	15	16	18	11	20
Δq	1	-2	-1	1	-2	1	-1	-1	1	-1	-2	2	-1	-1	2

Задание 4. В обращение сроком на 1 год выпушен вексель, рыночная стоимость которого меняется линейно: от К% на момент выпуска до 100% на момент погашения при конечной стоимости b. Требуется:

1) вычислить относительный прирост (в процентах) стоимости векселя за первую и n-ю недели после его выпуска;
2) вычислить мгновенные темпы роста стоимости векселя в начале первой недели и в конце n-ой недели;
3) указать, в какое время года вексель выгодно продать, если преобладающая ставка процента на денежном рынке равна r.

Считать, что в году 52 недели. Необходимые числовые данные взять из таблицы 7.

Таблица 7

Вар	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
K%	70	65	75	60	72	67	62	78	70	76	65	71	72	66	68
n	38	47	34	42	50	48	47	51	35	40	41	28	43	35	49
r%	34	43	31	45	32	43	39	27	41	28	38	35	37	42	42

Вар	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
K%	75	73	69	70	66	74	77	75	69	71	73	64	63	62	68
n	39	29	44	39	47	36	45	42	28	50	36	48	46	33	40
r%	29	33	36	40	37	31	26	29	35	36	33	46	44	40	38

Задание 5. Приближенная величина вклада в момент времени t характеризуется функцией $K(t) = K_0(at+b)^m$, где t - число лет от открытия вклада, K_0 - величина вклада в начальный момент времени $t = 0$. Считая, что r - номинальная ставка банковского процента за год, найти:

1) ставку через t_1 лет и через t_2 лет после открытия вклада;
2) на сколько процентов при этом изменилась абсолютная скорость роста вклада?

Необходимые числовые данные даны в таблице 8.

Таблица 8

Вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	2	1	3	2	3	3	4	4	4	1	3	2	5	5	1
b	1	2	2	3	3	4	1	2	3	3	1	4	3	1	5
m	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$
t_1	3	2	4	5	6	3	4	2	3	6	5	4	3	4	3
t_2	10	6	11	12	8	7	9	6	8	10	10	9	8	9	7

Вар	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	5	5	2	3	3	1	1	2	3	4	4	2	3	1	2
b	4	2	2	1	5	4	6	4	2	5	10	7	6	6	6
m	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
t_1	3	2	3	5	3	2	3	3	5	2	6	6	4	3	4
t_2	8	5	6	7	8	10	11	9	8	6	10	11	10	7	11

Задание 6. Функции долговременного спроса и предложения от цены p на мировом рынке нефти имеют соответственно вид: $D = m - np$, $S = k + l\,p$.

Требуется:

1) найти состояние равновесия рынка;
2) найти эластичность спроса и предложения при равновесной цене;
3) найти изменение дохода при увеличении равновесной цены на $\alpha\%$.

Числовые данные к задаче взять из таблицы 9.

Таблица 9

Вар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m	40	65	60	52	70	72	75	54	76	77	84	80	52	52	58
n	0,8	0,6	0,7	0,9	0,6	0,5	0,8	1,2	1,0	0,7	0,9	1,3	0,4	0,5	1,4
k	10	25	12	14	16	18	15	14	16	20	12	20	16	12	14
l	1,2	1,4	1,3	1,1	2,4	2,5	2,2	0,8	2,0	2,3	3,1	1,7	1,6	1,5	0,6
$\alpha\%$	3	4	6	5	10	5	6	3	2	4	10	8	7	7	8

Вар	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m	83	88	52	79	65	62	79	79	66	70	81	90	81	63	92
n	0,8	1,1	0,4	0,3	0,2	1,4	1,8	1,5	1,3	0,7	1,1	0,8	0,9	0,75	1,25
k	11	13	18	16	15	17	19	31	20	24	12	15	30	15	12
l	3,2	1,9	1,6	2,7	1,8	1,6	1,2	1,5	0,7	1,3	1,9	4,2	2,1	1,25	2,75
$\alpha\%$	3	4	2	3	5	7	9	9	3	3	5	4	7	6	5

7. Решение типовых задач аттестационной работы по теме «Производная в экономике»

Задание 3. $C(q) = \ln(3q^2 + q + 19), \quad q_0 = 7, \ \Delta q = -0{,}8.$

Решение. 1) Изменение издержек при переходе от значения q_0 к значению $q_0 + \Delta q$ будет определяться величиной

$\Delta C = C(q_0 + \Delta q) - C(q_0) = C(7 - 0{,}8) - C(7) = C(6{,}2) - C(7) =$

$$= \ln(3 \cdot 6{,}2^2 + 6{,}2 + 19) - \ln(3 \cdot 7^2 + 7 + 19) = \ln 140{,}52 - \ln 173 = \ln\frac{140{,}52}{173} \approx$$

$\approx \ln 0{,}8123 \approx -0{,}208.$

При изменении объема выпуска с 7 единиц до 6,2 единиц издержки уменьшатся на 0,208.

2) Средние затраты $\overline{C}$ на производство единицы продукции равны

$$\overline{C} = \frac{C(q)}{q} = \frac{\ln(3q^2 + q + 19)}{q}.$$

Средние затраты при объеме выпуска $q_0 = 7$ составят

$$\overline{C}(7) = \frac{\ln(3 \cdot 7^2 + 7 + 19)}{7} = \frac{\ln 173}{7} \approx 0{,}736.$$

Предельные издержки определяются производной $C'(q)$, т.е.

$$MC = C'(q) = \frac{6q + 1}{3q^2 + q + 19}.$$

Если $q = 7$, то

$$MC(7) = C'(7) = \frac{6 \cdot 7 + 1}{3 \cdot 7^2 + 7 + 19} = \frac{43}{173} = 0{,}248.$$

Это значит, что при средних издержках на производство единицы продукции, равных 0,736, дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции составляют 0,248 и не превышают средних издержек $\overline{C}$.

3) Вычислим приращение издержек с помощью дифференциала:

$$dC = C'(q_0) \cdot \Delta q = MC(7) \cdot \Delta q = 0{,}248 \cdot (-0{,}8) = -0{,}198.$$

Найдем абсолютную и относительную погрешности приближенного равенства $dC \approx \Delta C$:

абсолютная погрешность равна

$$|\Delta C - dC| = |-0{,}208 - (-0{,}198)| = |-0{,}01| = 0{,}01;$$

относительная погрешность равна

$$\left|\frac{\Delta C - dC}{\Delta C}\right| = \frac{0{,}01}{0{,}208} \approx 0{,}048 \quad \textit{или} \quad 4{,}8\%.$$

4) Эластичность издержек определяется равенством

$$\mathrm{E}_q(C) = q \cdot \frac{C'}{C} = q \cdot \frac{6q+1}{(3q^2+q+19)\cdot \ln(3q+q+19)}.$$

При объеме выпуска $q_0 = 7$ получим

$$\mathrm{E}_7(C) = 7 \cdot \frac{6\cdot 7+1}{173\cdot \ln 173} \approx \frac{301}{891{,}469} \approx 0{,}34.$$

Так как эластичность оказалась меньше единицы, то издержки неэластичны, т.е. изменение объемов производства не приведет к резкому изменению издержек. Точнее: при объеме выпуска в 7 единиц повышение его на 1 % вызовет увеличение издержек лишь на 0,34%.

<u>Задание 4.</u> $K = 60, \quad n = 52, \quad r = 50.$

<u>Решение.</u> Пусть t – время (в долях года), $0 \le t \le 1$, а $B(t)$ - рыночная стоимость векселя в момент времени t. Поскольку функция $B(t)$ - линейная, то $B(t) = a_1 t + a_2$. Определим коэффициенты a_1 и a_2.

По условию $B(0) = 0{,}6b, \quad B(1) = b.$ Тогда для определения a_1 и a_2 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_2 = 0{,}6b = \dfrac{3}{5}b, \\ a_1 + a_2 = b, \end{cases} \qquad \textit{откуда} \qquad \begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{5}b, \\ a_2 = \dfrac{3}{5}b. \end{cases}$$

Следовательно, $B(t) = \dfrac{2t+3}{5}b$.

1) Найдем относительный прирост стоимости векселя за первую неделю.

$$\frac{B\left(\frac{1}{52}\right) - B(0)}{B(0)} = \frac{\left(\frac{2}{52}+3\right)b - 3b}{3b} = \frac{2}{156} \approx 1{,}28\%.$$

Значит доходность векселя за первую неделю составит $52 \cdot 1{,}28\% = 66{,}56\%$.

За последнюю неделю года относительный прирост стоимости будет равен:

$$\frac{B(1) - B\left(\frac{51}{52}\right)}{B\left(\frac{51}{52}\right)} = \frac{(2+3) - \left(2\cdot\frac{51}{52}+3\right)}{2\cdot\frac{51}{52}+3} = \frac{1}{129} \approx 0{,}775\%,$$

что составит $52 \cdot 0{,}775\% = 40{,}3\%$ годовых.

2) Мгновенная доходность векселя

$$\left(\ln(B(t))\right)' = \left(\ln(2t+3) + \ln\frac{b}{5}\right)' = \frac{2}{2t+3}.$$

Для момента времени $t = 0$ мгновенная доходность равна $\frac{2}{3}$, что составляет 66,7% годовых, а в момент времени $t = 1$ - равна $\frac{2}{5}$, что составляет 40% годовых.

3) Интервал времени, в течение которого мгновенная доходность векселя будет больше 50% согласно (5.9) определяется из неравенства

$$\frac{2}{2t+3} > \frac{1}{2},\ \textit{откуда}\quad t < \frac{1}{2}.$$

Итак, в первую половину года вексель обеспечивает доходность превышающую r. Значит, владельцу векселя выгодно продать вексель через 6 месяцев, после его выпуска.

Замечание. Интересно отметить мотивы покупателя, который приобретает вексель, доходность которого упала ниже процентной ставки r рынка. Эти мотивы следующие: либо покупатель владеет информацией о том, что в ближайшее время второй половины года ожидается падение ставки r ниже доходности векселя, либо покупатель стремится объявить банкротом эмитента векселя.

Задание 5. $K(t) = K_0(2t+8)^{3/2}$, $t_1 = 3$, $t_2 = 7$.

Решение. а) Ставка банковского процента совпадает с логарифмической производной от величины вклада, т.е.

$$r = (\ln K)' = \left(\ln K_0(2t+8)^{3/2}\right)' = \left(\ln K_0 + \frac{3}{2}\ln(2t+8)\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2t+8} = \frac{3}{2t+8},$$

или в процентах $r = 3(2t+8)^{-1}\cdot 100\%$.

Через три года после открытия вклада ставка будет равна $r = 3(2\cdot 3+8)^{-1}\cdot 100\% \approx 21{,}43\%$ годовых, а через семь лет ставка уменьшится до $r = 3(2\cdot 7+8)^{-1}\cdot 100\% \approx 13{,}64\%$ годовых.

б) Абсолютная скорость роста вклада изменяется по закону $K' = \frac{3}{2}\cdot K_0(2t+8)^{1/2}\cdot 2 = 3K_0\cdot\sqrt{2t+8} > 0.$ Поэтому скорость роста вклада не убывала, а возрастала. При этом $K'(3) = 3K_0\cdot\sqrt{14} \approx 11{,}225K_0$ $K'(7) = 3K_0\cdot\sqrt{22} \approx 14{,}071K_0$. Стало быть, абсолютная скорость вклада за четыре года возросла на $\frac{(14{,}071 - 11{,}225)K_0}{11{,}225K_0}\cdot 100\% \approx 25{,}34\%.$

Задание 6. $D = 74 - 0{,}75p,\ \ S = 14 + 2{,}25p,\ \ \alpha = 5\%.$

Решение. 1) Равновесную цену на нефть находим из уравнения $74 - 0{,}75p = 14 + 2{,}25p,$ откуда $p_0 = 20.$

Тогда $D_0 = S_0 = 74 - 0{,}75 \cdot 20 = 59.$ Таким образом, точка (20; 59; 59) есть точка равновесного состояния рынка.

2) Находим эластичность по спросу и предложению:

$$\mathrm{E}_p(D) = p \cdot \frac{D'}{D} = p \cdot \frac{(74 - 0{,}75p)'}{74 - 0{,}75p} = -\frac{0{,}75p}{74 - 0{,}75p},$$

$$\mathrm{E}_p(S) = p \cdot \frac{S'}{S} = p \cdot \frac{(14 + 2{,}25p)'}{14 + 2{,}25p} = \frac{2{,}25p}{14 + 2{,}25p}.$$

Для равновесной цены $p_0 = 20$ имеем

$$\mathrm{E}_{20}(D) = -\frac{0{,}75 \cdot 20}{74 - 0{,}75 \cdot 20} = -0{,}25, \qquad \mathrm{E}_{20}(S) = \frac{2{,}25 \cdot 20}{14 + 2{,}25 \cdot 20} = 0{,}76.$$

Итак, спрос и предложение на нефть на мировом рынке при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены на нефть не приведет к существенному изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены p_0 на 1% спрос уменьшится на 0,25%, а предложение увеличится на 0,76%.

3) При равновесной цене p_0 доход будет равен $R_0 = p_0 \cdot D_0 = 20 \cdot 59 = 1180$. Если равновесная цена увеличится на 5%, то она станет равной $p_1 = p_0 \cdot 1{,}05 = 20 \cdot 1{,}05 = 21$ при спросе $D_1 = 74 - 0{,}75 \cdot 21 = 58{,}25$.

Как видим, равновесный спрос уменьшился на $\frac{59 - 58{,}25}{59} \cdot 100\% = 1{,}27\%$.

При цене p_1 доход станет равным $R_1 = p_1 \cdot D_1 = 21 \cdot 58{,}25 = 1223{,}25$, т.е. доход увеличился на $\frac{1223{,}25 - 1180}{1180} \cdot 100\% = 3{,}67\%$.

Можно рассуждать проще: при увеличении цены р на 5% от равновесной спрос уменьшится на $5 \cdot 0{,}25 = 1{,}25\%$, следовательно, доход возрастает на $(5 - 1{,}25)\% = 3{,}75\%$. Незначительное расхождение в результатах объясняется ошибками, возникающими при округлении промежуточных вычислений и недостаточной малостью приращения цены.

Литература

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М. и др. – Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 272с.
2. Булдык Г.М. Сборник задач и упражнений по высшей математике с примерами решений. – Мн.: ООО «Юнипресс», 2002. – 400с.
3. Ведина О.Н., Десницкая В.Н. и др. Математика. Математический анализ для экономистов. – М.: «Филинъ», Рилант, 2000. – 360с.
4. Высшая математика для экономистов. / Н.Ш. Кремер, Б.А. Пушко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439с.
5. Высшая математика: Общий курс / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов и др.; Под общ. Ред. С.А. Самаля. – Мн.: Выш. шк., 2000. – 351с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. и др. Ч.1-Общий курс высшей математики. – Орша: АРФА, 1996. – 318с.
7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: «Дело и Сервис», 2001. – 368с.
8. Индивидуальные задания по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2000. – 304с.
9. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208с.
10. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: «Дело», 2001. – 688с.
11. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998, – 464с.
12. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 356с.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 656с.
14. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 575с.
15. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Ч-1. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 224с.
16. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В, Шандра И.Г. Математика в экономике. Ч-2. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 376с.
17. Справочник по математике для экономистов. / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Выш. шк., 1997. – 384с.
18. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс. / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова и др. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 284с.

Содержание

Вопросы учебной программы………………………………………………. 3
Перечень основных задач по темам первого семестра…………………….. 4
1. Линейная алгебра в экономике…………………………………………….. 13
1.1. Модель межотраслевого баланса……………………………………. 13
1.2. Продуктивные модели В. Леонтьева…………………………………… 15
1.3. Модель равновесных цен…………………………………………………. 20
1.4. Линейная модель обмена или модель международной торговли………. 21
2. Выпуклые множества на плоскости…………………………………… 22
3. Задания для аттестационной работы по теме «Линейная алгебра в экономике»……………………………………………………………………… 25
Задание 1……………………………………………………………………… 25
Задание 2………………………………………………………………………. 28
Задание 3………………………………………………………………………. 29
Задание 4………………………………………………………………………. 30
Задание 5………………………………………………………………………. 32
Задание 6………………………………………………………………………. 33
4. Решение типового варианта ……………………………………………. 34
Задание 1………………………………………………………………………. 34
Задание 2………………………………………………………………………. 38
Задание 3………………………………………………………………………. 40
Задание 4……………………………………………………………………… 41
Задание 5……………………………………………………………………… 43
Задание 6………………………………………………………………………. 45
5. Производная в экономике………………………………………………... 46
5.1. Основные функции, используемые в экономике………………………….. 46
5.2. Экономические примеры……………………………………………………. 48
5.3. Предельные величины в экономике…………………………………………. 51
6. Задания для аттестационной работы по теме «Производная в экономике»..………………………………………………………………….. 55
Задание 1………………………………………………………………………. 55
Задание 2………………………………………………………………………. 58
Задание 3………………………………………………………………………. 59
Задание 4………………………………………………………………………. 60
Задание 5………………………………………………………………………. 60
Задание 6………………………………………………………………………. 61
7. Решение типовых задач аттестационной работы по теме «Производная в экономике»……………………………………………… 62
Задание 3………………………………………………………………………. 62
Задание 4………………………………………………………………………. 63
Задание 5………………………………………………………………………. 64
Задание 6………………………………………………………………………. 65
Литература ……………………………………………………………………... 66

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович
Махнист Леонид Петрович
Рубанов Владимир Степанович
Сидоревич Михаил Павлович

Практикум по высшей математике

Часть I

Линейная алгебра в экономике. Производная в экономике.

Редактор Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск М.П. Сидоревич
Технический редактор А.Д. Никитчик
Компьютерный набор Д.Н. Мищирук

Подписано в печать Формат 60x84 1/16. Бумага писч. Усл.п.л. Уч.изд.л. Тираж экз. Заказ №

Отпечатано на ризографе УО «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская,267.