

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

**Сборник материалов VIII Республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
21–23 ноября 2013 года**

Брест 2013

УДК 517+519+004
ББК 22.11/.19+32.97

Программный комитет конференции:

Председатель: Рубанов В.С. – к.ф.-м.н., доцент (БрГТУ).

Зам. председателя: Головко В.А. – д.т.н., профессор (БрГТУ),

Ракецкий В.М. – к.ф.-м.н., доцент (БрГТУ).

Члены: Голенков В.В. – д.т.н., профессор (БГУИР), Садыхов Р.Х. – д.т.н., профессор (БГУИР), Дудкин А.А. – д.т.н., доцент (ОИПИ НАНБ), Старовойтов В.В. – д.т.н., профессор (ОИПИ НАНБ), Калинин А.И. – д.ф.-м.н., профессор (БГУ), Лазакович Н.В. – д.ф.-м.н., профессор (БГУ), Мазаник С.А. – д.ф.-м.н., профессор (БГУ), Дереченник С.С. – к.т.н., доцент (БрГТУ), Махнист Л.П. – к.т.н., доцент (БрГТУ), Парфомук С.И. – к.т.н., доцент (БрГТУ), Матысик О.В. – к.ф.-м.н., доцент (БрГУ им. А.С. Пушкина), Чичурин А.В. – д.ф.-м.н. (Украина), доцент (БрГУ им. А.С. Пушкина).

Редакционная коллегия:

Главный редактор: Рубанов В.С. – к.ф.-м.н., доцент.

Зам. главного редактора: Головко В.А. – д.т.н., профессор.

Члены редакционной коллегии: Ракецкий В.М. – к.ф.-м.н., доцент, Дереченник С.С. – к.т.н., доцент, Махнист Л.П. – к.т.н., доцент, Парфомук С.И. – к.т.н., доцент, Муравьев Г.Л. – к.т.н., доцент, Савчук В.Ф. – к.ф.-м.н., доцент, Чичурин А.В. – д.ф.-м.н. (Украина), доцент.

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и технологий программирования БрГУ им. А.С. Пушкина;
Трофимук А.А., зав. кафедрой алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н.

Современные проблемы математики и вычислительной техники: сборник материалов VIII Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 21–23 ноября 2013 г. / Брестский государственный технический университет; под ред. В.С. Рубанова [и др.]. – Брест: изд-во БрГТУ, 2013. – 180 с.

ISBN 978-985-493-266-8

В сборнике представлены материалы докладов по современным проблемам информационных технологий в научных и прикладных исследованиях, моделирования нелинейных динамических процессов, робототехники, распознавания образов и анализа изображений, искусственного интеллекта и нейронных сетей, аналитических и численных методов исследований в математике и их приложениях.

УДК 517+519+004
ББК 22.11/.19+32.97

Учреждения образования
ISBN 978-985-493-266-8 © «Брестский государственный технический университет», 2013

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ РОБОТОТЕХНИКИ

УДК 681.772.7

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ВИДЕОНАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ЖИТЕЛЕЙ ГОРОДОВ

Воробьев С.Ю.¹, Хорольский Д.Б.¹, Мишнев Г.В.², Русак В.А.³

¹Республиканский центр управления и реагирования на чрезвычайные ситуации Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь, г. Минск

²Прокуратура г. Минска, г. Минск

³Академия Министерства внутренних дел Республики Беларусь, г. Минск

В настоящее время актуальной является проблема безопасности жителей городов. Противоправные действия, техногенные катастрофы, стихийные бедствия или неконтролируемое развитие ситуаций в местах массового пребывания людей в современном мегаполисе могут иметь самые тяжелые последствия [1].

Как для предотвращения правонарушений, преступлений, чрезвычайных ситуаций, так и в ходе ликвидации их последствий возрастает необходимость оперативного получения объективной информации с места происшествия (чрезвычайной ситуации), координации действий дежурно-диспетчерских служб, других сил и средств, участвующих в пресечении правонарушения или проведении аварийно-спасательных работ.

Системы видеонаблюдения как средство объективной фиксации различных процессов и явлений все шире используются в различных видах практической деятельности [2]. В том числе имеет место их использования в интересах органов правопорядка и чрезвычайных ситуаций.

Как пример, Лондон считается городом с самой основательной системой видеонаблюдения. Полмиллиона камер осуществляют видеонаблюдение в британской столице. Камеры наблюдения подвешены на каждом углу. На протяжении всего дня среднестатистического лондонца записывает свыше трехсот камер наблюдения. Их кольцо окружает центр города. За секунду каждый номер машины попадает в базу, в которой содержится информация о передвижениях каждого автомобиля. Считается, что эта защита удовлетворительна [3].

В Российской Федерации получили широкое распространение так называемые системы «Безопасный город» – интегрированные комплексные системы, предназначенные для решения задач обеспечения правопорядка, видеомониторинга чрезвычайных ситуаций, охраны собственности и безопасности граждан в любой точке города [4].

Как правило, технически данные системы представляют собой совокупность множества подсистем, объединенных единой транспортной средой и системой управления [4].

Основными задачами системы «Безопасный город» являются:

- оперативный контроль ситуации на ключевых объектах города;
- своевременная и достоверная информационная поддержка служб охраны, правопорядка и безопасности, аварийно-спасательных подразделений;
- предоставление визуальной информации, получаемой с мест установки камер наблюдения, расположенных на любом расстоянии от пункта видеомониторинга;
- информирование о возникновении чрезвычайных ситуаций, совершении правонарушений соответствующих служб и организаций;

- цифровое архивирование видеоинформации и аудиоинформации;
- обеспечение возможности восстановления хода событий на основе записанных видеоматериалов;
- передача информации, получаемой от охранных видеокамер как по запросу, так и в автоматическом режиме;
- интеграция с другими автоматизированными системами, при наличии такой возможности у этих систем [5].

Область применения системы «Безопасный город» распространяется на:

- здания и сооружения, используемые органами власти, объекты, принадлежащие силовым ведомствам;
- транспортные сооружения (мосты, путепроводы), нефте- и газопроводы, плотины, электростанции, водохранилища, а также промышленные объекты, представляющие повышенную опасность для окружающей среды – предприятия атомной энергетики, химические производства, склады и прочее;
- транспортные компании, службы аэропортов, портов, вокзалов;
- производственные здания и сооружения – заводы, фабрики, объекты строительства;
- офисные и деловые центры, финансово-кредитные учреждения, магазины, рынки, гостиницы, предприятия сферы услуг;
- многоквартирные дома и индивидуальные жилые постройки, коттеджи, дачи [6].

Развитие и применение систем контроля технологий производства, охранного телевидения, контроля доступа показывают, что видеотехнологии могут успешно решать и задачи обеспечения пожарной безопасности объектов и территорий [7]. Видеодетекторы могут обнаруживать пожар в помещении и на открытых площадках автоматически по специфическим признакам: задымленность, открытое пламя, характерные движения и частоты колебаний объекта на изображении [8, 9], позволяя в то же время при необходимости оператору визуально оценивать ситуацию на объекте.

Традиционные сигнализаторы пожара, как правило, производят анализ выборки частиц или температур и проверку прозрачности воздуха [10, 11].

Большинство рассматриваемых систем основано на компьютерной обработке изображений и анализе их изменений. Так, дым идентифицируется на основе динамических и структурных особенностей, а также шкалы яркости. Детектор способен отсеивать ложные срабатывания, такие как облака, пыль и прочие помехи. Программное обеспечение позволяет маскировать области постоянного или вероятного присутствия некоторых видов дыма (промышленных объектов или жилых домов). Из существующих специализированных программных детекторов, позволяющих распознавать раннее появление дыма и сигнализировать об этом оператору, следует упомянуть Fire Hawk (США), D-Тес (Великобритания), AWFS (Германия). Существуют также видеорегистраторы с функцией детектора дыма для предотвращения лесных пожаров, которые можно объединять по протоколу TCP/IP в сеть [12, 13].

Список цитированных источников

1. Vocord системы видеонаблюдения и аудиорегистрации [Электронный ресурс] / Интернет-ресурс компании ЗАО «Vocord» // – 2011. – Режим доступа: <http://www.vocord.ru/>. – Дата доступа: 11.11.2012.
2. Пашута, И. Использование систем видеонаблюдения в раскрытии и расследовании преступлений / И. Пашута // Законность и правопорядок. – 2011. – № 1 (17). – С. 42-45.
3. Наука скрытого наблюдения [Электронный ресурс] / Интернет-каталог HARDBROKER. – Режим доступа: <http://hardbroker.ru/pages/UndObservation>. – Дата доступа: 11.11.2012.
4. Безопасный город [Электронный ресурс] / Интернет-ресурс компании «Микротест» // – 2011. – Режим доступа: http://itvgroup.com.ua/verticals/homeland_security. – Дата доступа: 11.11.2012.

5. Система видеонаблюдения [Электронный ресурс] / Интернет-ресурс группы компаний «Спецтехника». – 2011. – Режим доступа: <http://gkst.org/business/10/>. – Дата доступа: 11.11.2012.
6. Городская система видеонаблюдения «Безопасный город» [Электронный ресурс] / Интернет-ресурс концерна ПромСнабКомплект. – 2011. – Режим доступа: <http://www.1avtorem.ru/pages/b-town.html>. – Дата доступа: 11.11.2012.
7. Членов, А.Н. Новые возможности управления пожарной безопасностью объектов / А.Н. Членов, Т.А. Буцынская, Ф.В. Демехин, И.Г. Дровникова, П.А. Орлов // Пожарная безопасность, М. – 2008. – № 4. – С. 96-101.
8. Членов, А.Н. Исследование и разработка средств обнаружения пожара / А.Н. Членов, В.И. Фомин, Т.А. Буцынская, Ф.В. Демехин [Электронный ресурс] // Научный интернет-журнал «Технологии техносферной безопасности» Академии государственной противопожарной службы МЧС РФ. – 2006. – № 6. – 3 с. – Режим доступа: <http://ipb.mos.ru/ttb/2006-6/2006-6.html>. – Дата доступа: 01.12.2012.
9. Членов, А.Н. Общие принципы построения видеодетектора пожара / А.Н. Членов, Ф.В. Демехин [Электронный ресурс] // Научный интернет-журнал «Технологии техносферной безопасности» Академии государственной противопожарной службы МЧС Российской Федерации. – 2005. – № 4. – 3 с. – Режим доступа: <http://ipb.mos.ru/ttb/2005-4/2005-4.html>. – Дата доступа: 01.12.2012.
10. Cleary, T. Survey of fire detection technologies and system evaluation/certification methodologies and their suitability for aircraft cargo compartments / T. Cleary, W. Grosshandler; US Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology, 1999.
11. Davis, W. NASA fire detection study / W. Davis, K. Notarianni; US Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology, 1999.
12. Катковский, Л.В. Применение видеотехнологий для повышения пожарной безопасности объектов / Л.В. Катковский, С.Ю. Воробьев // Доклады БГУИР. – 2011. № 1 (55). – С. 12-18.
13. Воробьев, С.Ю. Техническое нормирование систем видеоналитики пожара / С.Ю. Воробьев [и др.] // Чрезвычайные ситуации: образование и наука. – 2011. – № 2. – С. 49-52.

УДК 614.2

ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Каршакевич Е.А.

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск
Научный руководитель: Лившиц Ю.Е., к.т.н., доцент*

Статья посвящена особенностям внедрения информационных технологий в систему здравоохранения. Рассматриваются вопросы автоматизации рабочих мест медицинского персонала и особенности их реализации с учетом практического применения.

Последние достижения в области информационных технологий направлены на использование программных и технических продуктов, повышающих качество обслуживания населения в различных сегментах хозяйствования.

Забота о здоровье населения является одним из основных социально-значимых направлений деятельности государства, поэтому совершенствование системы здравоохранения не может быть оставлено без внимания в контексте развития информационных технологий. Современное здравоохранение – организованная информационная система, в которой для наблюдения за пациентом внедряются новые инструменты мониторинга и диагностики. Процесс информатизации здравоохранения привлекает к согласованной работе всех сотрудников медицинских учреждений различного профиля. В настоящее время система здравоохранения Беларуси включает учреждения управления, научно-исследовательские институты, центры, библиотеки, учебные учреждения, санаторно-курортные учреждения, медицинские общественные и международные организации и объединения, Республиканские ЛПУ, центры, лечебно-профилактические учреждения, санитарно-профилактические учреждения, патолого-анатомические и судеб-

но-медицинской экспертизы службы, аптечные учреждения, ведомственные органы и учреждения здравоохранения, коммерческие организации, страховые компании, выставочные компании. Поэтому вопросы, связанные с автоматизацией медицинской деятельности, должны рассматриваться комплексно.

Медицинские автоматизированные информационные системы (АИС) предназначены для специалистов различного профиля, но в то же время подразумевают их совместное использование, что в результате позволяет формировать полноценные электронные базы данных о пациентах и другой медицинской информации. В результате внедрения информационных систем, информация накапливается, своевременно актуализируется и используется медицинским персоналом в процессе работы.

Подробнее следует остановиться на таких критериях, как универсальность и преемственность, централизация, безопасность, которые должны быть применимы к интеллектуальным технологиям обработки медицинских данных, а также предложены подходы для их технической реализации.

Универсальность и преемственность АИС

Для достижения максимально эффективной работы в АИС еще на этапе проектирования инфраструктуры и разработки программного обеспечения необходимо учитывать следующие аспекты:

- автоматизированные рабочие места (АРМ) специалистов должны быть организованы подобно во всех учреждениях;
- технические средства (персональный компьютер, принтер, диагностическое оборудование), используемые на АРМ, должны быть взаимозаменяемы;
- входные и выходные данные из АИС должны иметь такую структуру, чтобы они могли свободно импортироваться и экспортироваться внутри всех информационных подсистем здравоохранения.

При правильной организации АРМ специалист становится «мобильным» и может работать на любом рабочем месте внутри информационной системы. В результате появляется возможность работы на одном АРМ несколькими специалистами или одному специалисту на нескольких АРМ без дополнительной подготовки.

В то же время техническое обслуживание оборудования на местах за счет взаимозаменяемости упрощается.

Централизация АИС

Совокупность результатов работы всех участников процесса информатизации системы здравоохранения напрямую зависит от следующих составляющих:

- внедрения критериев идентификации и синхронизации пациентов в информационных базах данных (электронных картотеках) о пациентах (например, идентификация пациента по личному номеру паспорта);
- использования единых классификаторов (административно-территориального деления, структурных подразделений сотрудников, перечня заболеваний и др.);
- распределения функциональных обязанностей каждого медицинского работника при работе с электронной базой данных согласно должностным обязанностям;
- надежного способа централизованного обмена информацией внутри медицинской сети;
- организации узлов хранения информационных баз (местных, региональных и центрального).

Строгая организация всего процесса позволяет в результате работы получить четко структурированные данные на выходе, по всем параметрам проводить их анализ.

Безопасность АИС

В связи с тем, что медицинская информация является конфиденциальной, необходимо поддерживать информационно-техническую и информационно-психологическую (психофизическую) безопасность медицинской информационной системы, гарантирующую неуязвимость системы на всех этапах работы с ней.

Информационная безопасность АИС состояние защищённости, при котором обеспечиваются конфиденциальность, доступность, целостность, подотчётность и подлинность её ресурсов. Для поддержания АИС в безопасном состоянии требуется регулярно следить за защищённостью информации и поддерживающей инфраструктуры от случайных или преднамеренных воздействий естественного или искусственного характера, которые могут нанести ущерб субъектам информационных отношений.

При выборе средств защиты необходимо принять во внимание:

- законодательную, нормативно-правовую и научную базу;
- структуру и задачи подразделений, обеспечивающих безопасность информационных технологий;
- организационно-технические и режимные меры и методы;
- программно-технические способы и средства обеспечения информационной безопасности.

Таким образом, внедрение информационных технологий в систему здравоохранения, с одной стороны, создает условия для улучшения доступности и качества медицинской помощи, а с другой стороны, требует детального и тщательного подхода к проектированию.

Список цитированных источников

1. Сачек, М.М. Система мониторинга и оценки результативности медицинской науки Беларуси / М.М. Сачек, В.А. Филютинн, И.В. Малахова, Т.В. Дудина, А.И. Ёлкина // Вопросы организации информатизации здравоохранения. – Минск. – № 4. – 2012. – 92 с.
2. Токеджанов, Б.Т. Национальная телемедицинская сеть Республики Казахстан / Б.Т. Токеджанов // Вопросы организации информатизации здравоохранения. – Минск. – № 4. – 2012. – 92 с.
3. Здравоохранение Беларуси [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://healthcare.by>.

УДК 004.8

ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИСТАНЦИОННО УПРАВЛЯЕМОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА

Кожух В.С.

*Объединенный институт проблем информатики НАН РБ,
Лаборатория моделирования самоорганизующихся систем, г. Минск
Научный руководитель: Крот А.М., д.т.н., профессор*

Как правило, при дистанционном управлении мобильным роботом (МР) возникают следующие проблемы:

- обрыв связи;
- ошибка оператора.

Они обусловлены следующими характеристиками: качество связи, компетентность оператора, ошибка передачи данных. Далеко не всегда можно повлиять на такие характеристики, поэтому необходим механизм, обеспечивающий функционирование мобильного робота даже при возникновении подобных проблем.

В качестве решения предлагается полуавтоматическое движение: комбинация дистанционного и автоматического управления. Суть такого движения заключается в том,

что при определенных условиях, возникших при дистанционном управлении, управление переходит на автоматическое, при котором МР передвигается самостоятельно.

Рассмотрим некоторые аспекты полуавтоматического движения.

1. Общий случай полуавтоматического движения при дистанционном управлении

Первая задача, возникающая при дистанционном управлении МР – это интерпретация команд оператора. Например, как именно должен МР воспринять команду «вперед»: как один оборот колес, как движение прямо в течение установленного заранее промежутка времени или же до следующей команды оператора. При наличии полуавтоматического режима, помимо перечисленных интерпретаций, можно добавить, к примеру, и движение вперед до какого-либо препятствия. Это достигается путем непосредственного участия в движении системы управления МР. Более того, подобную систему управления можно расширять в зависимости от сложности МР. К примеру, робот может объезжать незначительные препятствия, возвращаясь на исходную траекторию, и останавливаться перед более значимыми препятствиями.

2. Обрыв связи

На случай обрыва связи система управления МР должна быть обеспечена блоком автономного поведения, который содержит автоматические стратегии поведения робота. К таким стратегиям относятся, например, ожидание команды от оператора в течение промежутка времени, поисковое поведение, повтор движений в обратном порядке и т.д. Если оператором задана итоговая цель движения, то робот может пытаться продолжить выполнять её самостоятельно. Такой подход может быть особенно востребованным при функционировании МР в зоне неустойчивого приема. Полуавтоматическое движение позволит выполнять команды без необходимости останавливаться каждый раз при обрыве связи.

3. Ошибка оператора

При дистанционном управлении нельзя исключать ошибки оператора в управлении, которые могут привлечь к неисправности МР или его выходу из строя. Адекватная оценка состояния окружающей среды оператором зависит от качества интерфейса. Более того, известно, что нужен изрядный опыт, чтобы научиться адекватно трактовать удаленные показания робота. Как правило, на месте, в пределах локальной видимости сенсоров, робот имеет более точную оценку окружающей среды, чем оператор. В режиме полуавтоматического движения, в критических ситуациях робот может перехватить управление на себя. Выгода от переключения управления состоит в том, чтобы дать оператору возможность отреагировать на предупреждение МР, избежать повреждений, повторно оценить ситуацию и либо отдать новую команду, либо подтвердить предыдущую. Активированный режим анализа команд оператора не является обязательным условием начала работы. При функционировании МР в экстремальных для него ситуациях и с опытным оператором такой режим будет только мешать, в то время как при обучении оператора такой режим необходим. Причем, в этом свете рассматривается не всё полуавтоматическое движение, а именно активация такого движения МР на команду оператора.

4. Управление несколькими роботами

Еще одна область использования полуавтоматического режима – управление несколькими роботами одним оператором. Каждый МР активирует полуавтоматическое движение при переключении оператора на другого робота. При автономном движении робот продолжает выполнение цели, заданной оператором ранее. Таким образом, эта возможность позволяет решить более общую проблему, когда оператор задает не команды, а задачи и цели для исполнения. МР уже сами составляют набор команд управ-

ления в зависимости от окружающей среды. Дальнейшее развитие в этом направлении зависит от разработки математических аппаратов оценки окружающей среды и принятия решений.

Вывод

Полуавтоматическое движение, предлагаемое в качестве решения проблем управления МР в случае обрыва связи и ошибки оператора, имеет также дополнительные преимущества, основное из которых – реализация группового движения.

Реализация полуавтоматического движения и практическая модель

Реализовывать полуавтоматическое движение планируется на основе адаптивного управления в виде нейросетевой модели поискового движения [1].

Практическое применение полуавтоматического движения будет представлено на базе экспериментальной модели группового робота для решения задач мониторинга помещений [2].

Список цитированных источников

1. Прокопович Г.А. Нейросетевая модель для реализации поисковых движений мобильного робота // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем: материалы III Международной научно-технической конференции. – Минск: БГУИР, 2013.

2. Прокопович, Г.А. Экспериментальная модель группового робота для решения задач мониторинга помещений / Г.А. Прокопович, В.А. Сычев // Инновационные технологии, автоматизация и мехатроника в машино- и приборостроении: материалы II Международной научно-практической конференции. – Минск: БНТУ, 2013.

УДК 004.932

ПОДХОД К ВОПРОСУ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Кочурко В.А.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Головкин В.А., профессор, д.т.н.*

Одной из фундаментальных задач искусственного интеллекта является вопрос восприятия окружающего мира и правильной реакции на основе поступающих данных. Наиболее естественно преобразуемый в понятный для человека тип восприятия – визуальный, поэтому компьютерное зрение является наиболее актуальной и динамично развивающейся областью искусственного интеллекта.

При решении некоторых прикладных задач (которые можно классифицировать как задачи поиска) в области компьютерного зрения главным показателем успешности применяемых алгоритмов является возможность их применения в реальном времени (минимизации времени поиска [1]). Примером такой задачи может служить поиск открытого неконтролируемого огня (неподвижный прячущийся объект, задача гарантированного поиска [1]) в лесном массиве с помощью набора автономных агентов, непрерывно курсирующих по этому массиву.

Первая задача, решаемая на подобных агентах – поиск интересующего объекта (например, огня) на получаемом с камеры изображении. Данная задача может быть разделена на две – поиск всех заметных объектов и их классификация.

Задача поиска заметных объектов, используя стандартные и общепринятые подходы, является высокочувствительной по времени операцией [2] для изображений с площадью более 10^5 квадратных пикселей.

Основой быстрого алгоритма поиска значимых объектов может служить алгоритм из [2], который базируется на создании карт значимых объектов как множества евклидовых

расстояний между некоторыми характеристиками каждого пикселя и среднего значения таковой характеристики по всему изображению.

Используемые характеристики – показатели сферического RGB-пространства, полученного из обычной RGB-модели путём преобразования, аналогичного преобразованию декартовой трёхмерной системы координат в сферическую. Эти характеристики – азимутальный угол ϕ , зенитный угол θ и интенсивность l , представляющая расстояние до начала координат соответственно.

Тогда карты значимых объектов могут быть получены на основании следующих формул:

$$\begin{aligned} M_l(x) &= \left\| \Omega_{\mu l} - \Omega_l(x) \right\| \\ M_{\phi\theta}(x) &= \sqrt{\left(\Omega_{\mu\phi} - \Omega_{\phi}(x) \right)^2 + \left(\Omega_{\mu\theta} - \Omega_{\theta}(x) \right)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $M_l(x)$ – карта значимых объектов, вычисленная по показателю интенсивности; $M_{\phi\theta}(x)$ – аналогичная карта по азимутальному и зенитному углу; $\Omega_l(x)$, $\Omega_{\theta}(x)$, $\Omega_{\phi}(x)$ – значения соответствующих характеристик (интенсивности, зенитного угла, азимутального угла) пикселя x ; $\Omega_{\mu l}$, $\Omega_{\mu\theta}$, $\Omega_{\mu\phi}$ – средние значения характеристик по изображению.

Объединение этих карт возможно на основании показателя насыщенности изображения C_c , вычисляемого как расстояние между наиболее удалённой от центра координат точки RGB-пространства до наиболее близкой. В таком случае составная карта значимых объектов:

$$M(x) = \frac{1}{1 - e^{-10(C_c - 0.5)}} M_{\phi\theta}(x) + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-10(C_c - 0.5)}} \right) M_l(x), \quad (2)$$

где коэффициенты при картах $M_l(x)$ и $M_{\phi\theta}(x)$ отвечают за учёт цветности и насыщенности всего изображения в качестве весовых коэффициентов при соответствующих значениях карт значимых объектов.

Одновременно с созданием карты значимых объектов производится сегментация изображения [3] по похожему принципу – на основании взвешенных евклидовых расстояний по интенсивности и цветности между двумя соседними пикселями:

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \bar{\alpha}(p, q) \cdot d_l(p, q) + \alpha(p, q) \cdot d_{\psi}(p, q), \\ d_l(p, q) &= |l_p + l_q|, \\ d_{\psi}(p, q) &= \sqrt{\left(\theta_q - \theta_p \right)^2 + \left(\phi_q - \phi_p \right)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где p и q означают два сравниваемых пикселя, а $\alpha(p, q)$ и $\bar{\alpha}(p, q)$ – функцию активации и комплементарную ей функцию такую, что $\bar{\alpha}(p, q) + \alpha(p, q) = 1$. Функция активации введена для учёта насыщенности цветом всего изображения и является сигмоидальной:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{c}{2} + \frac{c}{2} \sin\left(\frac{(x-a)\pi}{b-a} + \pi\right), & a < x < b \\ c, & x \geq b, \end{cases} \quad (4)$$

где параметры a , b , c принадлежат единичному интервалу $(0, 1)$.

На основании вышеописанного гибридного евклидового расстояния производится разделение изображения на сегменты, каждый из которых после проверяется на наличие значимых объектов по карте значимости, полученной параллельно (так как задачи сегментации и получения карты значимости независимы, их исполнение может быть произведено параллельно), после чего из изображения извлекается набор значимых сегментов, каждый из которых может быть искомым объектом.

Дальнейшее действие зависит от стратегии реагирования: в случае, если за видеопотоками каждого агента следит оператор, то подзадачу распознавания решать не нужно; достаточно сконцентрировать внимание оператора на наиболее плотном кластере значимых сегментов, для чего можно использовать тактику центрирования камеры на средневзвешенной точке изображения после каждой обработки изображения:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i S_i}{\sum_{i=1}^N S_i}, \quad (5)$$

где N – количество значимых сегментов, X_i – координаты центра масс каждого из сегментов, а S_i – площадь каждого из значимых сегментов. В этом случае при центрировании на группе значимых сегментов при отсутствии иных кластеров таких сегментов на последующих изображениях агент впадает в устойчивое равновесие, посылая сигнал оператору о таковом кластере, а при наличии большого числа разбросанных по изображению значимых сегментов будет медленно переводить своё внимание на большее скопление таковых сегментов.

При отсутствии оператора агенту придётся решать также вопрос распознавания значимых сегментов, что скажется на быстродействии агента. В дальнейшем планируется исследование обеих стратегий реагирования, тактик реагирования при наличии оператора и тактик распознавания при его отсутствии.

Список цитированных источников

1. Абчук, В.А. Поиск объектов / В.А. Абчук, В.Г. Суздаль. – М.: Советское радио, 1977.
2. Ramík, Dominik Maximilián. A machine learning based intelligent vision system for autonomous object detection and recognition / Ramík, Dominik Maximilián [et al.] *Applied Intelligence* (2013): 1-18.
3. Ramík, Dominik Maximilián. Hybrid salient object extraction approach with automatic estimation of visual attention scale / Ramík, Dominik Maximilián, Christophe Sabourin, and Kurosh Madani. *Signal-Image Technology and Internet-Based Systems (SITIS), 2011 Seventh International Conference on*. IEEE, 2011.

УДК 004.8

МЕТОДИКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ИНИЦИАЛИЗАЦИИ ШАГА ОБУЧЕНИЯ В АЛГОРИТМЕ BACK PROPAGATION ERROR

Савицкий А.Ю.

Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Савицкий Ю.В., к.т.н., доцент

В работе предлагается и обосновывается методика динамической инициализации индивидуального шага обучения в алгоритме Back Propagation Error (обратного распространения ошибки), по настоящее время остающемся наиболее популярным для обучения многослойных нейронных сетей. Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют практическую значимость и перспективность метода.

Введение

В настоящее время в мире накоплено значительное количество теоретических результатов и большой практический опыт в применении аппарата искусственных нейронных сетей для обработки информации в различных сферах. Предложен ряд высокоэффективных алгоритмов обучения (в том числе Back Propagation Error, BPE), позволяющих улучшить адаптивные свойства нейросетевых моделей. Ключевым моментом задачи проектирования нейронных систем по настоящее время остается проблема эффективного обучения нейронных сетей [1]. При этом используемые для обучения алгоритм BPE и его известные модификации обладают принципиальными недостатками, связанными с необходимостью выбора констант обучения, следствием чего являются проблемы низкой сходимости и стабильности обучения, а также проблемы локальных минимумов [1,2,3,8]. Применяемые в настоящее время для обучения нейронных сетей более совершенные методы оптимизации (сопряженных градиентов [4, 5], Ньютона [5, 7], Левенберга-Марквардта [5,9]), хотя и позволяют значительно улучшить процесс сходимости алгоритма, также обладают существенными недостатками, сильно ограничивающими их эффективное применение в практических задачах. Наиболее характерными из этих недостатков являются большая вычислительная сложность итерации обучения, высокая чувствительность алгоритма к погрешностям вычислений, низкая сходимость при большом удалении целевой функции обучения от точки минимума [5]. Все это является весьма серьезным ограничением для использования нейросетевых моделей в практических задачах. Данная работа является продолжением комплекса научных исследований по оптимизации работы алгоритма BPE в контексте решения задачи выбора значения шага обучения. Главной целью своей работы автор считает снижение степени неопределенности значения шага обучения в алгоритме BPE при решении практических задач организации нейросетевых моделей.

1. Методика инициализации шага обучения

Главная идея данной работы заключается в применении в алгоритме BPE метода индивидуальной случайной инициализации шага обучения на каждой обучающей итерации. Предпосылки и суть идеи сводятся к следующему:

1. В алгоритме BPE и во всех его наиболее распространенных модификациях традиционно используется стратегия инициализации каждого весового коэффициента нейронов случайным числом, равномерно распределенным на некотором диапазоне, границы которого задаются эмпирически. Необходимость такого подхода обусловлена неопределенностью информации о начальных значениях весовых коэффициентов. При этом результат обучения существенно зависит от удачной инициализации сети; в ряде случаев, для достижения приемлемой ошибки обучения приходится неоднократно повторять данный процесс.

2. Проблему неопределенности шага обучения в алгоритме BPE предлагается решить на базе аналогичного подхода. Это означает, что на каждой итерации алгоритма для каждого весового коэффициента значение шага определяется методом вызова функции, генерирующей случайное равномерно распределенное число. Нижняя и верхняя границы инициализации определяются эмпирически как минимальное и максимальное приемлемые значения шага. Предпосылкой подхода является то, что при неудачном выборе значения глобального шага существует вероятность попадания целевой функции обучения в локальный минимум (что часто и имеет место в реальных задачах обучения). С другой стороны, случайное варьирование шага для каждого весового коэффициента в допустимом диапазоне значений на каждой итерации алгоритма уменьшает такую вероятность, что должно обеспечивать более высокую сходимость алгоритма к приемлемой ошибке обучения.

2. Результаты экспериментов

Были проведены две группы экспериментов. Многослойная нейронная сеть архитектуры 7-5-1 – 7 входных нейронов, 5 скрытых нейроэлементов с сигмоидной функцией активации и 1 нейрон линейного типа – обучена прогнозированию хаотического процесса Энона [6] по методу скользящего окна (взято 510 элементов ряда) [6]. Количество выполненных итераций обучения $NIT=10000$.

1. Шаг обучения – случайный, выбираемый по вышеуказанной методике, с диапазоном инициализации $[0,01; 0,001]$. Результаты для 20 попыток обучения: средняя ошибка обучения (средний квадрат ошибки) $MSE = 7,53E-06$; среднеквадратичное отклонение ошибки обучения $SD = 5,08E-04$.

2. Шаг обучения – глобальный детерминированный, равный 0,045 (середина диапазона инициализации шага для предыдущего эксперимента). Результаты для 20 попыток обучения: $MSE = 2,34E-05$; $SD = 7,97E-03$.

Таким образом, за счет применения методики случайной инициализации шага в алгоритме BPE ошибку обучения удалось сократить в 3,1 раза, при этом еще более существенно уменьшается параметр SD. Последнее говорит о значительном повышении стабильности процесса сходимости алгоритма BPE для вышеуказанного числа экспериментов обучения. Аналогичные результаты были получены и в других задачах обучения. В частности, при обучении нейронной сети архитектуры 5-4-1 на прогнозирование временных рядов, синтезированных на базе суперпозиции периодических функций, ошибка обучения сократилась в среднем в 1,74 раза, при одновременном уменьшении параметра SD – почти в 2 раза (диапазон инициализации шага $[0; 0,1]$, размер глобального шага 0,05, количество попыток обучения 30).

3. Заключение

По мнению автора, полученные результаты имеют практическую значимость, поскольку, во-первых, увеличивают скорость и стабильность процесса сходимости алгоритма BPE, во-вторых, создают предпосылки для эффективной параллелизации процесса обучения на многокомпонентных вычислительных архитектурах – предложенная методика динамической инициализации шага обучения не зависит от обучающего множества, промежуточных параметров обучения нейронной сети и других факторов, влияющих на эффективность процесса параллелизации. В качестве объективных недостатков метода можно отметить некоторые незначительные осцилляции ошибки при переходе от итерации к итерации, которые в целом несущественно влияют на конечный результат обучения нейронной сети.

Список цитированных источников

1. Hertz, J. Introduction to the Theory of Neural Computation / J. Hertz, A. Krogh, R. Palmer; Addison Wesley Publishing Company. – 1991. – 327 p.
2. Golovko, Vladimir. New Approach of the Recurrent Neural Network Training / Vladimir Golovko, Yury Savitsky // Proc. of the Int. Conf. on Neural Networks and Artificial Intelligence ICNNAI'99, 12-15 october 1999. – Brest, Belarus, 1999. – P. 32-35.
3. Rumelhart, D.E. Learning Representations by Backpropagating Errors / D.E. Rumelhart, G.E. Hinton, and R.J. Williams // Nature. 1986. – Vol. 323. – P. 533-536.
4. Johansson, E.M. Backpropagation Learning for Multilayer Feedforward Neural Networks Using the Conjugate Gradient Method / E.M. Johansson, F.U. Dowl, and D.M. Goodman // Int. J. Neural Systems. – 1992. – Vol. 2. – № 4. – P. 291-302.
5. Поляк, Б.Т. Введение в оптимизацию. – М: Наука, 1983. – 384 с.
6. Golovko, V. Neural Networks for Signal Processing in Measurement Analysis and Industrial Applications: the Case of Chaotic Signal Processing / V. Golovko, Y. Savitsky, N. Maniakov // chapter of NATO book «Neural networks for instrumentation, measurement and related industrial applications». – Amsterdam: IOS Press, 2003. – P. 119-143.

7. Osowski, S. Fast Second-Order Learning Algorithm for Feedforward Multilayer Neural Networks and its Applications / S. Osowski, P. Wojaczak, and M. Stodolski // Neural Networks. – 1996. – Vol. 9. – № 9. – P. 1583-1596.

8. Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский; пер. с польского И.Д. Рудинского. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 334 с.

9. Martin, T.H. Training Feedforward Network with Marquardt Algorithm / T.H. Martin and B.M. Mohammad // IEEE Trans. Neural Networks. – 1996. – Vol. 5. Nov. – P. 959-96.

УДК 519.863

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОЛОНИИ МУРАВЬЕВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НАХОЖДЕНИЯ ПУТЕЙ С ЗАДАНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Степин Ю.Г., Гайдаш О.В., Заман И.Э.

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Степин Ю.Г.*

В последнее время активно развивается научное направление, объединяющее математические методы, основанные на принципах природных механизмов принятия решений (Natural Computing – «Природные вычисления»). Одним из методов данного направления является муравьиный алгоритм, или оптимизация по принципу муравьиной колонии, который впервые был предложен М. Дориго (Marco Dorigo) [1].

Муравьиный алгоритм интересен тем, что его можно использовать для решения не только статических, но и динамических проблем. С помощью данного алгоритма в настоящее время решаются такие задачи, как: задача о коммивояжере [2], задача о рюкзаке, создание игрока-компьютера в игре Pac-Man, создание системы принятия экономических решений в автоматной модели производства, задача календарного планирования, задача реализации криптоанализа шифров перестановок, в сфере логистики задача на составление плана движения транспорта [3].

В данной статье рассматривается применение муравьиного алгоритма для решения задачи нахождения путей с заданными свойствами и с набором дополнительных ограничений в виде ресурсов. В нашем случае рассматривается движение автомобиля с ограничениями на топливо из одного города в другой.

Любой муравьиный алгоритм, независимо от модификаций, можно представить в виде последовательности действий.

1. Создание муравьев.

Количество муравьев и вершины, в которые они помещаются, зависит от ограничений, определяемых условиями задачи. На этом же этапе задается начальный уровень феромона.

2. Поиск решений.

Вероятность перехода из вершины i в вершину j определяется по формуле (1).

$$P_{ij}(t) = \frac{\tau_{ij}(t)^\alpha \left(\frac{1}{d_{ij}}\right)^\beta}{\sum \tau_{ij}(t)^\alpha \left(\frac{1}{d_{ij}}\right)^\beta}, \quad (1)$$

где $\tau_{ij}(t)$ – уровень феромона (глобальный показатель), d_{ij} – эвристическое расстояние (локальный показатель), α, β – константные параметры, определяющие значимость глобального и локального показателей.

3. Обновление феромона.

Уровень феромона обновляется в соответствии с формулой (2).

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \sum \frac{Q}{L_k}, \quad (2)$$

где ρ – интенсивность испарения, L_k – цена текущего решения для k -го муравья, Q – параметр, имеющий значение порядка цены оптимального решения, $\frac{Q}{L_k}$ – феромон, откладываемый на ребре (i, j) входящий в путь L_k .

Постановка задачи.

Задан неориентированный взвешенный граф $G(V, E)$ и имеются две функции: $f: E \rightarrow R^+$ – функция пометки ребер, означающая количество ресурсов, которые необходимо затратить для перемещения по ребру; $g: V \rightarrow R^+$ – наличие ресурсов в вершинах, причем ресурс не возобновляемый. Необходимо найти путь минимального веса из вершины u в v , такой, что количество наличного ресурса перед началом передвижения по каждому ребру не меньше, чем вес ребра. Содержательно задача может рассматриваться следующим образом. Есть автомобиль, вместимость бака которого Q . В некоторых вершинах расположен некоторый запас горючего (функция g). На перемещение из вершины i в вершину j необходимо затратить $f(i, j)$ горючего. Существенное отличие рассматриваемой задачи от стандартной задачи поиска пути состоит в том, в нашем случае в путь, являющийся решением задачи, может многократно входить отдельная вершина или ребро. Данная задача очевидно сложнее задачи коммивояжера и для нахождения ее точного решения необходимо воспользоваться только алгоритмом поиска с возвратением.

Для решения данной задачи предлагается следующая модификация муравьиного алгоритма:

1. Выполняется предобработка – однократно рассчитываются: матрица весов кратчайших путей, матрица уровней топлива, которое можно довести в каждую из вершин по этим путям и матрица остатков топлива для каждой из вершин, если следовать в них по данным путям.

2. В каждом поколении из первой вершины запускается заданное количество муравьев. Каждый муравей ищет путь до тех пор, пока он не достигнет точки назначения, либо у него не закончится топливо.

3. Выбор ребра строится по следующим правилам:

a) проверяются ребра, достижимые из текущей вершины;
b) проверяется по матрице, достаточно ли топлива, чтобы попасть из текущей вершины в конечную по матрице кратчайших путей. Если значение меньше нуля, то случайным образом определяется: переходим мы к следующему ребру либо проводим анализ дальше;

c) оценивается текущий уровень топлива у муравья и, при необходимости, берется дополнительный запас (если муравей не был в текущей вершине ни разу, то он забирает весь допустимый запас топлива, иначе – случайный процент от него);

d) оцениваются возможные варианты выбора следующего ребра и выбирается случайным образом одно. Если следующее ребро не выбрано – муравей погибает.

4. Затем рассчитывается новый уровень феромона для каждого использованного ребра по формуле (3).

$$newLPh_i = (1-\rho) * oldLPh_i \pm \Delta\tau \quad (3)$$

где $newLPh_i$ – новый уровень феромона для ребра i ; ρ – коэффициент испарения феромона; $\Delta\tau$ – экспертная оценка (со знаком «+» для положительного уровня феромона

(если муравей добрался до пункта назначения), со знаком «-» – для отрицательного (если не добрался)); $oldPLh_i$ – старый уровень феромона (положительный либо отрицательный), соответствующий i -му ребру с конкретным числом его посещений.

Распределение концентрации положительного и отрицательного феромона хранятся в соответствующих матрицах, в которых строки соответствуют ребрам графа, а столбцы – количеству перемещений по ним.

5. В случае достижения пункта назначения, лучшая стоимость на текущий момент сравнивается со стоимостью пройденного пути. Если она меньше, то заменяется стоимостью пройденного пути.

6. Конечным результатом является значение лучшей стоимости на текущий момент. Если оно равно «INT32_MAX», то путь не был найден.

Основные отличия предложенного алгоритма от стандартного муравьиного алгоритма:

- предобработка информации;
- в формулу (1) добавляются новые параметры: количество посещений вершины, количество прохождений по ребру, количество ресурса в вершине, характеристики кратчайшего пути из текущей вершины в целевую;
- феромон разделяется на два типа: положительный, поощряющий выбор ребра и отрицательный, блокирующий выбор ребра;
- вводятся различные уровни феромона для каждого следующего прохождения по одному и тому же ребру в пути отдельного муравья;
- вводится дополнительный вид феромона, определяющий количество ресурса, который нужно забрать из вершины, при данном ее прохождении;
- в каждой вершине, в процессе выбора пути, используются два случайных параметра: выбор следующего ребра; выбор количества ресурса, которое забирается в данной вершине на этом шаге.

Разработанный алгоритм был реализован на языке Java в среде Eclipse. Проверка на тестах показала его хорошую сходимость.

Список цитированных источников

1. Dorigo, M. Ant Algorithms for Discrete Optimization // Artificial Life. – 1999. – Vol.5. – № 3. – P.137-172.
2. Штовба, С. Муравьиные алгоритмы / С.Д. Штовба // ExponentaPro. Математика в приложениях. – 2004. – № 4. – С. 70-75.
3. Gambardellaa, L.M. Ant Colony Optimization for vehicle routing in advanced logistics systems / L.M. Gambardellaa, A.E. Rizzoli, F. Oliveriob, N. Casagrande, A.V. Donati, R. Montemanni, E. Lucibellob. – 2003.

УДК 621

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНТУРНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Шах А.В.

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск
Научный руководитель: Ковалева И.Л., к.т.н., доцент*

Метод контурного анализа, предложенный Фурманом Я.А., дает хорошие результаты при обработке изображений, подготовленных специальным образом. Процесс подготовки изображений состоит в получении данных о вектор-контурах, сформированных после нахождения замкнутых контуров на отфильтрованных и бинаризованных изображениях.

В рассматриваемой работе для повышения производительности метода контурного анализа было предложено разделить его на два этапа. На первом этапе сравниваются свертки автокорреляционной функции (АКФ) вектор-контура. Остановимся на выборе конкретных вейвлетов для свертки. Учитывая тот факт, что свертка нужна для сравне-

ния, и то, что АКФ часто является симметричной функцией, не все вейвлеты одинаково хорошо подходят для этих целей. Основным критерием при выборе вейвлета являются его дискриминирующие свойства. В идеале, дискриминирующий вейвлет должен давать равномерное распределение для своего первого компонента. Вейвлет Уолша, выбранный для получения свёрток, не дает равномерного распределения, однако его дискриминирующих свойств первого компонента достаточно для уменьшения пространства поиска шаблонов в три-четыре раза.

Если степень различия свёрток ниже заданного пользователем порога, можно переходить ко второму этапу сравнению самих АКФ. На этом этапе отсеиваются те вектор-контуры, которые имеют подобные свертки, но при этом различные АКФ.

При сравнении АКФ контур считаем распознанным, если различия АКФ не превосходят заданного пользователем порога (стоит отметить, что данный порог не связан с порогом на первом этапе). Повышая порог, можно увеличить количество успешных распознаваний за счет увеличения шанса ложного распознавания, понижая наоборот, уменьшаем вероятность нахождения нужного элемента с помехами и понижаем шанс на распознавание шума.

Реализация предлагаемого подхода выполнена на языке C#. Для получения изображения и его предварительной обработки была использована библиотека EmguCV. Работа алгоритма проверялась при распознавании изображений печатных символов, получаемых в реальном времени с веб-камеры. Тестирование выявило невозможность распознавания символов при повороте относительно вертикальной оси, так как при этом появляются геометрические искажения, что ведет к изменению контура.

УДК 004.93'1; 004.032; 621.38.049.77

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МИКРОСХЕМ

Шепелевич М.А.

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск
Научный руководитель: Дудкин А.А., д.т.н., доцент*

Предложены правила определения параметров функций принадлежности для идентификации топологических объектов на изображениях топологических слоев интегральных схем или их фотошаблонов.

Ключевые слова: интегральная микросхема, обработка изображений, фотошаблон, нечеткая нейронная сеть, функция принадлежности.

Введение

При изготовлении интегральных микросхем важным является контроль технологических процессов, который заключается в измерении характеристик и проверке результатов основных операций на соответствие установленным требованиям [1]. Основной задачей при этом является идентификация объекта по изображениям, полученным с использованием систем технического зрения, т.е. обнаружение (определение границ) и локализация (определение местоположения) объектов с анализом их свойств и контролем параметров. При этом требуется по некоторым признакам выделять однородные области изображения, причем, как правило, это подобие нечеткое и часто нарушается. Наиболее подходят для ее решения нейросетевые технологии. Применение нейронных сетей в задачах обработки визуальной информации обосновывается также свойством обучаемости или адаптивности нейронных сетей к новым задачам, при этом сохраняются

архитектура сети и алгоритм ее функционирования [2]. Для повышения точности идентификации топологических объектов на изображениях топологических слоев интегральных схем предлагается использовать нечеткую нейронную сеть, построенную на основе многослойного неокогнитрона [3]. В данной работе предложен алгоритм определения параметров функций принадлежности для определения нечеткого различия двух изображений объектов топологических слоев интегральных схем или их фотошаблонов.

Определение параметров функций принадлежности можно разбить на следующие этапы:

а) Определяется область определения функции следующим образом: находятся максимальное и минимальное значения среди обучающих данных: $x_i^- = \min(x_i)$, $x_i^+ = \max(x_i)$, где x – значение обучающей выборки i -го входа сети, т.е. область определения функции принадлежности это интервал $[x_i^-, x_i^+]$.

б) Определяются параметры функций принадлежности с помощью методов определенных для каждой функции.

Функция нечеткого различия

Рассмотрим две матрицы

$$W = \begin{pmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,Y} \\ \vdots & \ddots & \\ w_{X,1} & & w_{X,Y} \end{pmatrix} \text{ и } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,Y1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{X1,1} & & a_{X1,Y1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где W – матрица пикселей эталонного изображения;

A – образ матрицы W , который содержит искажения типа смещения.

Поскольку в матрице A предполагается смещение (изменение) как значений соответствующих пикселей, так и его геометрических координат, то матрица A имеет больший размер, определяемый максимальными величинами смещения по горизонтали и вертикали.

Для определения функции $fd(A, W)$ нечеткого различия двух матриц A и W введем два параметра B и R , которые задают диапазоны нечеткости различия. Параметр B – это диаметр яркостных искажений изображения, определяющий максимально допустимое расстояние между двумя пикселями изображения, которые считаются эквивалентными. Параметр R – радиус геометрических искажений, определяющий максимально допустимое смещение пикселей эталона на изображении (образе).

Отметим, что для любых двух соседних пикселей $a_{x1, y1}$, $a_{x2, y2}$ и их смещений $\vec{v}_{x1, y1}$, $\vec{v}_{x2, y2}$ справедливо $|\vec{v}_{x1, y1} - \vec{v}_{x2, y2}| \leq \theta$, где $\theta \leq \max(|\vec{v}_{x1, y1}|, |\vec{v}_{x2, y2}|)$. Данное свойство указывает на однородность геометрических искажений, т. е. на почти одинаковое смещение пикселей.

Построим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,Y} \\ \vdots & \ddots & \\ d_{X,1} & & d_{X,Y} \end{pmatrix},$$

$$d_{x,y} = \begin{cases} 0, & \text{если } \min_{i,j=0,\dots,2R} (a_{x+i,y+j}) \leq w_{x,y} \leq \max_{i,j=0,\dots,2R} (a_{x+i,y+j}); \\ 0, & \text{если } |w_{x,y} - a_{x+R,y+R}| < B; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2)$$

ИННОВАЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ UNIX-ПОДОБНЫХ СИСТЕМ И МОБИЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 519.876:544.77.022:691.32

АНАЛИЗ СВЯЗНОСТИ ОБОЛОЧЕК В СЛУЧАЙНОМ РАЗМЕЩЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Дивинец А.А.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Разумейчик В. С., к.т.н.*

Рассмотрим систему сферических частиц, случайно размещенных в ограниченном пространстве с плотностью заполнения (упаковки) k . Возникает вопрос в определении «максимально допустимой» плотности заполнения: насколько плотной может быть такая упаковка частиц, в которой отсутствует бесконечный кластер связанных частиц?

Анализ связности отдельно взятой частицы с соседними заключается в исследовании ее ближайшей окрестности. Такую окрестность можно рассматривать как проницаемую оболочку определенной толщины. Тогда две частицы будем считать связанными, если их оболочки перекрываются.

В целом, задача определения максимума упаковки решена лишь для моно- и бидисперсных систем. Для монодисперсных систем, имеющих регулярную решеточную структуру (слоеная решетчатая упаковка, гексагональная плотная упаковка и т.д.), получены аналитические решения. Выявлена плотнейшая упаковка – упаковка Кеплера, в которой сферы занимают 74% объема. Для случайного размещения частиц аналитические методы неприменимы, и только методами имитационного моделирования можно синтезировать действительно случайные структуры и эффективно исследовать их характеристики. Так, путем имитационного моделирования было выявлено, что в максимально случайном зажатом состоянии одинаковые сферы занимают 64% объема.

Открытыми все же остаются вопросы определения максимума упаковки для полидисперсных частиц и, что важнее, влияние толщины проницаемой оболочки на максимально допустимую плотность заполнения объема частицами.

Подобные вопросы весьма актуальны в области вычислительного материаловедения. При прогнозировании прочности и долговечности бетона особое внимание уделяется изучению приконтактной зоны, возникающей в области контакта цементного камня с поверхностью заполнителя. Такая зона, называемая чаще транзитной зоной, рассматривается как отдельный компонент в макроструктуре бетона, поскольку обладает свойствами, сильно отличающимися от аналогичных свойств однородного цементного камня, в первую очередь, более высокой пористостью. Существующие на сегодняшний день предложения по назначению оптимального состава бетонной смеси, основанные главным образом на минимизации пустотности между зернами заполнителя, могут привести к нежелательной ситуации – «слишком плотной» упаковке частиц заполнителя и, как следствие, «слишком частом» пересечении неоднородных транзитных зон, особенно при высоких значениях их толщины. Это может привести к значительному ухудшению свойств материала, главным образом, к увеличению его проницаемости. Вот почему оптимизацию состава бетона необходимо осуществлять с учетом параметров транзитной зоны, и изменяемым в процессе гидратации их характером.

Задачу определения интегральных характеристик связности сферических частиц полидисперсной системы можно решать с позиции теории перколяции, которая как раз и

имеет дело с образованием связанных объектов (кластеров) в неупорядоченных средах. Кластер, соединяющий две противоположные стороны системы, является бесконечным (или перколяционным). Доля заполнения модельного объема сферами, при котором вероятность возникновения перколяционного кластера равна 0.5, называется порогом перколяции. Ниже порога перколяции процесс ограничен конечной областью среды (существуют только кластеры конечного размера) [1].

Моделирование предлагается осуществлять в несколько этапов:

- синтез случайной структуры полидисперсной системы с использованием внерешеточной модели случайного размещения частиц без перекрытия [2];
- идентификация кластерной структуры – распределение сферических частиц по кластерам по факту определения связности между отдельными частицами;
- определение характеристик кластеров и выявление перколяционного кластера, если он существует.

На базе имитационного моделирования по результатам достаточно большого количества вычислительных экспериментов при различных значениях исходных параметров – гранулометрического состава, толщины оболочки, процента заполнения модельного куба сферическими частицами – можно определить характеристики связности частиц и выявить зависимость этих характеристик от каждого из перечисленных параметров. Поскольку главной интегральной характеристикой связности, с точки зрения перколяции, является вероятность возникновения перколяционного кластера, имитационное моделирование позволит не только определить искомое значение максимально допустимого коэффициента заполнения (для заданного гранулометрического состава и конкретного значения толщины оболочки), но и выявить зависимость порога перколяции от: гранулометрического состава дисперсной фазы при неизменном значении толщины оболочки; толщины оболочки при неизменном гранулометрическом составе дисперсной фазы.

Вывод: Анализ связности оболочек в случайном размещении сферических частиц по-прежнему остается актуальной задачей, решение которой позволит определить максимально допустимый коэффициент заполнения полидисперсной системы, а применительно к задаче оптимизации состава бетонной смеси – исследовать проницаемость по транзитным зонам с позиции их конфигурационной связности, зависящей от количества и гранулометрического состава заполнителя.

Список цитированных источников

1. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 262 с.
2. Разумейчик, В.С. Стохастическая структурно-фазовая модель гидратирующих цементных систем: автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н.: 05.23.05. – Брест: БрГТУ, 2012. – 25 с.

УДК 621.382.037.37

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА СИНТЕТИЧЕСКИХ АЛМАЗНЫХ ТЕРМОРЕЗИСТОРОВ

Лапич С.В.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Дереченник С.С., к.т.н., доцент*

Современные тенденции к расширению областей применения приборов твердотельной электроники обуславливают необходимость их эксплуатации в более жестких условиях: химически агрессивные среды, повышенные рабочие температуры, постоянно

возрастающие требования к надежности и стабильности приборов, радиация. Полупроводниковый алмаз, который обладает уникальным набором физических свойств, является исключительно ценным материалом для создания элементной базы нового поколения, в том числе полупроводниковых терморезисторов с отрицательным температурным коэффициентом сопротивления.

Исходными данными для исследований полупроводниковых приборов явились: конструкторская документация на терморезисторы, предусматривающая использование металлокерамических корпусов типа КД-3 и КД-34 по ГОСТ 18742-88; технические спецификации на материалы деталей корпуса, общие характеристики технологического процесса. Цель работы – исследовать механические эффекты в контактной системе «кристалл-вывод» в условиях динамического теплового нагружения. Основные задачи исследования были обусловлены рядом принципиальных особенностей данных терморезисторов. Во-первых, электрическое соединение чувствительного элемента (кристалла синтетического алмаза) с выводами терморезистора осуществляется, как правило, методом сварки, т.к. непосредственная пайка металлических выводов к поверхности алмаза затруднена. Сварное соединение, по сравнению с паяным, обладает большей механической жесткостью, поэтому при эксплуатации прибора в широком диапазоне температур механические деформации конструкции могут нарушить целостность электрического контакта «кристалл-вывод». Поэтому помимо задачи теплопроводности, необходимо решить задачу термоупругости, с тем, чтобы определить механические напряжения и деформации в деталях конструкции терморезистора. Во-вторых, применение терморезисторов в качестве датчиков температуры, например в термоанемометрах, тесно связано с требованиями по быстродействию, т.е. снижению тепловой инерционности корпуса приборов. Следовательно, требовалось определить параметр тепловой постоянной в цепи корпус-кристалл, что достигается решением нестационарной задачи теплопроводности. Отраслевой стандарт определяет тепловую постоянную кристалл-корпус как время, в течение которого температура кристалла достигает 63.2% от установившегося значения при разогреве мощностью рассеяния с постоянной температурой корпуса [1].

В результате анализа конструкций приборов в аналитическом виде была разработана нестационарная тепловая модель терморезисторов в осесимметричных (цилиндрических) корпусах. Модель выражена в виде дифференциального уравнения теплопроводности в полярных координатах, а для анализа температурных деформаций конструкции – в виде связанного дифференциального уравнения теплопроводности в векторной форме [2, 3].

Решение нестационарной тепловой задачи (определение тепловой постоянной) и связанной квазистатической задачи термоупругости (определение механических деформаций и напряжений) эффективно выполнено численными методами с использованием компьютерного моделирования. Для исследования использован специализированный пакет компьютерного моделирования Comsol Multiphysics версии 3.5a, в котором созданы геометрические модели конструкций прибора, заданы граничные и краевые условия, определены теплофизические параметры материалов деталей корпуса. Это позволило добиться высокой точности решения, а также наглядно визуализировать результаты.

В результате анализа динамики нагрева (охлаждения) терморезистора найден параметр «тепловая постоянная корпус-кристалл», величина которого, при изменении температурного перепада в диапазоне от 10°C до 150°C, находится, соответственно, в пре-

делах 16,7...18,7 с (корпус КД-3) и 9,5...9,7 с (КД-34). Для анализа деформационных характеристик конструкции расчетная модель была модифицирована за счет исключения из рассмотрения несущественных элементов (внешних проволочных выводов, воздушного промежутка внутри корпуса), а также рассмотрения лишь аксиальных деформаций (смещений), наиболее существенных с точки зрения обеспечения контакта держателей с термочувствительным кристаллом. В результате численного моделирования определено, что при крайних температурах 300°C и минус 200°C величина промежутка между выводами-держателями корпуса КД-3 может увеличиваться на 0,012...0,014 мм (при нагреве корпуса) или уменьшаться примерно на 0,01 мм (при охлаждении корпуса). Для корпуса КД-34 аналогичные показатели составляют соответственно 0,0055 и минус 0,0045 мм. Показано, что быстрый (со скоростью 15 и более градусов в секунду) нагрев / охлаждение до крайних температур сопровождается возникновением в элементах корпуса недопустимо больших механических напряжений, которые с высокой вероятностью приведут к разрушению конструкции.

Работа выполнена в рамках научно исследовательской работы, которая является составной частью ОКР «Разработка и освоение серийного производства серии терморезисторов на основе монокристаллов синтетического полупроводникового алмаза».

Список цитированных источников

1. Микросхемы интегральные и приборы полупроводниковые. Методы расчета, измерения и контроля теплового сопротивления: Отраслевой стандарт: ОСТ 11 0944-96 / Государственное научно-производственное предприятие «Пульсар». – Введ. 01.01.1997. – Москва, 1997. – 110 с.
2. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
3. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.

УДК 681.3

РАСШИРЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Максимук С.В.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Муравьев Г.Л., к.т.н., доцент*

Целью работы является разработка элементов специализации системы имитационного моделирования GPSS World для обеспечения пользователям возможности проведения моделирования в рамках привычной предметной области и понятийного аппарата сетей массового обслуживания. При разработке использованы: методы имитационного моделирования дискретных систем; аппарат теории массового обслуживания; объектно-ориентированный подход, методы каркасного программирования и автоматической генерации программ.

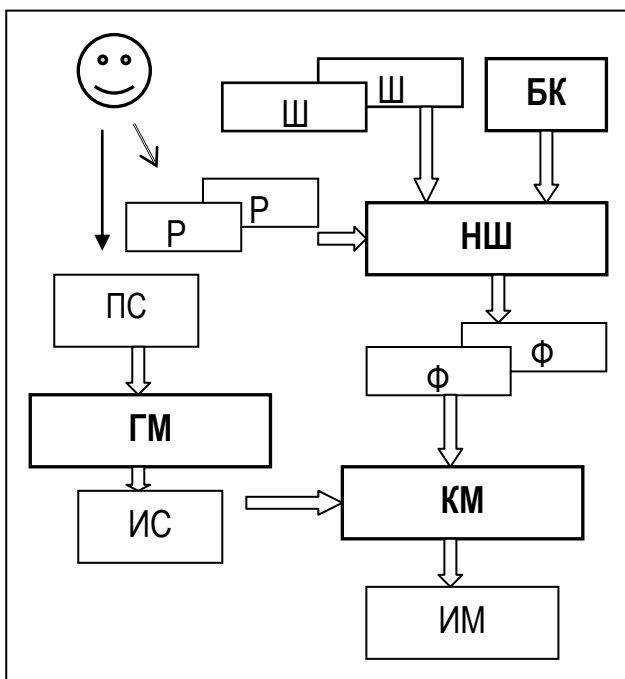
При моделировании объектов стохастическими сетевыми моделями необходимо имитировать законы распределения случайных величин, описывающих как характер поступления заявок в сеть, так и параметры обслуживания заявок в сети. При этом могут использоваться как известные, аналитические, так и произвольные законы распределений. Кроме этого, в сети могут использоваться «управляемые» узлы (источники заявок, обслуживающие узлы с переменными законами функционирования); узлы функционирующие по «расписанию»; узлы, отличающиеся нестационарным поведением, и т.п.

Исходный вариант языка GPSS (системы GPSS World) не предлагает встроенных распределений для построения моделей. Соответственно пользовательское распределение задается в форме GPPS-функций (блок function), что требует от пользователя предварительной подготовки данных, например, в форме обратных функций, обеспечивающих имитацию соответствующих распределений. Для имитации нестандартных распределений пользователю придется самостоятельно комбинировать работу блоков GPSS (generate, assign, function, transfer и др.).

Встроенный в систему GPSS World высокоуровневый язык PLUS [1] предоставляет библиотеку функций для генерации в GPSS-моделях наиболее распространенных распределений. Однако для имитации нестандартных законов пользователю придется программировать соответствующие генераторы средствами PLUS, что, существенно повышая требования к квалификации пользователя, сужает круг пользователей GPSS World, ведет к потере читаемости моделей и увеличивает вероятность ошибок при моделировании.

В работе рассматриваются элементы автоматизации построения GPSS-моделей по заданным пользователям параметрам сети с возможностью использования нестандартных распределений. В качестве принципа автоматизации использована порождающая парадигма, создан набор шаблонов генераторов и процедур их настройки [2].

Задача сведена к: 1) выбору формата описания произвольных распределений, обеспечивающих удобный пользовательский интерфейс и внутренний формат хранения описаний; 2) разработке шаблонов PLUS-функций-имитаторов распределений (правил отображения исходных данных в параметры функций-шаблонов, алгоритма работы шаблонов, правил настройки шаблонов); 3) разработке правил конструирования GPSS-моделей, обеспечивающих автоматическое связывание сгенерированных PLUS-функций-имитаторов с исходной спецификацией GPSS-модели.



Соответствующие средства, как показано на рисунке, могут быть организованы в виде совокупности шаблонов PLUS-функций-имитаторов распределений (Ш), библиотеки классов (БК), обеспечивающей функциональность средств, процедур настройщика шаблонов (НС) и компоновщика моделей (КМ), реализующих необходимые преобразования.

Настройщик шаблонов обеспечивает получение готовых для использования в составе модели PLUS-функций-имитаторов (Ф) по заданным пользователем описаниям распределений (Р). Компоновщик моделей генерирует готовые тексты имитационных GPSS-моделей (ИМ) из PLUS-функций и исходной спецификации модели

(ИС). Последняя может быть получена вручную либо автоматически использованием процедуры генератор моделей (ГМ) [3] по заданным параметрам сети (ПС).

Таким образом, рассматриваемая задача сведена к специализации стандартных инструментов моделирования – к построению средств, применяемых автономно либо в со-

ставе других систем, для автоматического построения GPSS-моделей. Результативность решений подтверждена макетированием применительно к системам, описываемым в терминах стохастических сетей, сетей массового обслуживания.

Список цитированных источников

1. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: Корона, 2004. – 320 с.
2. Труб, И.И. Объектно-ориентированное моделирование на C++. – СПб.: Питер, 2006. – 411 с.
3. Климович, А.Н. Подходы, классы, алгоритмы генерации имитационных моделей произвольных сетей массового обслуживания / А.Н. Климович, С.В. Максимук // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов, Брест, БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 56-58.

УДК 004.514.62

СРЕДСТВА СЖАТИЯ ОКОН ДЛЯ ЭКОНОМИИ ПЛОЩАДИ ДИСПЛЕЯ УСТРОЙСТВ, РАБОТАЮЩИХ ПОД УПРАВЛЕНИЕМ ГРАФИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ GNOME

Никонюк А.Н.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Костюк Д.А., доцент*

Ограниченные аппаратные ресурсы персонального компьютера не позволяют задействовать большие площади для вывода информации. Для преодоления этого ограничения в оконных интерфейсах используется ряд специальных вспомогательных элементов навигации, позволяющих увидеть одновременно, хотя бы схематично, изображение всего рабочего пространства [1].

В последнее время проблема недостатка рабочей области получила дополнительное развитие из-за роста популярности портативных устройств – нетбуков и планшетных компьютеров, способных в той или иной степени запускать приложения, интерфейс и модель взаимодействия с пользователем, которые изначально рассчитаны на стандартное разрешение и размер экрана. Подобные устройства не только не способны разместить на экране нужное количество окон, но часто не могут показать целиком одно стандартное окно.

В настоящее время из-за возросшей популярности планшетных компьютеров разработчики графических оболочек предпринимают усилия по поиску универсальных решений, пригодных как для настольных, так и для планшетных компьютеров. В случае успеха, такое программное обеспечение должно обладать, помимо универсальности, дополнительным преимуществом: интерфейсы приложений, упростившиеся в ходе адаптации к сенсорному управлению и малой площади экрана, легче в освоении и в работе, т.к. не перегружают пользователя большим числом деталей.

В версиях графических оболочек, выпущенных в 2011 году, наблюдаются изменения, направленные на отход от классической для настольных компьютеров метафоры рабочего стола: внедряются альтернативные интерфейсы запуска приложений, происходит отказ от пиктограмм на рабочем столе, пользователей стимулируют работать с полноэкранными приложениями. В рамках этой тенденции находится окружение рабочего стола GNOME 3, сменившее классическую парадигму на новую аппаратно-ускоренную оболочку Gnome Shell. Последняя в стандартном режиме не отображает никакого

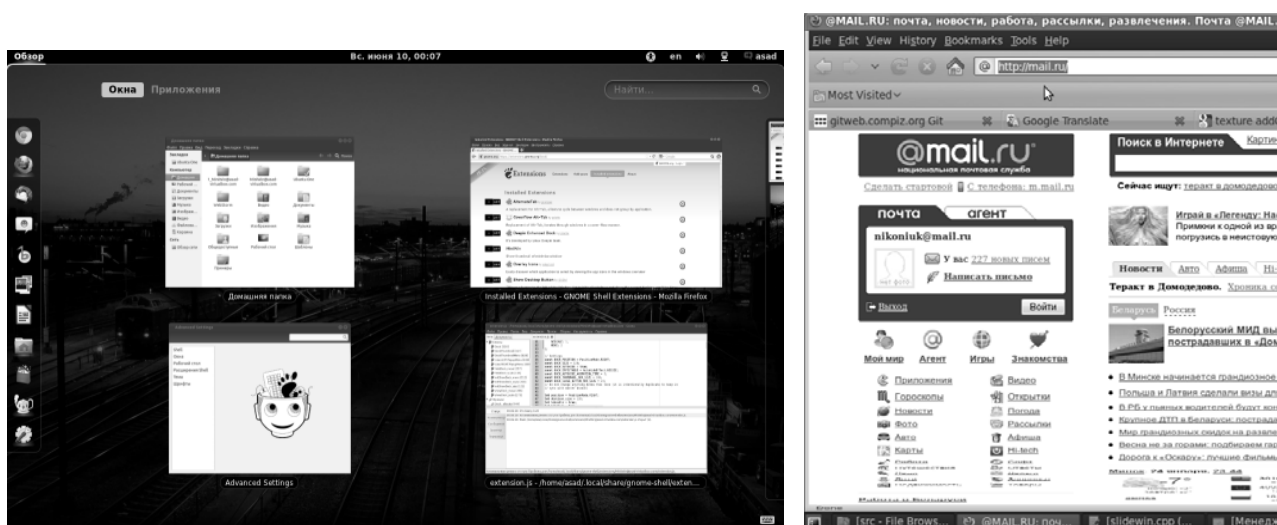
эквивалента панели задач, предлагая пользователю для манипулирования окнами переключаться в полноэкранный режим обзора (рисунок 1) помещением указателя мыши в левый верхний угол экрана либо активацией расположенной там же кнопки «Обзор». Режим обзора содержит дополнительные элементы управления и в т. ч. уменьшенные копии окон для выбора нужного.

Однако, помимо рекомендованного полноэкранного режима работы и небольшой экономии площади из-за отказа от панели задач, Gnome Shell не предусматривает мер для адаптации к малой диагонали экрана планшетных устройств. Наоборот, увеличение элементов (кнопок, заголовков окон и др.) для их удобной сенсорной активации частично аннулирует принятые меры.

Нами разработан модуль расширения для графической оболочки GNOME на основе модели криволинейной трансформации окон [2, 3], позволяющий сократить размер занимаемой площади окна произвольного приложения с сохранением читаемости и доступности его содержимого, что в свою очередь дает возможность одновременно работать с большим числом окон на одном экране.

Недавно проект GNOME анонсировал новый ресурс extensions.gnome.org, на котором располагается каталог дополнений к оболочке. Модули размещаются на данном ресурсе после процедуры верификации кода, успешно пройденной нашей разработкой [2]. Установка дополнений производится непосредственно с сайта в один клик. Дополнения разрабатываются на языке JavaScript с использованием CSS-стилей. Разработка пользовательского интерфейса в расширениях Gnome Shell выполняется при помощи внутреннего инструментария Shell Toolkit, который опирается на библиотеку Clutter. Clutter свободная графическая библиотека для создания аппаратно-ускоренных пользовательских интерфейсов, для отрисовки используется OpenGL.

Разработанный модуль расширения Gnome Shell состоит из трех функциональных частей: кода инициализации, обработчиков событий и сервисных функций. Код инициализации вызывается при загрузке модуля. Основное назначение данного кода – установка собственного обработчика события `notify::focus-app` для отслеживания переключения фокуса окон, чтобы при необходимости активизировать сжатие для активного окна.



а)

б)

Рисунок 1 – Модуль расширения Gnome Shell: режим обзора (а) и работа модуля (б)

Разработанный нами модуль расширения активизируется при перетаскивании окна за пределы границы экрана или за пределы рабочей области, если вдоль данной границы экрана расположена панель графической оболочки (отслеживаются сигналы `grab-or-begin` и `grab-or-end`, отвечающие за начало и конец перемещения окна). Сжатие соответствующей части окна отображается в реальном масштабе времени в процессе дальнейшего перемещения окна, и т.о. пользователь имеет возможность регулировать коэффициент сжатия для достижения баланса между размерами и читаемостью содержимого окна. Сжатие фрагментов окон выполняется за счет смещения вершин (опорных точек) базовой фигуры, на которую наложена текстура окна.

Изменение масштаба окна затрагивает только его изображение. Для самого окна при этом не происходит никаких изменений в размерах, иначе была бы нарушена обратная совместимость с существующими приложениями. Поэтому с точки зрения системы все элементы управления окна сохраняют свои прежние координаты, и для взаимодействия с этими элементами необходимо помещать указатель мыши в ту область экрана, где они находились бы, сохраняя окно единичный масштаб. Т.о., можно предположить два простых варианта решения проблемы: блокирование событий указателя мыши, относящихся к сжатой области, либо пересчет координат. На текущий момент пересчет координат является трудно реализуемым из-за технических особенностей X Windows System. Кроме того, это является задачей более низкого уровня абстракции по сравнению с тем, на котором действует оболочка Gnome Shell и ее расширения. На текущий момент нами реализован компромиссный вариант обработки событий мыши. Расширение проверяет координаты указателя мыши по таймеру, для чего добавлен собственный обработчик в основной цикл событий Mainloop. Как только обнаруживается вхождение указателя в сжатую область активного окна, выполняется корректирующее смещение опорных вершин. В результате сжатой оказывается другая область окна, расположенная вдоль его противоположной стороны, а область под указателем приобретает единичный масштаб.

При этом не требуется какая-либо особая обработка событий клавиатуры, что позволяет взаимодействовать со сжатой частью окна (например, в случае консольного приложения или текстового редактора) без ее перемещения.

В результате, разработанная модель трансформации окон и ее техническая реализация для UNIX-подобных операционных систем с графической оболочкой GNOME позволяют добиться более экономного использования площади экрана портативных устройств без модификации существующего программного обеспечения. За счет использования аппаратно-ускоренной графики удастся выполнять пересчет изображений окон в реальном масштабе времени без увеличения нагрузки на центральный процессор.

Список цитированных источников

1. Раскин, Дж. Интерфейс: новые направления в проектировании компьютерных систем. – СПб.: Символ-Плюс, 2003. – 272 с.
2. Nikoniuk, A. Zip Windows [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://extensions.gnome.org/extension/738/zip-windows>
3. Никонюк, А.Н. Нелинейное масштабирование окон для экономии площади дисплея портативных устройств // Сучасні проблеми радіотехніки та телекомунікацій «РТ – 2011»: Матер. 7-ої Міжнар. молодіжн. наук.-техн. конф., Севастополь 11–15 квітня 2011 р. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – С. 362.

УДК 624.131.5

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ СВАИ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Прокопенко Д.В.

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, г. Гомель
Научный руководитель: Быховец В.Е., д.т.н., профессор

Постановка задачи

Рассматривается свая сложной конфигурации в нелинейно-деформируемом грунтовым основании. На сваю действует нормальная равномерно распределенная внешняя нагрузка. Необходимо исследовать особенности деформирования грунтового основания сваи сложной конфигурации.

Для исследования нелинейной физической системы «свая сложной конфигурации – грунтовое основание» используются методы математического и компьютерного объектно-ориентированного моделирования на основе метода конечных элементов и метода энергетической линеаризации [1, 2]. Для исследования несущей способности был использован программный комплекс «Энергия-ОС».

Математическая модель системы

Ядро математической модели будем строить на основе принципа минимума полной энергии системы. Для краевых задач нелинейной механики грунтов математическая модель исследуемой физической системы будет иметь вид [1,2]:

1. Геометрическая модель деформируемой среды.
2. Механико-математическая модель элементов системы:
 - при линейно – упругом деформировании: $\sigma_i = E\varepsilon_i$,
 - при нелинейно – упругом деформировании: $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, в частности

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, A > 0, 0 < m < 1,$$

где σ_i, ε_i – интенсивности напряжений и деформаций, E – модуль деформации,

A, m – параметры закона нелинейного деформирования.

3. Система краевых условий задаётся в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики.

4. Условия равновесия системы (ядро математической модели):

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \{U\}} = 0, \quad \text{где} \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\}$$

$\Pi, \{P\}$ – полная энергия деформируемой системы и вектор внешних сил,

$\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{U\}$ – векторы напряжений, деформаций и перемещений,

V – объём области существования исследуемой системы.

5. Математическая модель (форма) искомого решения: $\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$.

Компьютерное моделирование деформирования грунтового основания сваи сложной конфигурации

Рассматривается железобетонная свая, имеющая несколько прямоугольных уширений сечением 35 см, погруженная на 410-сантиметровое грунтовое основание, на сваю действует нормальная равномерно распределенная нагрузка $q = 20000$ кг. Приведённые начальные характеристики грунтового основания: $E = 55$ МПа, $\varphi = 35^\circ$, $\mu = 0,2$. Размеры

расчётной области определены на основании экспериментальных исследований: 1,05×7,6 м.

Задача решалась в линейной и в нелинейной постановках.

Результаты вычислений приведены в таблице 1.

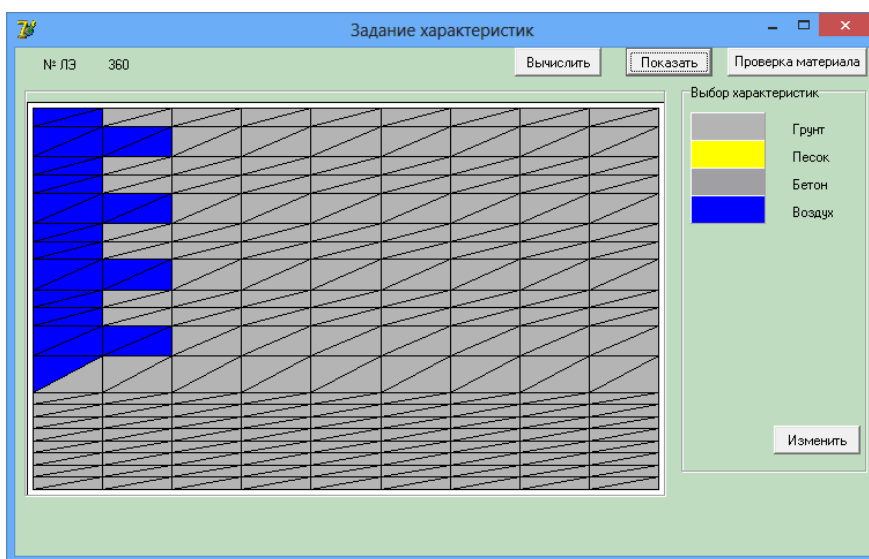


Рисунок 1 – Технология построения виртуальной физической модели системы «свая сложной конфигурации – грунтовое основание»

Таблица 1 – Вертикальные перемещения в узлах дискретизованной модели грунтового основания сваи без уширения

H(см) \ r(см)	Линейное решение			Нелинейное решение		
	10	20	35	10	20	35
0	0,13	0,10	0,07	0,33	0,23	0,16
50	0,13	0,09	0,07	0,32	0,22	0,16
120	0,12	0,09	0,06	0,30	0,21	0,15
190	0,11	0,08	0,06	0,29	0,2	0,15
260	0,12	0,09	0,06	0,30	0,2	0,14
340	0,11	0,08	0,06	0,28	0,18	0,12
410	0,07	0,05	0,04	0,14	0,10	0,07
480	0,03	0,02	0,02	0,05	0,04	0,03

H – расстояние от выбранных горизонтальных линий дискретизованной расчётной области виртуальной физической модели исследуемой системы, r – расстояние от поверхности сваи на расстояниях.

Из таблицы видно, что вертикальные перемещения на каждой вертикали равны до уровня нижнего уширения сваи. Такой эффект называется телескопическим сдвигом. Это известный факт для сваи с одним уширением. Мы показали, что этот эффект применим и для сваи с несколькими уширениями. Учет этого фактора позволяет решить задачу об осадке сваи рассматриваемой конфигурации аналитическим методом [1].

Список цитированных источников

1. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
2. Быховцев, В.Е. Методология исследования деформаций нелинейных систем твёрдых тел методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования / В.Е. Быховцев, В. В. Бондарева, Д.В. Прокопенко // Материалы юбилейной Респ. науч. – техн. конф. ГГУ. – Гомель, 2009.

УДК 336.762

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЧЕСКОЙ ТОРГОВОЙ СИСТЕМЫ «FOREX-MACD++»

Родченко Т.В.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Марковская Н.В., к.ф.-м.н., доцент

Форекс (Forex, от англ. FOReign Exchange – «зарубежный обмен») – рынок межбанковского обмена валюты по свободным ценам. Поэтому обычно используется сочетание «рынок Форекс» (Forex market). Термин «Форекс» принято использовать для обозначения взаимного обмена валюты, а не всей совокупности валютных операций. В англоязычной среде словом Forex обычно называют валютный рынок, а также торговлю валютой. В русском языке термин «Форекс» обычно используется в более узком смысле – имеется в виду исключительно спекулятивная торговля валютой через коммерческие банки или дилинговые центры, которая ведётся с использованием кредитного плеча, то есть маржинальная торговля валютой.

При торговле на «рынке Форекс» огромную роль играет оперативность принятия решения заключения сделки купли/продажи по какой-либо из валютных пар. Чтобы с большей долей вероятности спрогнозировать дальнейшее движение курса валют, необходимо провести сложный анализ всевозможных факторов, оказывающих влияние на цену. Поэтому становится актуальной идея создания автоматической системы, которая будет анализировать данные и самостоятельно принимать решение, то есть торговать.

Целью данной работы является моделирование и разработка автоматической торговой системы.

Основные задачи заключаются в исследовании уже имеющихся систем подобного рода и их улучшении.

Для прогнозирования движения цен на «рынке Форекс» используются методы фундаментального, технического и вероятностного анализа.

Фундаментальный анализ в отличие от технического и вероятностного подходов изучает макроэкономические факторы, которые могут в той или иной степени влиять на динамику курса национальной валюты [1, с. 33].

Фундаментальный анализ включает в себя прогнозирование движения рынка на основе анализа экономических данных, политических событий, новостей, слухов и ожиданий. Характерная черта фундаментального анализа заключается в том, что он изучает причины, которые привели к изменению курса национальной валюты, поэтому главный постулат фундаментального анализа: сначала причина, а потом следствие.

Технический анализ – метод предсказания изменения цены и будущих трендов рынка путем изучения графиков исторических изменений на рынке, учитывающих цены бумаг, объем сделок и, если возможно, объем открытых позиций [2, с. 12].

Технический анализ в целом можно определить как метод, основанный на математических, а не на экономических выкладках.

Современный технический анализ использует два основных метода исследований:

- графический анализ (непосредственно технический подход);
- математический анализ (вероятностный подход).

Вероятностный анализ использует в себе набор методов теории вероятности и математической статистики для прогнозирования движения валютных индексов либо других рыночных сдвигов.

Особое внимание хочется уделить техническим индикаторам, так как они базируются на методах теории вероятности и математической статистики. Технические индикаторы – это математические функции, построенные на значениях цены, объемов и т.п., анализ которых может дать ответ на вопрос: сохранится текущая тенденция или нет?

Индикаторы можно разделить на две большие группы:

- индикаторы тенденций (подтверждают тенденции);
- осцилляторы (подсказывают развороты трендов).

Основными индикаторами рынка по праву считаются «скользящие средние» (аналог математического ожидания).

Технический индикатор «скользящее среднее» (Moving Average, MA) показывает среднее значение цены инструмента за некоторый период времени. При расчете MA производится математическое усреднение цены инструмента за данный период. Существует четыре основных вида скользящих средних: Simple, Exponential, Smoothed и Linear Weighted, но чаще всего используется Simple Moving Average (SMA) и Exponential Moving Average (EMA).

Simple Moving Average – простая скользящая средняя. Представляет собой среднее арифметическое цен закрытия (открытия и т.д.) за определенный период времени [3, с. 6].

$$SMA_n = (P_1 + P_2 + \dots + P_n) / n \quad (1)$$

Exponential Moving Average – экспоненциальная скользящая средняя. Строится по рекуррентной формуле:

$$EMA_n = \frac{2}{3} P_k + \frac{1}{3} EMA_{k-1}, \quad (2)$$

где n – временной период расчета скользящей средней,

P – цена закрытия (открытия и т.д.).

Для того чтобы определить тип тренда, необходимо взять хотя бы две MA одного вида с разными периодами. Например, если EMA с меньшим периодом находится ниже EMA с большим периодом, то тренд нисходящий (медвежий), в обратном случае тип тренда восходящий (бычий).

Индикатор MACD – это следующий за тенденцией динамический индикатор. Он показывает соотношение между двумя скользящими средними цены [3, с. 46].

MACD строится как разность между двумя экспоненциальными скользящими средними (EMA) с периодами в 12 и 26. Чтобы четко обозначить благоприятные моменты для покупки или продажи, на график MACD наносится так называемая сигнальная линия – 9-периодное скользящее среднее индикатора. MACD наиболее эффективен в условиях, когда рынок колеблется с большой амплитудой в торговом коридоре. Наиболее используемые сигналы MACD – пересечения, состояния перекупленности, перепроданности и дивергенция (расхождения).

$$\begin{aligned} MACD &= EMA_s(P) - EMA_l(P), \\ Signal &= SMA_a(EMA_s(P) - EMA_l(P)), \end{aligned} \quad (3)$$

где $EMA_l(P)$ – экспоненциальная скользящая средняя с длинным периодом от цены,

$EMA_s(P)$ – экспоненциальная скользящая средняя с коротким периодом от цены,

$SMA_a(P)$ – сглаживающая скользящая средняя с коротким периодом от разницы двух остальных скользящих,

P – цена закрытия (открытия и т.д.).

Технический индикатор RSI – это следующий за ценой осциллятор, который колеблется в диапазоне от 0 до 100. Один из распространенных методов анализа индикатора

тора RSI состоит в поиске расхождений, при которых цена образует новый максимум, а RSI не удается преодолеть уровень своего предыдущего максимума. Подобное расхождение свидетельствует о вероятности разворота цен. Если затем индикатор поворачивает вниз и опускается ниже своей впадины, то он завершает так называемый «неудавшийся размах», который служит подтверждением скорого разворота цен.

$$RSI = 100 - 100 / (1 + U/D), \quad (4)$$

где U – среднее значение положительных ценовых изменений,

D – среднее значение отрицательных ценовых изменений.

Для того, чтобы построить уровни Фибоначчи (Fibonacci Retracement), необходимо найти экстремумы ценовой функции и провести между ними линию тренда. Девять горизонтальных линий, пересекающих линию тренда на уровнях 0%, 23.6%, 38.2%, 50%, 61.8%, 100%, 161.8%, 261.8% и 423.6% называются линиями Фибоначчи. Считается, что после сильного спада или подъема цены часто возвращаются назад и, как правило, встречают поддержку/сопротивление на уровнях линий Фибоначчи или вблизи них.

Выше перечислены одни из немногих технических индикаторов, которые при определенных значениях дают сигналы на вход и выход с рынка. Взяв за основу индикатор MACD, который является очень популярным при прогнозировании тенденции цены на рынке Форекс, и дополнив его показатели значениями таких индикаторов, как RSI и Fibonacci Retracement, можно попытаться более точно определить моменты входа на рынок и выхода из него. Это в свою очередь ведет к увеличению прибыли с каждой сделки, а это есть главная цель торговли на рынке – максимизация прибыли и минимизация убытков.

Список цитированных источников

1. Куликов, А.А. Форекс для начинающих [Текст]: книга / А.А. Куликов. – СПб.: Питер, 2003. – 368 с.
2. Технический анализ для начинающих (серия «Reuters для финансистов») [Текст]: пер. с англ. – М.: Альпина Паблишер, 2001. – 184 с.
3. Лиховидов, В.Н. Основные индикаторы и конфигурации на рынке Forex [Текст]: книга / В.Н. Лиховидов, В.И. Сафин. – М.: FxClub, 2001. – 144 с.

УДК 681.3

К ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭФФЕКТИВНОСТИ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Рыщук А.С.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

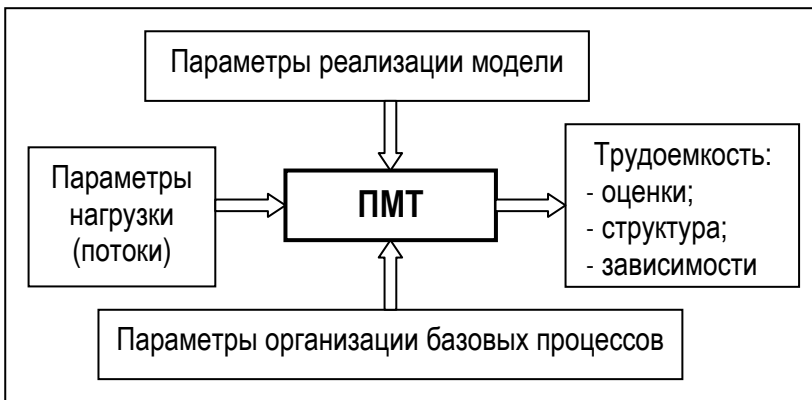
Научный руководитель: Муравьев Г.Л., к.т.н., доцент

Целью работы является оценка характеристик эффективности имитационного моделирования на базе стохастических сетевых моделей (ССМ), построение моделей трудоемкости, анализ возможностей повышения эффективности моделирования в многозадачных средах. При исследовании использованы: методы имитационного моделирования дискретных систем; экспериментальные методы и средства мониторинга базовых процессов имитационных моделей (ИМ); UML-диаграммы для описания базовых процессов ИМ; методы теории массового обслуживания, сетевой подход к оценке алгоритмов для построения моделей трудоемкости.

Полезности и применимости ИМ существенно зависят от их трудоемкости. Для ССМ трудоемкость модели [1] как сложность вычислений оценивается количеством вычисли-

тельной работы (времени, операций, команд и т.д.), требуемой для ее реализации с целью получения набора характеристик заданной полноты и точности. При ее определении учитываются особенности организации модели, реализации алгоритма имитации и вероятностная вычислительная нагрузка, создаваемая при моделировании стохастической сетью конкретной архитектуры. Стохастическая сеть функционирует случайным образом и соответственно задается параметрами, специфицирующими вероятностные процессы (входные, выходные, процессы изменения состояний), которые существенно влияют на трудоемкость имитационного моделирования.

Для оценки трудоемкости рассмотрен модифицированный подход на базе марковских цепей [2]. Здесь сеть отображается “усреднённым” графом алгоритма, где в качестве вершин – функциональных операторов – рассматриваются базовые активности имитационной модели с известными трудоемкостями их исполнения, а дуги – переходы управления, соответствующие случайным событиям. Трудоемкости активностей в свою очередь могут быть рассчитаны через марковские модели или оценены экспериментально, имитационно, а вероятности переходов могут быть рассчитаны из спецификации моделируемой сети заданной конфигурации.



Это позволяет построить параметрическую модель трудоемкости (ПМТ) имитационного моделирования стохастических сетей на базе метрик отдельных составляющих сеть компонентов. При этом не требуется построение самой имитационной модели сети и ее мониторинг.

Спецификация параметрической модели представлена на рисунке, где параметры Q потоков заявок – вычислительной нагрузки – задаются матрицами переходов $\{P^{(q)} = [p^{(q)}_{ij}] | q = \overline{1, Q}\}$, где $p^{(q)}_{ij} \in [0, 1]$, и параметрами законов поступления заявок в сеть $\{\bar{f}_\tau^{(q)} | q = \overline{1, Q}\}$. Параметры реализации ИМ задаются наборами базовых активностей, составом событий и параметрами трудоемкости активностей. Параметры организации базовых процессов определяют наличие и характер распараллеливания процессов при реализации модели. Расчетные формулы, положенные в основу модели, приведены в [3]. Оценки трудоемкости могут быть использованы для выявления структуры факторов, формирующих трудоемкость модели, определения наиболее затратных фрагментов алгоритма имитации, неэффективно организованных функций модели, а также для выявления компонентов модели для распараллеливания.

Таким образом, рассмотрены задачи, связанные с оценкой трудоемкости имитации на примере стохастических сетевых моделей и ее снижением за счет применения инструментов распараллеливания. Приведены результаты мониторинга трудоемкости ИМ и их составляющих. Рассмотрена оценка характеристик моделей на базе известных методов оценки трудоемкости алгоритмов, параметрическая модель трудоемкости стохастических сетей.

Список цитированных источников

1. Рыщук, А.С. Трудоемкость имитационного моделирования стохастических сетей // Сб. конкурсных науч. работ студентов и магистрантов. – Брест: БрГТУ, 2012. – Ч. 1, – С. 92-94.

2. Майоров, С.А. Основы теории вычислительных систем / С.А. Майоров, Г.И. Новиков, Т.И. Алиев. – М.: Высшая школа, 1978. – 320 с.

3. Рыщук, А.С. К оценке трудоемкости имитационных моделей / А.С. Рыщук // Современные информационные технологии в образовании и научных исследованиях (СИТОНИ-2012): материалы 3-й Международной НТК студентов и молодых ученых. – Донецк: ДонНТУ, 2012. – С. 340-344.

УДК 621.391: 621.396.91/.96

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАЩИТЫ РЛС ОТ ПАССИВНЫХ ПОМЕХ

Стрибук А.М., Лапич С.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научные руководители: Поляков В.И., к.т.н., доцент; Дереченник С.С., к.т.н., доцент

Введение

В настоящее время для защиты радиолокационных станций (РЛС) от пассивных помех (ПП) – отражений зондирующего сигнала от мешающих отражателей (земной и морской поверхности, гидрометеоров и др.) – используются либо устройства череспериодного вычитания (ЧПВ), либо низкочастотные режекторные фильтры (НЧ РФ) [1, 2].

Недостатком первого способа является низкое качество подавления ПП. Второй способ позволяет повысить коэффициент подавления ПП, однако при этом НЧ РФ одновременно с помехой «вырезает» сигналы от целей, летящих с малыми радиальными скоростями [1, 3].

В работе описывается новый способ подавления ПП, в котором не используются ни устройства ЧПВ, ни режекторные фильтры.

Анализ алгоритма обработки сигнала на фоне пассивных помех

Анализ предлагаемого способа защиты РЛС от ПП проведем в частотной области. Для этого рассмотрим возможные виды частотных спектров полезных сигналов и пассивных помех при использовании импульсных зондирующих сигналов.

В этом случае в обзорных РЛС отраженные (переизлученные) когерентные сигналы представляют собой пачки радиоимпульсов. Вид частотных спектров таких когерентных пачек зависит от огибающих одиночных импульсов пачки и огибающей всей пачки. На практике ни огибающая одиночного импульса, ни огибающая всей пачки не поддаются точному аналитическому описанию, поэтому для оценочных расчетов остановимся на аппроксимациях огибающих [3, 4].

Допустим, что огибающая импульса имеет прямоугольную, треугольную или колокольчатую форму, а огибающая пачки – соответствует форме диаграммы направленности (ДН) антенны РЛС, принимая форму функций $\sin x / x$, $\sin^2 x / x^2$, или колокольчатую форму. В наиболее простом варианте положим, что одиночный импульс имеет прямоугольную огибающую, а форма ДН соответствует функции $\sin x / x$. Тогда в соответствии с преобразованием Фурье спектральная мощность напряжения полезного сигнала:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt, \quad (1)$$

а энергетический спектр (ЭС) помехи:

$$N(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau. \quad (2)$$

Форма ЭС пассивной помехи зависит от вида ее корреляционной функции (КФ):

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t-\tau) dt. \quad (3)$$

Поскольку $u(t)$ – напряжение, соответствующее пачке радиоимпульсов, отраженных от мешающих объектов, то вид КФ представляет собой пачку тех же импульсов.

Для анализа возможностей защиты РЛС от ПП приведем спектры полезного сигнала и пассивных помех при наличии различий в радиальных скоростях движения (рис. 1). Пусть РЛС излучает когерентную пачку из M прямоугольных импульсов длительностью τ_u каждый с периодом следования T . Если радиальная скорость цели не равна нулю, то максимум спектра полезного сигнала будет соответствовать частоте $f_0 + F_d$ (верхняя диаграмма на рисунке), где F_d – доплеровская частота, определяемая из радиальной скорости цели $v_{ц}$, скорости света c и несущей частоты f_0 : $F_d = 2f_0 v_{ц}/c$. Если отражатели, формирующую помеху, неподвижны, максимум спектра помехи будет соответствовать несущей частоте f_0 (нижняя диаграмма на рисунке). Кроме того, при целочисленном значении скважности T/τ_u один из гребней спектра сигнала (как и помехи) попадает в провал огибающей своего спектра.

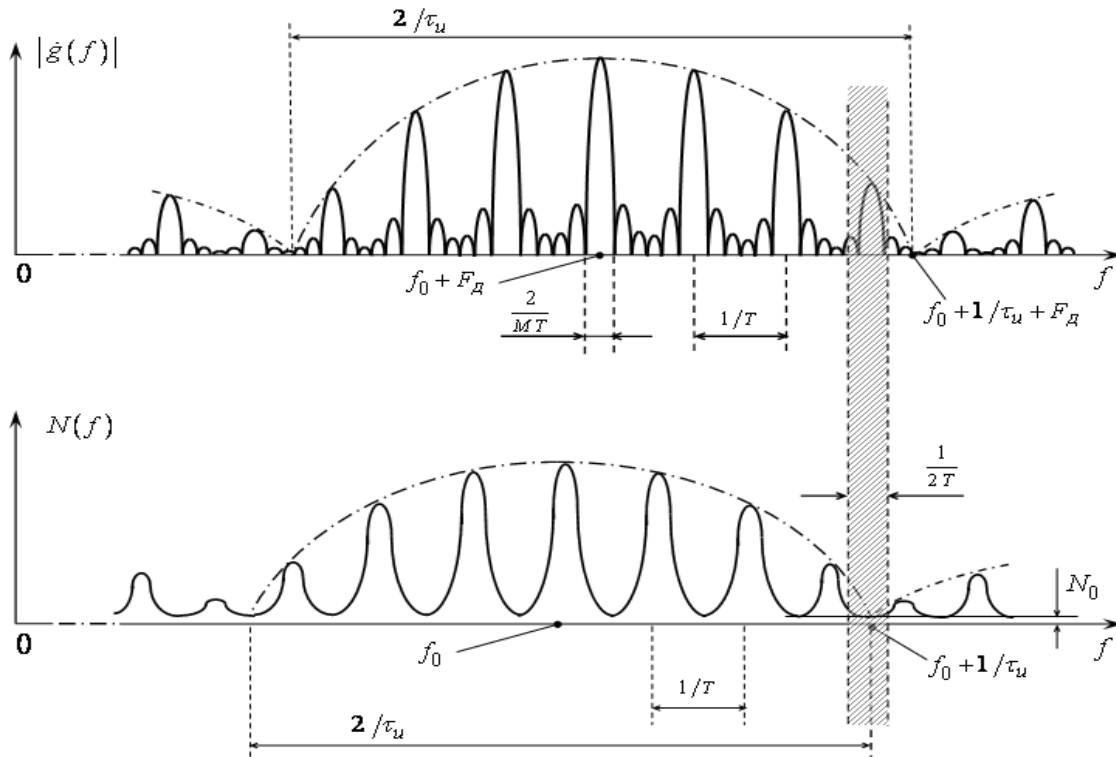


Рисунок 1 – Соотношение спектров полезного сигнала и помехи при различиях в скоростях движения цели и мешающих отражателей

При наличии скоростных различий между целью и мешающим объектом провалы огибающих спектров сигнала и помехи смещаются друг относительно друга. Как видно из рисунка, наибольшее отношение сигнал/помеха наблюдается в полосе вблизи частоты $f_0 \pm 1/\tau_u$, где ЭС помехи уменьшается до нуля (точнее, до уровня N_0 внутренних шумов приемника). Полезный сигнал при этом также уменьшается, но не до нуля. В случае отсутствия различий в радиальных скоростях цели и отражателей помехи наблюдаются (как и для других известных способов) «слепые» скорости.

Отношение сигнал/помеха будет зависеть от конкретной аппроксимации ДН антенны, огибающей радиоимпульса, а также КФ ПП, которая может изменяться от гауссовской до экспоненциальной. Кроме того, важным является выбор полосы пропускания

полосового фильтра с центральной частотой $f_0 \pm 1/\tau_u$. Ширина полосы не превышает $1/T$ и может варьироваться с шагом $1/MT$ (соответствующим ширине гребня).

Вывод

Предложен альтернативный способ защиты радиолокационных устройств от пассивных помех, основанный на выявлении различий в радиальных скоростях цели и мешающего объекта и заключающийся в узкополосной фильтрации смеси сигнала и помехи в области высоких частот. Для оптимизации ширины полосы пропускания фильтра необходимо математическое моделирование энергетических спектров для различных огибающих одиночных импульсов, различных ДН антенн (огибающих пачки импульсов), а также параметров формирования сигнала помехи (пассивных отражателей).

Список цитированных источников

1. Радиозлектронные системы. Основы построения и теория: справочник / Под ред. Я.Д.Ширмана – М.: Радиотехника, 2007.
2. Ширман, Я.Д. Теоретические основы радиолокации. – Харьков: ВИРТА, 1984.
3. Дереченник, С.С. Радиозлектронная системотехника / С.С.Дереченник, В.И.Поляков. – Брест: БрГТУ, 2011.
4. Чердынцев, В.А. Радиотехнические системы. – Мн.: Выш. школа, 1988.

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА В ПАКЕТЕ ANSYS

Суша О.Н.

*Белорусский государственный технологический университет, г. Минск
Научный руководитель: Карпович Д.С, доцент*

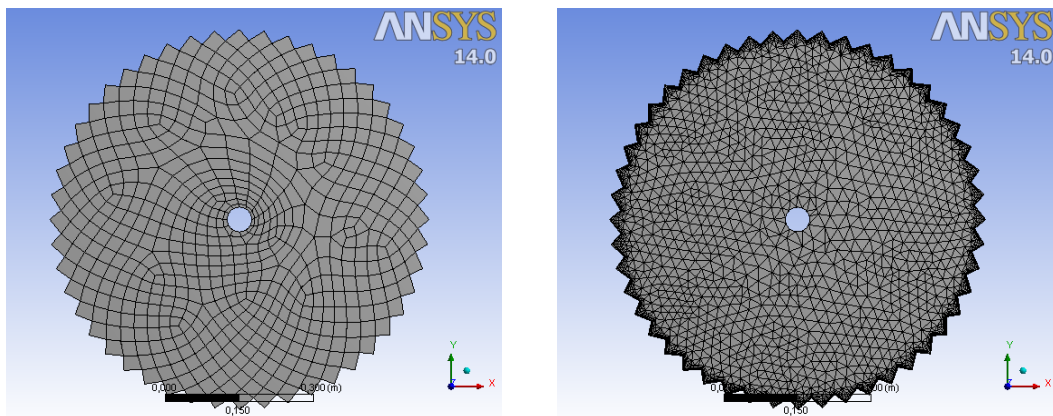
При конструировании нового режущего элемента в настоящее время возможно использование современных компьютерных пакетов, предназначенных для моделирования поведения дереворежущего инструмента. Одним из таких пакетов является ANSYS.

В данной программе был промоделирован процесс резания круглой пилой и представлено сравнение полученных результатов в зависимости от генерации конечно – элементарной сетки. Создание сетки является неотъемлемой частью процесса компьютерного инженерного моделирования (CAE). Качество сеточной модели влияет на точность, сходимость и скорость получения решения. Поэтому качественные и более автоматизированные инструменты построения сетки дают лучший результат. Технологии ANSYS предлагают совокупность методов построения сетки, различных по сложности алгоритмов и трудоемкости построения. Обладая такой возможностью, можно расположить сетку нужного типа в требуемой зоне модели и убедиться в том, что расчет модели будет выполнен точно.

Инструменты для создания сеток от компании ANSYS позволяют генерировать сеточные модели, для разных типов анализа. Каждый из сеточных методов удовлетворяет специфическим требованиям той или иной области. Данная процедура выполняется в модуле симуляции Mechanical. Сетка генерируется на геометрической модели и является основной для составления и решения системы уравнений в матричном виде.

Существует два способа генерации сетки:

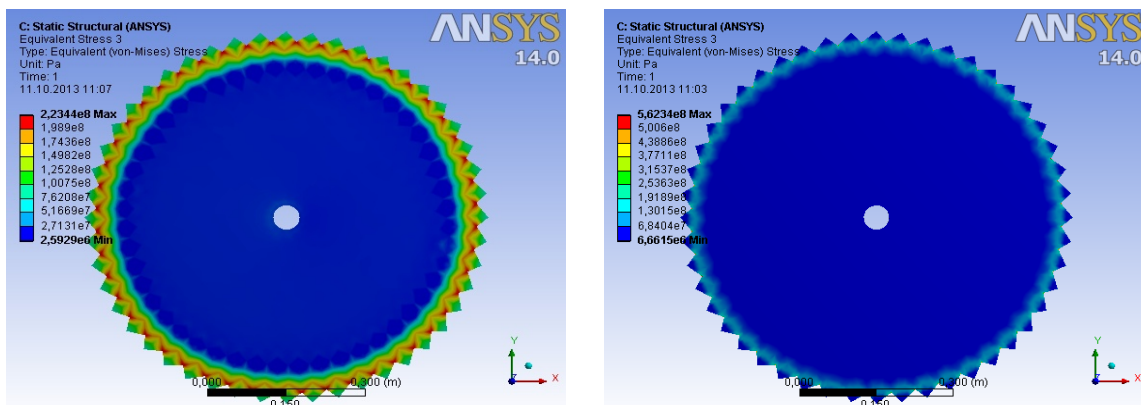
1. Автоматическая генерация сетки с установками по умолчанию при запуске на решение. При этом имеется возможность предварительно просмотреть сетку до запуска на расчет, чтобы оценить ее соответствие поставленной задаче (рисунок 1а).



а) автоматическая генерация сетки; б) генерация сетки с задаваемыми пользователем установками
Рисунок 1 – Генерации сетки

2. Генерация сетки с задаваемыми пользователем установками. В этом случае мы сами самостоятельно определяем особенности создаваемой сетки значения необходимых параметров (рисунок 1б).

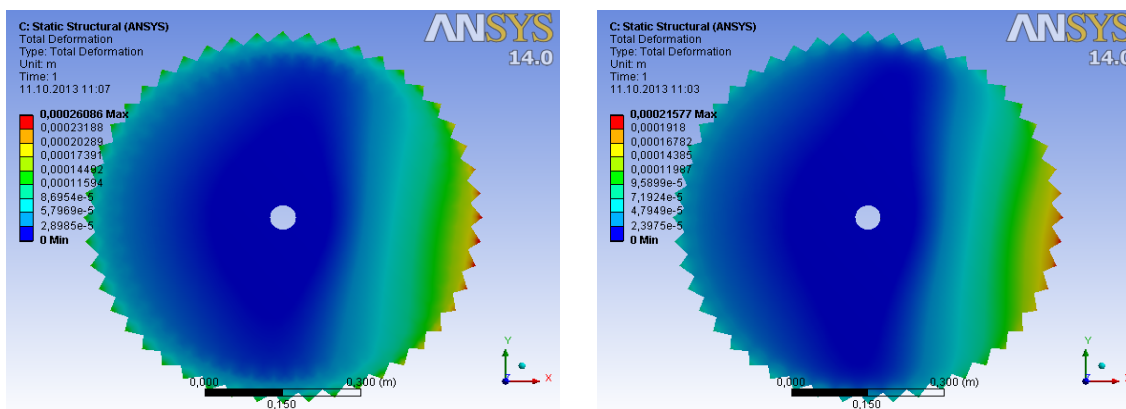
При продольной распиловке древесины в пропиле одновременно действуют на один зуб пилы касательные, нормальные и боковые силы. С помощью программы ANSYS возможно получение реакции данной модели на приложенные к ней силы и влияние изменения температуры зубчатого венца при процессе пиления. На рисунке 2 представлено численное решение распределения напряжений круглой пилы.



а) автоматическая генерация сетки; б) генерация сетки с задаваемыми пользователем установками
Рисунок 2 – Напряженное состояние круглой дисковой пилы

Напряженное состояние возникает в результате теплового расширения материала круглой пилы в зоне резания. По основному телу инструмента наблюдается при этом ярко выраженное лагунами напряженное состояние в точках соединения отдельных зубьев круглой пилы. Практическим подтверждением данного фактора является то, что облом круглой дисковой пилы происходит в точках соединения отдельных зубьев между собой. Так как взаимодействие в наибольшем случае оказывается на зубчатый венец, то при размещении узловых элементов сетки необходимо увеличить плотность узлов непосредственно в зоне режущего венца, то есть правильным решением будет выбрать генерацию сетки с заданными условиями.

В программе можно посмотреть деформацию, которая происходит при действии поперечной силы в зоне зуба при наличии их вращения и температуры. На рисунке 3 видно, что распределение деформации имеет сложную нелинейную характеристику, затрагивая даже противоположную полуплоскость круглой пилы.



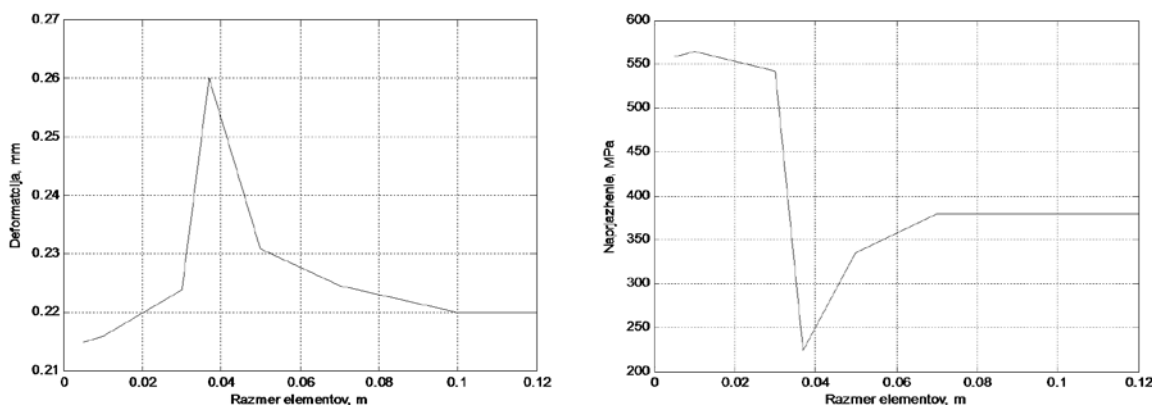
а) автоматическая генерация сетки;
 б) генерация сетки с задаваемыми пользователем установками

Рисунок 3 – Деформация круглой дисковой пилы

В пакете MATLAB были получены зависимости размера элемента КЭ – сетки от деформации круглой пилы и зависимость размера элемента КЭ – сетки от напряженного состояния в круглой пиле (рисунок 4).

При анализе графиков можно сделать следующий вывод: при автоматической генерации сетки (для данного случая размер элементов равен 0,037) значения имеют существенное отклонение по величинам деформации и напряжения, следовательно, автоматическая сетка имеет большую погрешность в численном решении данной задачи.

С увеличением размеров элементов КЭ – сетки в области зубчатого венца рассчитанное значение деформации и напряжения стремится к некоторому установившемуся значению. Таким образом, при величине элемента от 0,06 до 0,12 м точность будет приблизительно одинакова.



а) график зависимости размера элемента КЭ – сетки от деформации круглой дисковой пилы;
 б) график зависимости размера элемента КЭ – сетки от напряжения в круглой дисковой пиле

Рисунок 4

В случае уменьшения размеров (меньше 0,37 м) элементов КЭ – сетки динамика изменения существенно отличается от изменений в диапазоне увеличения размеров элементов. То есть можно предположить, что с уменьшением размеров элементов КЭ – сетки точность возрастает. Наилучшим с точки зрения точности является выбор минимального размера элементов, но при этом следует учитывать, что уменьшение размеров элементов значительно влияет на скорость получения данного решения.

Таким образом, оптимальным значением для решения рассматриваемой задачи является выбор режима генерации сетки с заданными параметрами при условии размера КЭ – сетки в 0,01 м.

УДК 581.3.06:624.131

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО И ПАКЕТНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО АРМИРОВАНИЯ МАЛОПРОЧНЫХ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ ПЛИТНЫХ ФУНДАМЕНТОВ

Торгонская С.В.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель
Научный руководитель: Быховцев В.Е., д.т.н, профессор

К одному из способов повышения несущей способности грунтовых оснований фундаментов зданий и сооружений относится армирование грунтов. Технологии армирования могут быть самые разнообразные. В данной работе проводится сравнительный анализ эффективностей вертикального и пакетного вертикального армирования грунта. Рассматривается большеразмерный плитный фундамент на однородном нелинейно-деформируемом грунтовом основании – это будет базовая задача. Исследуется осадка фундаментной плиты на грунтовом основании, армированном методом вертикального и пакетного вертикального армирования. Значения осадок фундамента будут различны, что и определит эффективность указанных способов армирования. Вертикальный армирующий пакет представляет собой подобласть грунтового основания фундамента, содержащую горизонтальные и вертикальные армирующие элементы, а также грунт. При этом грунт внутри вертикального армирующего пакета может быть уплотнен.

В формализованной постановке данная задача является третьей краевой задачей нелинейной математической физики (задача Дирихле-Неймана) [1]. Наиболее эффективным методом решения указанной задачи является метод компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов и метода энергетической линеаризации [2]. При решении поставленной задачи был использован программный комплекс «Энергия-3D» [2].

Математическая модель сложной нелинейной физической системы «фундамент – грунтовое основание» строится на основе принципа минимума полной энергии системы. Механико-математическая модель элементов указанной системы при нелинейно – упругом деформировании принята в виде степенной функции:

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^m, A > 0, 0 < m < 1, \quad (1)$$

где σ_i , ε_i – интенсивности напряжений и деформаций; E – модуль деформации; A , m – параметры закона нелинейного деформирования.

Исследовано 20 модельных задач в трехмерном пространстве. Размеры расчётной области определены на основании экспериментальных исследований. Приняты следующие физико-механические характеристики элементов рассматриваемой физической системы: плитный фундамент размерами 230×230×20 см с модулем упругости $E_{пл} = 20000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu_{пл} = 0,15$; однородный грунт с модулем деформации $E_{гр} = 36$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu_{гр} = 0,2$; малопрочное включение грунта с модулем деформации $E_{гр1} = 8$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu_{гр1} = 0,4$; горизонтальные пленки с модулем упругости $E_{пленок} = 3000$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu_{пленок} = 0,2$; вертикальные сваи с модулем упругости $E_{свай} = 216-900$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu_{свай} = 0,3$.

В результате компьютерного моделирования выявлено, что осадка плиты на однородном грунтовом основании составила 2,95 см и 5,08 см при линейном и нелинейном деформировании грунтового основания соответственно. Наличие малопрочного слоя в грунтовом основании мощностью $h = 200$ см с заданными физико – механическими характеристиками увеличивает осадку фундамента до 3,54 см при линейном деформировании и 6,40 см и нелинейном деформировании грунта. Следовательно, возникает необходимость повышения несущей способности малопрочного грунтового основания. Результаты исследования эффективности вертикального и пакетного вертикального армирования представлены в таблице 1. Толщина горизонтальной пленки в армирующем пакете принята равной 0,3 см. Глубина заложения пленки принята равной 46 см, что соответствует рекомендуемому значению для данной конкретной задачи. Степень уплотнения грунта внутри армирующего пакета принята равной $k_{упл} = 3$.

Таблица 1 – Осадка плитного фундамента на армированном грунтовом основании (см)

Армирование	Вертикальное		Пакетное вертикальное		Пакетное вертикальное уплотненное	
	Лин. решение	Нелин. решение	Лин. решение	Нелин. решение	Лин. решение	Нелин. решение
$E_{свая}$						
$S_{пл}$						
2160	3,37	5,90	3,36	5,85	3,03	5,37
5000	3,22	5,53	3,20	5,49	2,93	5,09
6000	3,17	5,44	3,15	5,39	2,89	5,01
8300	3,08	5,27	3,06	5,22	2,83	4,87
9000	3,06	5,22	3,04	5,17	2,81	4,83

Из таблицы 1 видно, что вертикальное армирование грунтового основания позволяет заменить слабый слой грунта слоем армированного грунта, эквивалентным по несущей способности основному грунтовому основанию. Значения осадок плиты на армированном вертикальными сваями и вертикальным пакетом грунте мало отличаются. Следовательно, использование горизонтального армирующего материала в пакете не приведет к значительному повышению несущей способности грунта. Однако уплотнив грунт внутри армирующего вертикального пакета, несущая способность грунтового основания значительно повышается. При этом представляется возможным использовать армирующие сваи из недорогого материала. Таким образом, наиболее эффективными методами повышения несущей способности слабых грунтов являются методы вертикального и пакетного вертикального армирования с уплотненным грунтом внутри пакета.

Список цитированных источников

1. Партон, В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
2. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТКАХ

УДК 004

ИНТЕРНЕТ-ПРОЕКТЫ ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ И ДИЗАЙНЕРОВ

Басин В.И.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Козинский А.А., к.п.н., доцент

Начиная с 2008 года, в Брестской области активно развивается олимпиадное движение по информатике с применением средств автоматизированного тестирования результатов. Для такого тестирования необходимо было создать систему, которая позволила бы проводить олимпиады по программированию с применением автоматизированных сред. Одним из примеров такой среды является сайт Brain Training, который доступен в Интернете пользователям сети.

При реализации данного проекта необходимо было предусмотреть возможность проведения соревнований по различным правилам (студенческие командные и школьные индивидуальные олимпиады), реализации механизма допуска к участию только определённой группы пользователей, создания инструментов обмена опытом и консультаций по решению сложных задач, а также возможность обучения основам алгоритмизации, технологиям программирования и построения архитектуры приложений.

Одна из важнейших потребностей – необходимость защиты учётных записей пользователей и соревнований по спортивному программированию от несанкционированного доступа. Возникает также проблема с нагрузкой на сервер приложения, который должен успешно обрабатывать огромное количество запросов от пользователей (как правило, количество участников онлайн-олимпиад превышает 200 человек). Для этого были проанализированы технологии разработки высоконагруженных веб-приложений, способы оптимизации их работы и основные алгоритмы защиты данных. Существующие на момент начала проектирования системы проведения олимпиад не отвечали поставленным требованиям и обладали низкой эффективностью.

Проект Brain Training представляет решение поставленных задач с применением веб-технологий удобной и эффективной реализации поставленных целей на основе использования технологии ASP.NET, MS SQL, сервера IIS и специально разработанных алгоритмов защиты.

Цель олимпиад по спортивному программированию: подготовка квалифицированных специалистов в сфере программирования, которые смогут с успехом решать алгоритмы оптимизации, управления и разработки сложных корпоративных и научных проектов. На основании описания предметной области реализованный проект может быть представлен следующими шагами, сформулированными в терминах информационных систем:

- 1) выполнить анализ системы проведения олимпиад;
- 2) на основе анализа реализовать инфологическую модель базы данных;
- 3) с использованием отобранных программных средств в процессе предыдущих разработок представить даталогическую модель базы; реализовать СУБД, обеспечивающую решение стандартных задач обработки информации, учитывая высокую нагруженность системы;
- 4) предоставить авторизованный доступ к системе в соответствии с правами пользователей;

- 5) реализовать работу как в локальной, так и в глобальной сети;
- 6) реализовать методы и средства защиты данных и систем управления ими от несанкционированного доступа;
- 7) внедрить реализованную информационную систему для проведения олимпиад и подготовки специалистов в сфере программирования;
- 8) реализовать механизм публикации статей в блогах;
- 9) реализовать базовый функционал форума.

Инфологическое моделирование выполнено средствами Microsoft Visual Studio. Указанный выбор программного обеспечения объясняется полной совместимостью с используемой базой данных MS SQL и условиями распространения. Такая совместимость позволила легко перейти от инфологической модели базы данных к даталогической.

Приведенное описание дает представление о полной модели данных проекта Brain Training.

Основными задачами проекта являлись: реализация механизма подачи и принятия заявок на участие в соревнованиях, проведения олимпиад с большим количеством участников, подведение подробной статистики для отчетов по соревнованиям, обеспечение защиты от несанкционированного доступа к пользовательским данным при публикации статей в блогах и вопросах в форуме при помощи XSS-атак (Cross Site Scripting – вредоносные скрипты, которые внедряются в свободно публикуемый контент с целью кражи персональной авторизационной информации из файлов cookie браузера и нарушения корректной работы информационного ресурса).

Сопутствующими задачами определены: разграничение прав пользователей, блокирование участников проекта, нарушающих правила его использования, создание как можно более простой модели базы данных и оптимизация запросов для их эффективно-го обслуживания, поиск необходимой информации в публикуемых статьях и реализация системы подведения рейтингов пользователей ресурса.

Для защиты от XSS-атак был разработан специальный алгоритм защиты информации. Поясним суть проблемы.

Злоумышленник в своём html-коде написал скрипт, который отправляет содержимое cookie-файлов браузера на свой компьютер. И если в cookie-файлах хранилась информация об авторизованном пользователе (сессия, пароль (даже зашифрованный)), то этот злоумышленник может получить доступ к учётным записям пользователей, которые открыли страницу с его публикацией, комментарием или вопросом форума, создав точно такие же cookie в своём браузере.

Таким образом появилось задание: создать модуль (библиотеку) для платформы .NET, которая позволит производить валидацию html-кода в соответствии с заданными правилами. Правила должны описывать разрешённые теги, атрибуты и стили, их возможные значения и шаблоны значений, которые разрешено использовать. Обеспечить возможность не только проверки кода, но и «чистку» – удаление запрещённых фрагментов html, чтобы после обработки можно было получить безопасное для использования содержимое.

Для унификации и обеспечения совместимости с библиотекой OWASP AntiSamy схемы описания правил BrainTraining.Security выполнены по аналогии. Аналогия означает правила, разработанные для одной из указанных библиотек, могут быть без модификации использованы в другой. Приведем краткий перечень реализованных правил библиотеки BrainTraining.Security (см. рисунок 1):

directives – настройка проверки (максимальный размер проверяемого кода, указание на разрешение импорта стилей и другие общие правила);

common-regexp – набор регулярных выражений, которые используются для проверки;
common-attributes – описание возможных атрибутов;
global-attributes – набор атрибутов, которыми могут обладать элементы html-кода;
tag-rules – правила обработки всех разрешённых тегов;
css-rules – правила обработки стилей;
allowed-empty-tags – список разрешённых тегов, для которых допускается отсутствие содержания.

Для защиты данных от несанкционированного доступа применены: разделение доступа и прав на использование, кодирование информации, валидация публикуемого контента. Кодирование обеспечивает защиту авторизации пользователей, данных, PHP-кода. Для кодирования использованы алгоритмы: MD5, SHL.

В работе создан и использован программный модуль BrainTraining.Security, который обеспечивает валидацию публикуемых материалов.

За время существования проекта был проведен ряд официальных олимпиад по спортивному программированию. Таким образом, поставленные перед исследованием цели полностью достигнуты.

УДК 657.1:004

ПРИМЕНЕНИЕ EXCEL ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ РАСЧЕТА ПОДОХОДНОГО НАЛОГА ДЛЯ ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВА ТУРКМЕНИСТАНА

Бердыев Р.А.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Аверина И.Н., доцент*

Налог на доходы физических лиц в Республике Туркменистан регулируется Налоговым кодексом республики, главой 6 [1]. Так, плательщиками налога на доходы физических лиц признаются физические лица, получающие доходы:

- 1) вне зависимости от их источников – для физических лиц, являющихся резидентами Туркменистана;
- 2) из источников в Туркменистане – для физических лиц, не являющихся резидентами Туркменистана.

Налогоплательщики в Туркменистане имеют право на ряд налоговых вычетов за каждый месяц налогового периода. Так, например, любое физическое лицо – в размере однократной величины минимальной заработной платы, установленной законодательством Туркменистана. Кроме того, имеется ряд социальных вычетов для:

– инвалидов – в размере двукратной или четырехкратной величины минимальной заработной платы, установленной законодательством Туркменистана, в зависимости от причины инвалидности;

– лиц, на содержании которых находятся иждивенцы, – в размере однократной величины минимальной заработной платы, установленной законодательством Туркменистана на каждого иждивенца. Указанные вычеты предоставляются обоим супругам или иному члену семьи, на содержании которого находятся иждивенцы;

– других лиц, документально подтверждающих право на эти вычеты.

Налогоплательщики в Республике Туркменистан имеют право на вычеты в размере взносов на добровольное пенсионное и (или) медицинское страхование.

Действующая минимальная заработная плата в Республике Туркменистан составляет 50 манат (официальная национальная денежная единица Республики Туркменистан).

Налогоплательщики самостоятельно осуществляют и отражают в налоговых декларациях вычеты, предусмотренные Налоговым кодексом, за исключением случаев, когда такие вычеты производятся работодателями по месту основной работы физического лица.

Если в течение налогового периода вычеты налогоплательщику не предоставлялись или были предоставлены в меньшем размере, чем предусмотрено законодательством, то по окончании налогового периода на основании заявления налогоплательщика, прилагаемого к налоговой декларации, и документов, подтверждающих право на такие вычеты, налоговой службой производится перерасчет налоговой базы с учетом предоставления налоговых вычетов в предусмотренных законодательством размерах.

Ставка подоходного налога в Республике Туркменистан установлена Налоговым Кодексом в размере 10%, если иное не предусмотрено Кодексом.

Для автоматизации расчета подоходного налога в Республике Туркменистан автором разработана блок-схема его алгоритма (рис. 1).



Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма расчета подоходного налога по законодательству Республики Туркменистан

Для автоматизации расчетов по подоходному налогу использовались возможности табличного процессора MS Excel.

Для расчетного примера в Excel были взяты среднестатистические условия Туркменистана:

- итоговые начисления по заработной плате – 1 000 манат,
- количество иждивенцев – 4 человека,
- работником написано заявление на удержания в пенсионный фонд в размере 2% и на отчисления на медицинское страхование – 2%,
- работник является членом профсоюза – профсоюзный взнос 1%,
- работник является членом действующей в Республике Туркменистан партии и уплачивает взносы в размере 1%.

Кроме того, обязательным удержанием из заработной платы в Республике Туркменистан является налог на благоустройство в размере 2 манат [1].

Результаты расчетов подоходного налога для Республики Туркменистан по условным данным приведены на рис. 2.

Для сравнения расчетов в условиях законодательства Туркменистана и Беларуси исходные начисления, вычеты и результаты переведены в USD по действующим в рассматриваемых странах на текущий момент курсам.

	A	B	C	D	E
1	Расчет подоходного налога по законодательству Республики Туркменистан				
2		Курс 1 USD	2,85 манат		
3		Курс 1 EUR	3,73 манат		
4	Процент подоходного налога	10%			
5	Вычет на 1 иждивенца	50 манат		17,54	USD
6	Процент взноса в пенсионный фонд (от 2% до 4% по заявлению)				2%
7	Процент отчислений на медицинское страхование (по заявлению)				2%
8					
9					
10	Итого начислено	1000 манат		350,88	USD
11	Иждивенцы	4 чел.			
12	Итого вычет на иждивенцев	200 манат		70,18	USD
13	Итого отчисления в пенсионный фонд	20 манат		7,02	USD
14	Итого отчислений на медицинское страхование	20 манат		7,02	USD
15	Облагаемая сумма	760 манат		266,67	USD
16	Сумма подоходного налога	76 манат		26,67	USD
17	Обязательные удержания из заработной платы				
18	Налог на благоустройство	2 манат		0,70	USD
19	Профсоюзный взнос	1%			
20	Партийный взнос	1%			
21	Итого профсоюзного взноса	10 манат		3,51	USD
22	Итого партийного взноса	10 манат		3,51	USD
23	Итого удержано (включая ПН)	98 манат		34,39	USD
24	Итого к выдаче	902 манат		316,49	USD
25					

Рисунок 2 – Расчет подоходного налога по законодательству Республики Туркменистан

Сравнение сумм удержаний, в USD

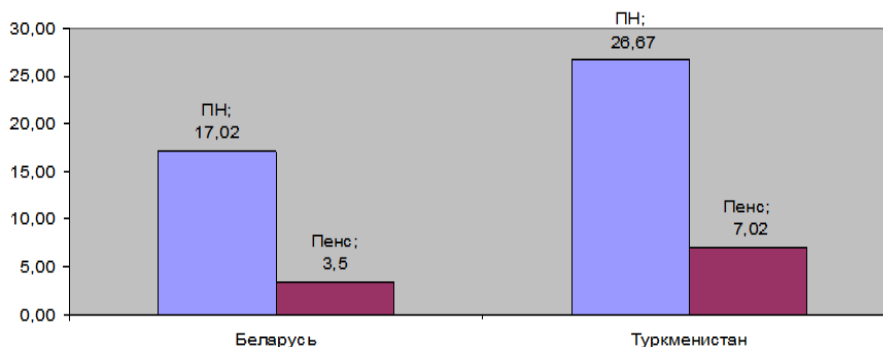


Рисунок 3 – Размеры подоходного налога и пенсионного взноса по законодательству Республики Туркменистан и Республики Беларусь

При сравнении результатов расчета подоходного налога по законодательству Республики Туркменистан и Республики Беларусь при схожих исходных данных можно отметить, что при одинаковых начислениях сумма к выдаче в Республике Туркменистан меньше, чем в Республике Беларусь (рис. 3). При этом суммы удержанного подоходного налога и пенсионных отчислений соотносятся, как представлено на диаграмме.

Список цитированных источников

1. Налоговый Кодекс Республики Туркменистан. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.turkmenbusiness.org/content/nalogovyi-kodeks-turkmenistana>. – Дата доступа: 08.04.2013 г.
2. О бухгалтерском учете и финансовой отчетности [Текст]: Закон Республики Туркменистан от 27 ноября 2010 года №155-IV.
3. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.turkmens-law.com/p5.html>. – Дата доступа: 08.04.2013 г.

УДК 004.422.612

РАЗРАБОТКА ЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАННЫХ ПОДСИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ ИТ-СЕРВИСОВ

Бойко И.Н.

*Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации, г. Гомель*

Научный руководитель: Дубинина И.В., старший преподаватель

В современных условиях функционирования экономики возрастает значимость методов согласования развития информационных систем предприятий с потребностями бизнеса. Одним из подходов к проектированию информационных систем, адекватных потребностям бизнеса, считается архитектурный подход [1].

В целом архитектурный подход может быть применен к социально-экономическим компьютеризированным системам любого размера и сложности.

Архитектурный подход к проектированию ИС основывается на утверждении, что любое предприятие как сложная комплексная система культурных, технологических и процессных компонент, организованных для достижения одной или нескольких поставленных целей, обладает некоторой архитектурой. При этом архитектура системы (предприятия) может быть описана с различных точек зрения в виде некоторого набора моделей. Эти модели представляют описания отдельных архитектурных слоев, но при этом обязательно увязывают их друг с другом.

Основными архитектурными слоями являются бизнес-архитектура и системная архитектура (ИТ-архитектура). Уровень бизнес-архитектуры дает описание того, как реализуются основные функции организации, и представляется в виде бизнес-моделей. ИТ-архитектура должна обеспечивать реализацию основных целей организации через адекватные ИТ-инфраструктуру и системы. Модельными элементами на этом уровне могут быть модели информации, модели прикладных систем, модели ИТ-сервисов.

Моделирование архитектуры предприятия поддерживают различные инструменты моделирования. Программные среды моделирования дают возможность представить организацию и ее систему управления графически в виде диаграмм, построенных по правилам методологии SADT с использованием различных нотаций моделирования. В основу этих программных продуктов положена концепция документирования знаний об объекте моделирования и интеграции множества различных методов от документации различных методов до документации прикладных систем, реализующих процессы управления.

Процессы управления ИС являются неотъемлемой частью процессов функционирования предприятия, хотя и относятся к обеспечивающим процессам. Их также можно представить в виде бизнес-моделей, интерпретировав затем в логические модели данных. Целью такого моделирования в нашем случае является разработка и проектирование подсистемы поддержки пользователей ИТ-сервисов предприятия (Service Desk) и дальнейшая спецификация требований к программной платформе, на основе которой будет выполнена физическая реализация логической модели.

Для контроля за работой сервисной службы необходимо как минимум наличие трех баз данных (БД): БД Инцидентов, БД проблем и БД конфигурационных единиц.

БД инцидентов позволяет регистрировать каждое новое обращение в системе, классифицируя их по различным параметрам. Данная БД предполагает также связь с БД пользователей предоставляемых ИС предприятия ИТ-сервисов.

БД проблем фиксирует возникающие в процессе работы и являющиеся причинами инцидента проблемы. В ней можно не только вести учет проблем, но и планировать работы по их разрешению. Проблема – это неизвестная причина одного или нескольких инцидентов [2]. Эффективное управление проблемами обеспечивает минимизацию влияния инцидентов на деятельность предприятия и предотвращение инцидентов.

БД конфигурационных единиц позволяет вести управленческий учет оборудования и программного обеспечения организации. БД Сотрудников предполагает хранение информации обо всех сотрудниках, работающих в службе ИС. Таким образом, сотрудника, отвечающего за конкретную конфигурационную единицу, можно будет назначить ответственным за устранение инцидента.

Процесс обработки инцидента в соответствии с требованиями эталонной модели ITIL/ITSM в нотации моделирования DFD представлен на рисунке 1.

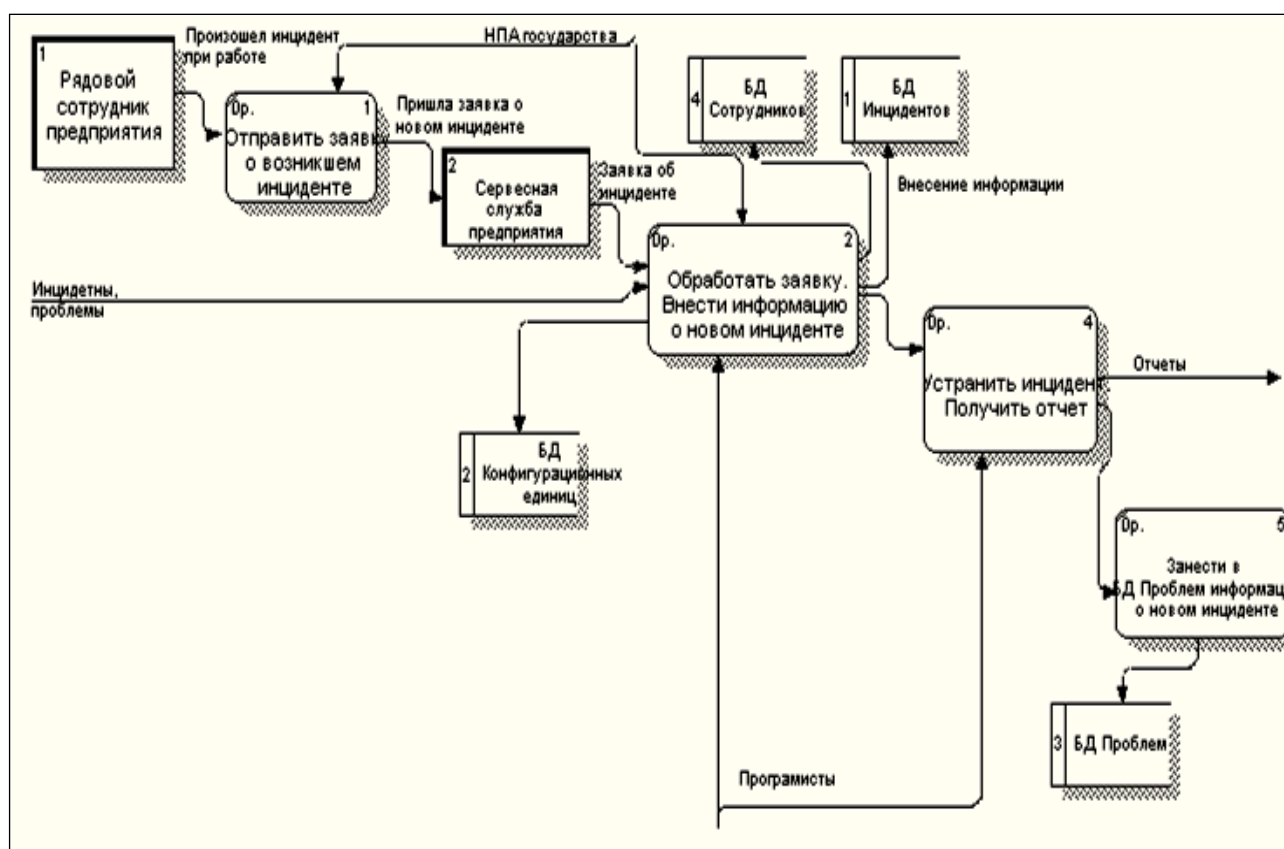


Рисунок 1

Дальнейшую разработку информационно-логической модели данных проектируемой подсистемы целесообразно выполнять на основе ER-диаграмм в программной среде ERWin.

Использование архитектурного подхода к проектированию ИС, специальных языков моделирования архитектуры предприятия (ARIS, UML и др.) и специализированных программных сред моделирования позволяет:

- 1) представить процессы управления предприятием в целом и его информационной системой в форме, понятной и бизнес-пользователям и ИТ-специалистам;
- 2) установить информационные взаимосвязи между всеми процессами управления;
- 3) подготовить необходимую информацию для дальнейшего проектирования программного обеспечения.

Список цитированных источников

1. Васильев, Р.Б. Управление развитием информационных систем: учеб.-метод. пособие для вузов / Р.Б. Васильев, Г.Н. Калянов, Г.А. Левочкина; под ред. Г.Н. Калянова. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 376 с.
2. Экономическая информатика: введение в экономический анализ информационных систем: учеб. / Под ред. М.И. Лугачева. – М.: ИНФРА-М, 2011. – 958 с.

УДК 539.3

FORTRAN – ПРОГРАММА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ***Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., Мороз Е.А.****Брестский государственный технический университет, г. Брест**Научный руководитель: Хвисевич В.М., к.т.н., доцент*

Важной в инженерной практике задачей является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) конструктивных элементов машин и механизмов при механическом и температурном нагружении. В некоторых случаях достаточно ограничиться решением двумерных задач теории упругости и термоупругости [1]. Однако не все существующие программы позволяют проводить расчет для тел с произвольной геометрией границы. Существующие вычислительные комплексы (ANSYS, NASTRAN и др.), построенные на базе метода конечных элементов (МКЭ), позволяют исследовать НДС тел с любой геометрией, однако они сложны в использовании и имеют некоторые ограничения, например для бесконечных или полубесконечных тел. Слабая сторона МКЭ состоит в том, что он, во-первых, представляет собой схему дискретизации всего тела, а это неизбежно ведет к очень большому количеству конечных элементов, и, во-вторых, часто приводит к нереальным разрывам значений физических величин.

Очевидным альтернативным подходом к системе дифференциальных уравнений является попытка аналитически проинтегрировать их каким-нибудь способом или перед переходом к какой-либо схеме дискретизаций или перед введением какой-либо аппроксимации. Сущность методов граничных интегральных уравнений (ГИУ) состоит в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений в качестве первого шага решения задачи. Вторым шагом является сведение полученных интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение СЛАУ легко программируется и является идеальным способом реализации решения на ЭВМ.

Метод ГИУ, основанный на теории потенциала, имеет характерную особенность – возможность решения задачи с использованием дискретизации лишь границы области. Это позволяет снизить на единицу порядок решаемой системы алгебраических уравнений. Естественно, что реализация такой возможности в методе ГИУ предусматривает предварительный переход от исходной краевой задачи для дифференциальных уравнений, описывающих некоторый процесс, к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области (или ее части).

На основе разработанного алгоритма численного решения интегральных уравнений краевых задач методом ГИУ [2] разработана компьютерная программа на алгоритмическом языке «FORTRAN». Программа предназначена для расчёта конструктивных эле-

ментов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Область, занятая телом, может быть односвязной или многосвязной.

По разработанной программе можно решать как внутренние, так и внешние краевые задачи теории упругости и термоупругости. Для внешней задачи задаётся напряжение в бесконечно удалённой точке. При разработке программы учитывалась геометрическая и физическая симметрия (рассматриваемая область и нагрузка). Учёт осевой симметрии расширяет возможности программы, облегчает ввод исходной информации.

В соответствии с алгоритмом [2], процесс реализации задачи делится на три этапа. На первом этапе осуществляется ввод и обработка исходных данных. Результатом обработки являются координаты центров отрезков разбиения границы области, их длины, радиусы кривизны и координаты вектора внешней нормали. На этом этапе формируется также массив внешней нагрузки и задание характеристик материала. На втором этапе составляется и решается СЛАУ, результатом которой являются значения плотностей потенциала в точках границы области. Алгебраическая система решается методом последовательных исключений Гаусса. При формировании строк матрицы в зависимости от расстояния между параметрической точкой и отрезком интегрирования автоматически определяется число узлов точек квадратурной формулы Гаусса. На 3-м этапе вычисляются напряжения и перемещения на границе области в соответствующих внутренних точках области по формулам [2, 3].

При построении расчётной области следует стремиться получать границу с кусочно-непрерывной, ограниченной кривизной. Если по каким-либо причинам трудно привести задачу к гладкой границе, в программе предусматривается возможность реализации области с выступающими и входящими углами.

В стандартном режиме программа реализует задачи для областей, ограниченных отрезками прямых и окружностей. Рассматриваемая область может быть произвольной, заданной графически или аналитически. В связи с этим, изменения вносятся в подпрограмму ввода исходных данных и содержат подпрограммы или набор операторов по вычислению координат центров отрезков разбиения границы, радиусов кривизны, длин, векторов внешней нагрузки только для тех участков, которые нельзя заменить окружностью или прямой. В программе также предусмотрена диагностика ввода и обработки исходных данных.

С помощью разработанной программы решен ряд тестовых задач по исследованию НДС при механическом и температурном нагружении. Для большей наглядности результаты расчетов обрабатываются с помощью программы для визуализации «ТесPlot 360».

1. Напряжённо-деформированное состояние длинной стальной полосы с отверстиями.

Многосвязная область нагружена распределённой по концам равномерной контурной нагрузкой 1 Н/м. Материал полосы – сталь 30. Область имеет внешний и внутренний контуры (рис 1).

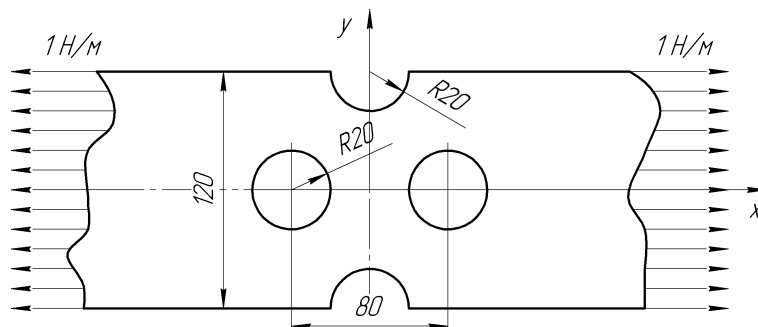


Рисунок 1 – Растяжение полосы с концентраторами напряжений

Область имеет две плоскости симметрии, проходящие через оси X и Y . Вырежем элемент полосы длиной 210 мм в зоне ослабления. Учитывая свойства симметрии, расчётная схема представляет собой четверть области.

Расчётная область имеет 4 непрерывных участка, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Для каждого участка назначается определённое число отрезков. При этом необходимо вводить ограничения на их длину. Центр отрезка не должен находиться к противоположному участку границы ближе, чем половина длины ближайшего отрезка разбиения. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 25; 15; 25 участков.

В результате численного решения задачи получено распределение полей напряжений и деформаций. Типичное распределение нормальных напряжений приведено на рис. 2.

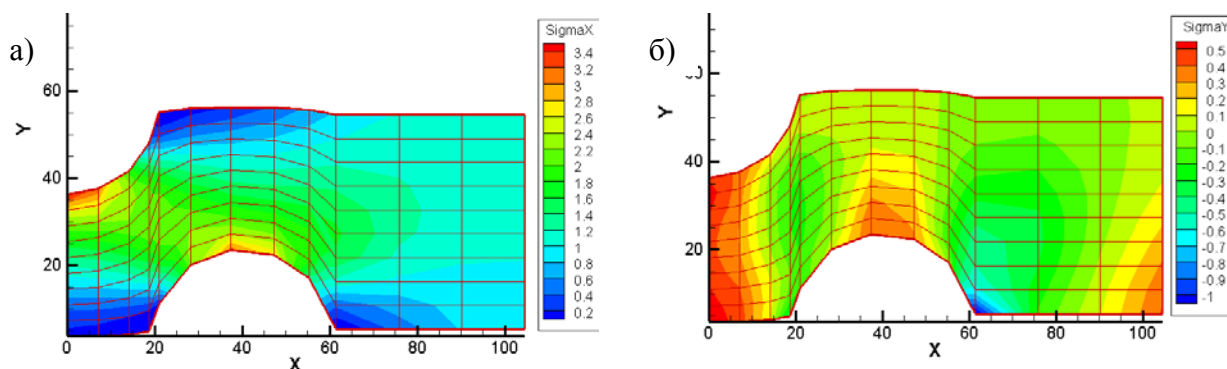


Рисунок 2 – Распределение нормальных напряжений: а) по оси X , б) по оси Y

2. Напряжённо-деформированное состояние пробивного пуансона.

Данная деталь используется для пробивки отверстий. Материал пуансона – сталь X12M. Многосвязная область, представляющая собой продольное сечение, нагружена распределённой на пробивном конце равномерной контурной нагрузкой $100 \cdot 10^6$ Н/м. Область имеет только внешний контур, а так же плоскость симметрии, проходящую через ось Y . Напряжения на закрепляемом конце можно представить как равномерную контурную нагрузку, численно равную 41,6 Н/мм. Учитывая свойства симметрии, построим расчётную схему для реализации этой задачи (рисунок 3).

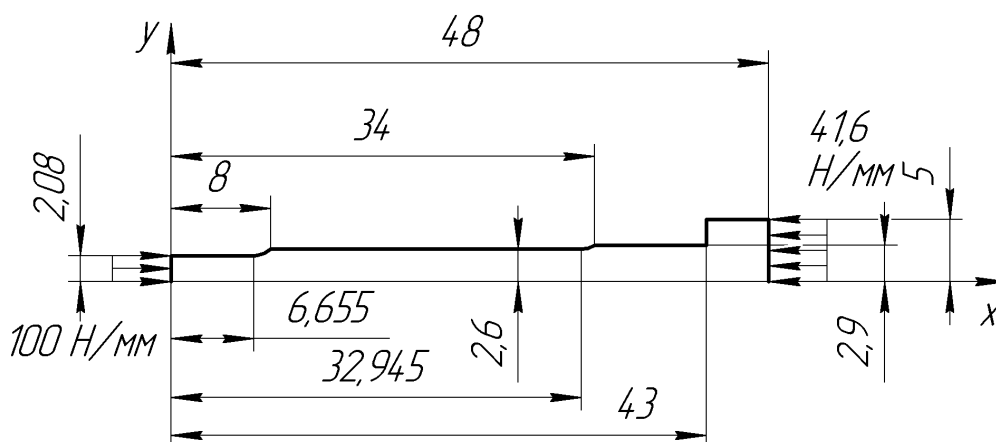


Рисунок 3 – Расчётная схема пуансона

Расчётная кусочно-гладкая область имеет 9 непрерывных участков, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 16; 15; 32; 10; 55; 10; 32; 15 участков.

В результате реализации задачи получено напряженное состояние в соответствующих точках области (рис. 4).

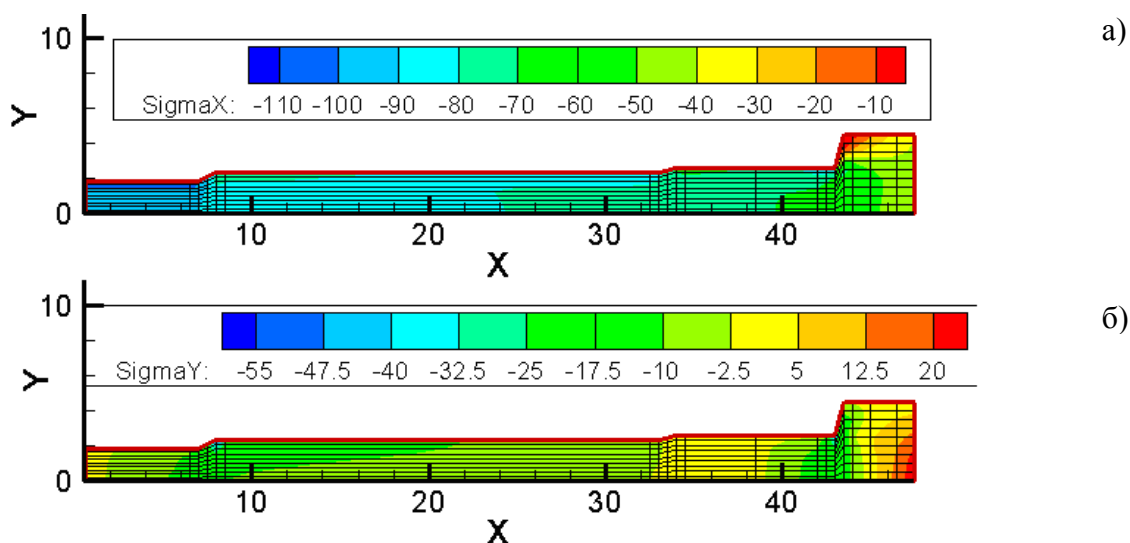


Рисунок 4 – Распределение нормальных напряжений в продольном сечении:
 а) по оси X, б) по оси Y

Ввиду отсутствия аналитических решений сравнение результатов проводилось при помощи вычислительного комплекса «ANSYS» [3]. Количественная оценка напряжений показала, что результаты решений задач обоими способами отличаются в допустимых пределах при проведении инженерных расчётов.

В результате сравнения возможностей МГИУ и МКЭ при решении задач механики деформированного твердого тела следует заметить, что применение разработанной FORTRAN-программы существенно упрощает подготовку исходной информации, расширяет класс решаемых задач, позволяет получить более точные результаты, следовательно, её можно эффективно использовать для оценки НДС конструктивных элементов при воздействии механических и температурных нагрузок.

Список цитированных источников

1. Новацкий, В. Теория упругости. – М.: Мир. – 1975. – 872 с.
2. Хвисевич, В.М. Интегральные уравнения и алгоритм решения плоской краевой задачи стационарной термоупругости методом потенциала // Строит. механика и расчет сооружений. – 1991. – № 2. – С. 48-51.
3. Гарбачевский, В.В. Численное решение двумерных задач механики деформируемого твердого тела методом потенциала: дис. ... магистр. тех. наук.: 05.13.18 / В.В. Гарбачевский. – Брест, 2012. – 62 с.

УДК 004.023

АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ ТЕХНОЛОГИИ WI-FI

Евменьева А.П., Евменьев М.А.

*Белорусский государственный университет информатики
 и радиоэлектроник, г. Минск*

Научный руководитель: Куликов С.С., к.т.н., доцент

В работе разработан алгоритм определения местоположения объекта с точностью до 1-го метра с помощью технологии Wi-Fi. Освещаются текущие подходы определения местоположения их достоинства и недостатки. Так как данные об местоположений сегодня используются во многих приложениях, то данная тема является весьма актуальной.

В настоящее время одним из самых быстрорастущих рынков является рынок LBS-Сервисов (Location Based Services; сервисы, основанные на местоположении). Данные сервисы используются в навигаторах; форскверах; приложениях, использующие геотеги (например Instagram), а также в других приложениях, работающих на основе данных LBS. Существует множество технологий, позволяющих определить местоположение объекта, и все они имеют свои характеристики, наиболее важными из которых являются: распространённость технологии, точность, энергопотребление, стоимость и работа внутри помещений. Как правило, технология выбирается исходя из того, какие характеристики требуются для решения задач, которые ставятся перед системой.

Наиболее распространёнными являются системы спутниковой навигации (GNSS) типа GPS и ГЛОНАСС. Они обеспечивают точность позиционирования до 3-х метров и работают в любом месте прямой видимости спутников. Недостатками данной технологии являются высокое энергопотребление, невозможность работать внутри помещений и значительные временные затраты на поиск спутников (среднее время поиска составляет 2 минуты).

Альтернативой GNSS для устройств, у которых нет GPS или которые находятся вне зоны доступа спутников (например, в помещениях), служат методы нахождения местоположения по ближайшим GSM-вышкам (существует 3 метода позиционирования: позиционирование по базовой станции, вычисление расстояния по силе сигнала, вычисление расстояния по разнице во времени), сетям Wi-Fi (более точное определение местоположения в отличие от GSM однако Wi-Fi не так сильно распространён) или по IP-адресу (самый основной недостаток – это смена IP-адресов). Точность определения у каждого из этих способов гораздо хуже, чем у GPS. Но если их скомбинировать, они вместе дадут приемлемое качество.

Наиболее широкими в использовании внутри помещений являются методы поиска местонахождения с помощью технологии Wi-Fi. Идея использования точек доступа Wi-Fi для определения местоположения объектов широко применяется для самых разных задач. Первыми сервисами, применившими данную технологию, являются Google maps и Яндекс карты. Эти сервисы предоставляют информацию о местоположении объекта в любой точке города с помощью зарегистрированных Wi-Fi сетей, используя метод триангуляции. Данный метод заключается в вычислении места нахождения абонента мобильной связи, путём наложения координат расположения абонента на карту местности. Однако на практике максимальная точность, которую может обеспечить данная методика, не превышает 15 метров, при условии крайне высокой концентрации Wi-Fi сетей.

Для более точного определения местоположения была разработана альтернативная технология позиционирования, которая основана на определении помещения, в котором находится объект, и последующем нахождении пользователя внутри данного помещения. Идея данного способа заключается в учёте погрешности, которая получается в результате установления отношения между силой сигнала и расстоянием между приёмником и передатчиком. В результате, точность определяемого расстояния колеблется в пределах от 1,5 до 0,2 метра в зависимости от расстояния до точки доступа и препятствий. Таким образом, возможное местоположение приёмника представляется в виде кольца для каждой точки доступа. Пересечение всех колец и даёт возможное местоположение. Для более точного определения местоположения необходимо найти в заданной области ближайшую к приёмнику точку доступа; построить участок кольца, принадлежащего области позиционирования, с шириной, обратно пропорциональной расстоянию до точки; разбить кольцо на множество точек, в зависимости от требуемой точности

позиционирования; проверить каждую точку полученного множества на принадлежность другим кольцам.

Возможности применения указанной технологии, за счёт высокой точности позиционирования и мобильности, довольно широки. Эта технология может обеспечить предоставление LBS-услуг внутри помещений, а также определение местоположения подвижных объектов.

Список цитированных источников

1. Castro, P. A probabilistic room location service for wireless networked environments. / P. Castro, P. Chiu, T. Kremenek, R. Muntz // Proceedings of Med-Hoc-Net, Mediterranean workshop on ad-hoc networks, Baia Chia, Cagliari. – 2002.

2. Anwar, A.K. Evaluation of indoor location based on combination of AGPS/HSGPS / A.K. Anwar, G. Ioannis, F.N. Pavlidou // Procs of 3rd symp on wireless pervasive computing. – P. 383-387.

УДК 378.147.88

ГИБКАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ В ОБРАЗОВАНИИ

Евменькова А.П., Евменьков М.А.

*Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, г. Минск*

Научный руководитель: Куликов С.С., к.т.н., доцент

Индустрия программного обеспечения сравнительно молода, но играет одну из ключевых ролей в построении информационного общества. Разработка программного обеспечения развилась до самостоятельной индустрии, способной направлять развитие не только науки и техники, но и человеческой цивилизации в целом.

По исследованиям Gartner Consulting в 2012 году, в банках и страховых компаниях более 90% рабочих мест обеспечены информационными технологиями (ИТ), 70% компаний используют Интернет в своей работе. В то же время 15-20% рабочего времени проходит непродуктивно из-за проблем в сфере ИТ. Это значит, что практически любая организация нуждается в эффективном планировании, отслеживании и контроле ИТ-сервисов. Эта проблема касается и сферы образования.

В настоящий момент существует множество различных методологий разработки программного обеспечения, каждая из которых обладает своими преимуществами и недостатками. Правильный выбор методологии разработки программного обеспечения – основная задача менеджеров проектов.

Все проекты различаются по масштабу, бюджету, направленности, сложности, величине и производительности команды, поэтому каждому менеджеру, управляющему проектом, необходимо как можно тщательнее подходить к принятию решения об используемой методологии разработки программного обеспечения.

На сегодняшний день чаще всего используются такие методологии разработки программного обеспечения, как: каскадная модель (Waterfall), RUP (Rational Unified Process), гибкая разработка (Agile). И если водопадной методологии и RUP уделяется достаточно большое количество часов для изучения в процессе образования, то гибкая методология, несмотря на свою популярность и эффективность, почти не входит в учебную программу студентов технических вузов.

Семейство гибких методологий весьма разнообразно, но самым популярным видом разработки в Agile является Scrum, который имеет достаточно несложную структуру и несложен в изучении [1].

Правила реализации Скрама: один человек в проекте (Product owner), уполномоченный принимать решения об очередности разработки частей функционала; Product Owner поддерживает список требований-пожеланий к продукту. Этот список сортируют по принципу «ценное сверху, менее ценное снизу». Такой список называется «Product Backlog»; при планировании короткой фазы проекта (спринта), команда выбирает из Product Backlog ту верхнюю часть, которую реально начать и закончить за выделенный период; далее команда обсуждает серию экспериментов и задач, которые помогут более эффективно работать в течение следующего спринта. Это называется ретроспектива; для более слаженной работы членам команды придётся синхронизировать свои усилия и помогать друг другу. Делается это раз в день в течение 15 минут в присутствии всей команды [2].

Таким образом, взяв в разработку на лабораторных занятиях несложный проект и используя предлагаемую методологию, можно добиться повышения не только теоретических, но и практических навыков учащихся.

Список цитированных источников

1. Хенрик, К. Scrum и XP: заметки с передовой [Электронное издание] – Режим доступа: <https://bookmate.com/books/jhtifVdZ>. – Дата доступа: 20.09.2012г.
2. Швейьер, К. Agile Project Management with Scrum – NY, 2004.

УДК 004.588

ИНФОРМАЦИОННО-СПРАВОЧНЫЙ ГЕМАТОЛОГИЧЕСКИЙ РЕСУРС НА ОБЛАЧНОЙ ПЛАТФОРМЕ

Кандора Д.С., Лашкевич Е.М., Позняк Е.В.

*Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, г. Минск*

Научный руководитель: Бондарик В.М., к.т.н., доцент

В настоящее время в медицине наблюдается активное внедрение информационных технологий (ИТ). Возрастающий интерес к информационным технологиям в медицине вызван все большей информатизацией общества.

Оперативный доступ к необходимой информации, ее полнота и структурированность определяют выбор в пользу того или иного источника информации.

Облачные вычисления – это модель предоставления удобного сетевого доступа в режиме «по требованию» к коллективно используемому набору настраиваемых вычислительных ресурсов (например, сетей, серверов, хранилищ данных, приложений и/или сервисов), которые пользователь может оперативно задействовать под свои задачи. Эта модель направлена на повышение доступности вычислительных ресурсов [1].

Основные преимущества облачных технологий, такие как доступность и отказоустойчивость; экономичность и эффективность; простота; безопасность; гибкость и масштабируемость, обуславливают выбор данного инструментария для создания медицинского ресурса, выполняющего роль справочного источника медицинской информации и с возможностью предоставления своих мощностей для выполнения вычислительных медицинских экспериментов [2, 3].

В ходе нашей работы разработан вспомогательный ресурс, который был развернут на платформе Force.com, являющейся облачной платформой «as a service» и занимающей более 50% рынка PaaS систем.

Основная цель ресурса – предоставление справочного материала о биохимическом и элементном составе, свойствах, физиологических функциях крови и методах ее исследования.

Доступ к вспомогательному ресурсу осуществляется посредством сети Интернет.

Основное меню справочного портала в целях удобства разбито на следующие разделы: гематология (структура крови, свойства и назначение её элементов), клинико-лабораторные анализы (виды и методы исследования крови), видео (видеоматериалы различного рода) и ссылки (ссылки на научные сервисы, для получения новейшей информации о крови и способах ее исследования).



Рисунок 1 – Основная страница справочного портала

При переходе в раздел гематологии в новом окне открывается страница с составом крови (рис. 2). Компоненты представлены в виде дерева, что удобно для восприятия и дальнейшей навигации или выбора интересующего раздела. Каждый компонент представляет собой стилизованную кнопку, при нажатии на которую можно перемещаться по дереву.

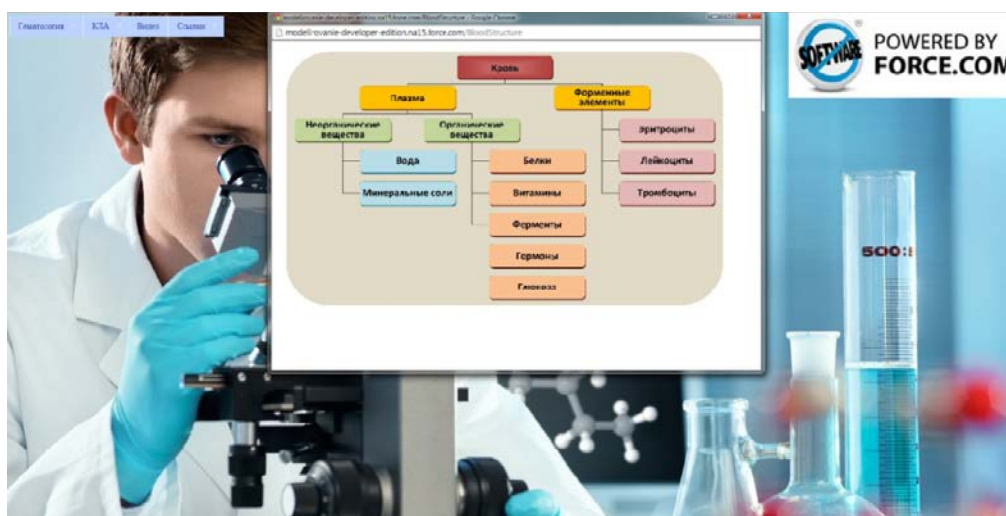


Рисунок 2 – Структура крови

При переходе пользователя в подраздел, например, «Эритроциты», навигационное дерево по структуре крови смещается в левую часть страницы и преобразуется для

более простого перехода по остальным разделам, а вся правая часть страницы отводится под контент (рис. 3). Изначально весь контент для удобства восприятия скрыт под вспомогательными ссылками, которые представляют собой основные заголовки. При нажатии на ссылку область страницы динамически выведет основной текст, а при повторном нажатии – скроет. Схожим образом реализованы все остальные разделы из дерева.

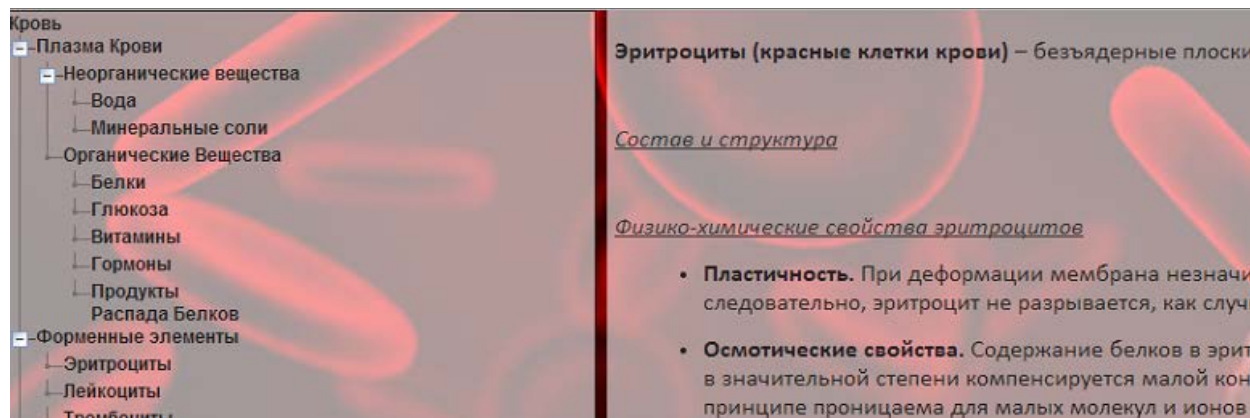


Рисунок 3 – Раздел «Эритроциты»

В несколько ином ключе реализована навигация по клинико-лабораторным исследованиям крови. Навигационная панель расположена в правом верхнем углу, а основной контент отображается под этим меню. Для доступа к необходимому материалу используются кнопки и выпадающий список (рис. 4). При нажатии на кнопку или выборе интересующего нас раздела в выпадающем списке страница динамически изменяет свое содержание на соответствующее. Для удобства пользователя разделы и подразделы, относящиеся к тому или иному методу исследования, отображаются различными цветами. Это дает наглядное представление иерархии методов исследования крови. Так же для удобства чтения фон страницы осветляется, чтобы улучшить контрастность текста и тем самым его читабельность.

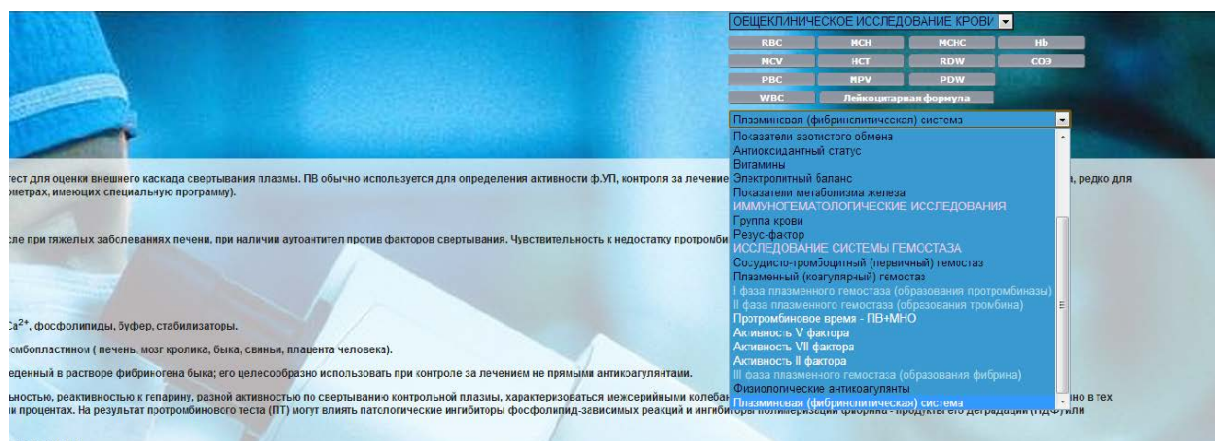


Рисунок 4 – Навигация по клинико-лабораторным исследованиям

Данный вспомогательный ресурс может быть задействован и как справочный материал, и как дополнительные вычислительные мощности, что, несомненно, является как его особенностью, так и преимуществом. Справочный портал можно использовать как обучающий материал, в то время как основные вычислительные мощности данного ресурса будут направлены на проведение вычислительных экспериментов по моделированию процессов.

Информация, размещенная на нашем сервисе, будет полезна как практикующим врачам, так и студентам медицинских университетов, т.к. содержит в себе хорошо проработанный, структурированный материал и имеет интуитивно понятную навигацию по основным разделам, что облегчает поиск нужной информации.

Так же облачные ресурсы нашего проекта могут быть использованы: для предоставления дополнительных вычислительных мощностей для проведения вычислительных экспериментов; как хранилище данных (хранение документов, данных по экспериментам и т.д.); для интеграции с другими сервисам в сети Интернет, для получения доступа к их потенциальным возможностям.

Список цитированных источников

1. Денисов, Д.В. Перспективы развития облачных вычислений/Д.В. Денисов // Прикладная информатика. – М.:ООО "Маркет ДС Корпорейшн", 2009. – № 5. – С. 52.

2. Уокер, Г. Основы облачных вычислений. Новый способ предоставления вычислительных ресурсов. [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/cl-cloudintro/>

3. Вик, Дж. Р. Уинклер. Адаптированная выдержка из книги «SecuringtheCloud» [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <http://technet.microsoft.com/ru-ru/magazine/jj851176.aspx>.

УДК 656.13.05

ГЕНЕРАЦИЯ ПЛОСКИХ КУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Козеко Е.Л.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Шуть В.Н., к.т.н., доцент*

Теория графов применяется в различных науках. Одной из важных задач данной теории, эффективное решение которой имеет большое значение, является генерация плоских кубических графов. Её результаты могут использоваться для решения различных практических задач науки, техники и управления.

Существует несколько методов генерации плоских кубических графов. В работе был предложен метод генерации с помощью установки перемычек, который был описан на ЯВУ C++. Алгоритм данного метода заключается в том, что поочередно в каждый контур исходного графа всеми возможными способами добавляется новое ребро. Таким образом, новый граф имеет $n+2$ вершины, где n – количество вершин исходного графа; $p+3$ ребер, где p – количество ребер исходного графа; $g+1$ граней, где g – количество граней исходного графа соответственно. Для реализации использовали матрицу инцидентности ребер и граней, которая показывает, какие ребра входят в состав граней, и позволяет определить, в какую грань будет установлена перемычка, т. е. в какие ребра будут добавляться новые вершины.

Изначально задавался плоский кубический граф, имеющий четыре вершины. Для него строилась матрица инцидентности ребер и граней, которая показывала, какие ребра входят в составы граней (если ребро p_i входило в грань g_j , в ячейке ij ставилась 1). Далее по ней заполнялась матрица контуров граней, где хранилась информация о вершинах, образующих каждую из граней. Она необходима для того, чтобы определить состав граней после добавления перемычки и составить новую таблицу инцидентности ребер и граней для описания полученного графа.

Данный метод хорош тем, что в нем нет необходимости проверять граф на планарность, что также упрощает весь алгоритм решения поставленной задачи.

После генерации всех возможных графов на одном шаге, т. е. полученных из графов с одинаковым количеством вершин, все пары графов проверяются на изоморфизм. Данная операция необходима для того, чтобы упростить и ускорить дальнейшую генерацию, т. к. удаление одного из изоморфных графов в паре позволяет уменьшить количество используемых графов. Проверка графов на изоморфизм осуществлялась в два этапа. На первом этапе проверялось необходимое, но не достаточное условие изоморфизма. Оно заключается в том, что сравниваемые графы должны иметь одинаковый состав граней, что определяется по описанной выше матрице инцидентности ребер и граней. Если данное условие не выполняется, графы не являются изоморфными. Если же выполняется, проверяется второе условие. Чтобы однозначно определить изоморфизм графов, необходимо выяснить, какие фигуры, составляющие граф, являются смежными. Для этого также можно воспользоваться матрицей инцидентности ребер и граней, где в строках единицы определяют смежность граней, т. е. если грани содержат одно и то же ребро, они являются смежными. Таким образом, если списки количества одинаковых фигур граней совпадают и каждая из фигур одного графа является смежной такому же набору фигур, как и в другом сравниваемом графе, графы являются изоморфными, следовательно, в дальнейшей генерации будет участвовать лишь один граф из рассматриваемой пары.

Заключительным этапом являлась проверка существования гамильтонова контура, что в частности определяло цель нашей работы. Для нахождения гамильтоновых циклов использовали перебор с возвратом, который имеет следующий алгоритм:

- поиск начинаем с первой вершины графа;
- пусть уже найдены первые $k-1$ вершин возможного цикла. Рассматриваем ребра, выходящие из последней найденной вершины, и находим ребро, соединенное с ранее не рассмотренной вершиной;
- включаем найденную вершину в цикл и помечаем ее как рассмотренную, помещая ее в множество рассмотренных вершин. Если такой вершины нет, то возвращаемся к предыдущей вершине и повторяем вычисления.

Главной целью нашей работы являлось нахождение минимального плоского кубического графа, не имеющего гамильтонов контур. Как известно, существуют такие графы с 38 вершинами (впервые был построен независимо Ледербергом Босаком и Барнеттом). Однако достичь поставленной цели не удалось. При генерации графов возникло несколько проблем, не позволяющих добиться необходимых результатов. Одна из них – большой рост графов на каждом шаге, что требует значительных вычислительных ресурсов. Время генерации увеличивается в разы, что не позволяет решить поставленную задачу. Данная проблема в большей степени связана с тем, что с ростом количества графов увеличивается время работы алгоритма проверки изоморфизма. Безусловно, время работы остальных алгоритмов также резко возрастает. Эти проблемы являются преградой для достижения цели.

Таким образом, необходимо более детально рассмотреть данную задачу. Нахождение альтернативных алгоритмов может помочь достичь желаемых результатов.

Список цитированных источников

1. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М: Мир, 1973. – С. 4; 88.
2. Плотников, А.Д. Дискретная математика / А.Д. Плотников. – М: Новое знание, 2005. – С. 63.

УДК 004.9

БАЗОВЫЕ ОПЕРАЦИИ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА МЕХАНИЧЕСКИХ ВСТАВОК КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

Латий О.О.

Брестский государственный технический университет, г. Брест
 Научный руководитель: Хведчук В.И., к.т.н., доцент

Одной из важных проблем современной медицины является лечение расстройств мозгового кровообращения. Данная патология является одной из основных причин смертности населения развитых стран. Смертность от инсульта составляет до 20% от общей летальности, уступая лишь смертности от заболеваний сердца и опухолей всех локализаций.

Исходя из вышеизложенного, представляется чрезвычайно актуальным создание компьютерной модели кровотока в русле артерии с последующим прогнозированием его изменений в естественном состоянии и в ходе хирургического лечения.

Проведен анализ численных методов, применяемых для расчета потока жидкости или суспензии деформируемых частиц, которые можно разделить на группы: граничных интегральных уравнений [1], метод решеточных уравнений Больцмана [2], метод конечных элементов на подвижных сетках [3].

Рассмотрена модель метода конечных элементов для задачи воздействия на механическую вставку. Выделена, в качестве базовой, плоская задача теории упругости. Описана структура формирования матрицы жесткости треугольного конечного элемента. Показаны основные элементы объединения конечных элементов (КЭ) в расчетной модели реального объекта.

Рассматривается пластинка, выполненная из изотропного материала (рис. 1), свободная от начальных напряжений и нагруженная только внешними силами на контуре, в срединной плоскости. Влияние объемных сил учитывается отдельно.

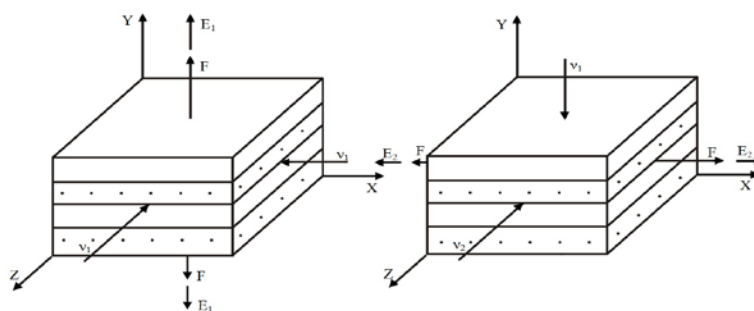
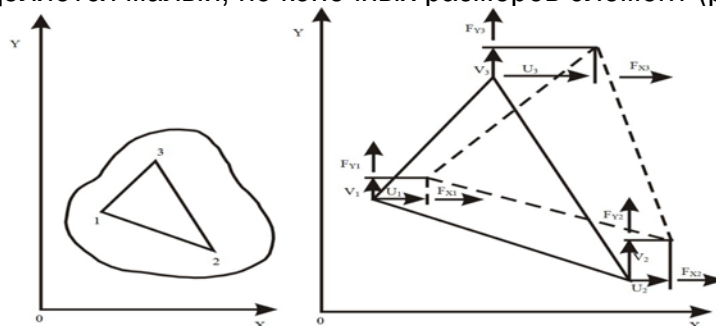


Рисунок 1 – Упругие постоянные для изотропного материала

В пластинке выделяется малый, но конечных размеров элемент (рис. 2а).



а – нумерация узлов, б – усилия и перемещения узлов

Рисунок 2 – Треугольный конечный элемент

Произвольная внешняя нагрузка на поверхности тела известными способами приводится к сосредоточенным силам, действующих в узлах КЭ.

Задаем зависимость между перемещениями внутренних и узловых точек. В простейшем случае эта зависимость линейна и может быть представлена в матричной форме

$$\vec{f} = \bar{\Phi}^T \vec{V}, \quad (1)$$

где матрица $\bar{\Phi}$ размерами 6×2 имеет следующий вид:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{E}_2 \Phi_1(x, y) \\ \bar{E}_2 \Phi_2(x, y) \\ \bar{E}_2 \Phi_3(x, y) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где \bar{E} – единичная матрица, порядок которой равен числу степеней свободы узлов, то есть двум.

Вычисляя частные производные от перемещений U, V по координатам X, Y , и получим матричную форму для деформаций КЭ

$$\vec{\varepsilon} = \bar{B} \cdot \vec{V}, \quad (3)$$

где матрица \bar{B} размерами 3×6 состоит из трех матриц $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$:

$$\bar{B} = \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \quad (4)$$

каждая из которых имеет вид

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & C_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix}, \dots, \bar{B}_3 = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} B_3 & 0 \\ 0 & C_3 \\ C_3 & B_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вывод уравнений равновесия производится на основе принципа возможных перемещений, который служит необходимым и достаточным условием минимума полной потенциальной энергии системы. При этом из всех возможных, то есть не противоречащих условиям закрепления тела, перемещений действительными оказываются перемещения, для которых сумма возможных работ всех внутренних и внешних сил равна нулю:

$$\delta W = \delta \mathcal{E} - \delta A = 0 \text{ или } \delta \mathcal{E} = \delta A. \quad (6)$$

На базе описанной модели реализована двумерная версия расчета задачи плоской теории упругости в математической системе Mathcad. Проведен расчет по МКЭ на примере вставки в кровеносный сосуд на механические воздействия.

Реализованные операции МКЭ могут быть использованы для разработки инструментария для построения базовых моделей расчета потока жидкости, позволяющих анализировать в последующем и воздействие суспензии.

Так, интересным является анализ нелинейной вариационной задачи, при которой точки на поверхности перераспределяются так, чтобы минимизировать высокочастотную компоненту в разложении по сферическим функциям, при этом на каждом шаге производится репараметризация. В качестве метода решения здесь может послужить метод начальных параметров.

Важным является моделирование неньютоновской жидкости, причем не только на малых скоростях, но и с исследованием устойчивости поведения на границах подвижных тел. Необходимо также моделирование многофазных потоков и сложных течений жидкости, включая потоки суспензии частиц и деформируемых капсул.

Еще одним направлением является моделирование поведения вставки как оболочки, например на базе метода конечных разностей. Имеется также немало систем конечно-элементного анализа (Ansys, Cosmos), имеющих в своем составе конечные элементы различной природы, пригодные для реализации вышеуказанных моделей.

Важным приложением разработанных средств является использование для задач обучения. В целом, предложенные средства позволяют сократить время при подготовке тестирующего контента для системы обучения и контроля знаний.

Список цитированных источников

1. Rahimian, A. Petascale direct numerical simulation of blood flow on 200K cores and heterogeneous architectures / A. Rahimian, I. Lashuk, S.K. Veerapaneni [et al.] // Proceedings of the 2010 ACM/IEEE International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, 2010. – P. 1–11.

2. Peters, A. Multiscale simulation of cardiovascular flows on the IBM Blue Gene/ A. Peters, S. Melchionna, E. Kaxiras / P: full heart-circulation system at near red-blood cell resolution // SC10 November 2010. – New Orleans, Louisiana, USA, 2010.

3. Tezduyar, T.E. Parallel finite element computations in fluid mechanics / T.E. Tezduyar, A. Sameh // Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 2006. – Vol. 195, № 13–16. – P. 1872–1884.

УДК 519.713

ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО ДЛЯ РАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ЧАСТИЧНО ЗАДАНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Леончук К.И., Тузик И.В.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Частичные функции возникают при кодировании входных, выходных символов и состояний частичных автоматов и используются для построения логических схем таких автоматов.

Разделительная декомпозиция позволяет при некоторой перестановке переменных исходной функции выделить из нее функцию, зависящую от меньшего числа переменных.

Эту выделенную в результате декомпозиции функцию можно реализовать в виде отдельного функционального блока, что упрощает саму логическую схему. Для того чтобы такая декомпозиция оказалась возможной, требуется найти такой способ доопределения таблицы значений исходной функции, чтобы свести ее строки (или столбцы) к строкам (или столбцам) не более чем двух одинаковых типов [1]. Тогда функция $f(x,y,z,w)$ может быть приведена, например, к виду $g(u,v,h(p,t))$, где u, v, p, t – некоторая перестановка переменных x, y, z, w . При этом используется представление:

$$f(x,y,z,w) = \neg h(p,t) \& g(u,v,0) \vee h(p,t) \& g(u,v,1)$$

Основной целью предлагаемого программного средства, реализованного на языке C# и рассматриваемого в данной работе, является автоматизация перебора всех возможных вариантов доопределения заданной частичной функции с учетом возможного изменения порядка ее переменных.

В начале работы программы требуется задать частичную функцию и указать маску, в соответствии с которой будет осуществляться перебор порядка переменных для доопределения.

Частично заданная булева функция вводится с помощью символов 0, 1 и – (дефис).

Маска задается при помощи переменных x, y, z, w, \dots , – (дефиса) и \ (обратного слеша).

По умолчанию вводится маска ----, означающая перебор полного набора всех решений. Примеры задания других масок:

- $x\ y\ z\ w$ – программа найдет все возможные доопределения строк либо столбцов с указанным порядком переменных;
- $x\ y\ z\ w$ – будут найдены доопределения с четко определенным порядком и разделением в конкретном месте;
- $x- -y$ – выполнится перебор с закрепленным местом для x и y .

Итоговое решение, возвращаемое программой, содержит:

- 1) результат доопределения и формульное представление доопределенной в каждом случае исходной функции, записанное с использованием стандартных связей,
- 2) результат декомпозиции в виде формулы, заданной в системе $\{\neg, \&, \vee\}$, и сложность этой формулы,
- 3) соответствующую схему из функциональных элементов, где выделенная в результате декомпозиции функция реализована в виде отдельного блока.

Программа также выводит сводную таблицу для различного порядка переменных в соответствии с заданной маской.

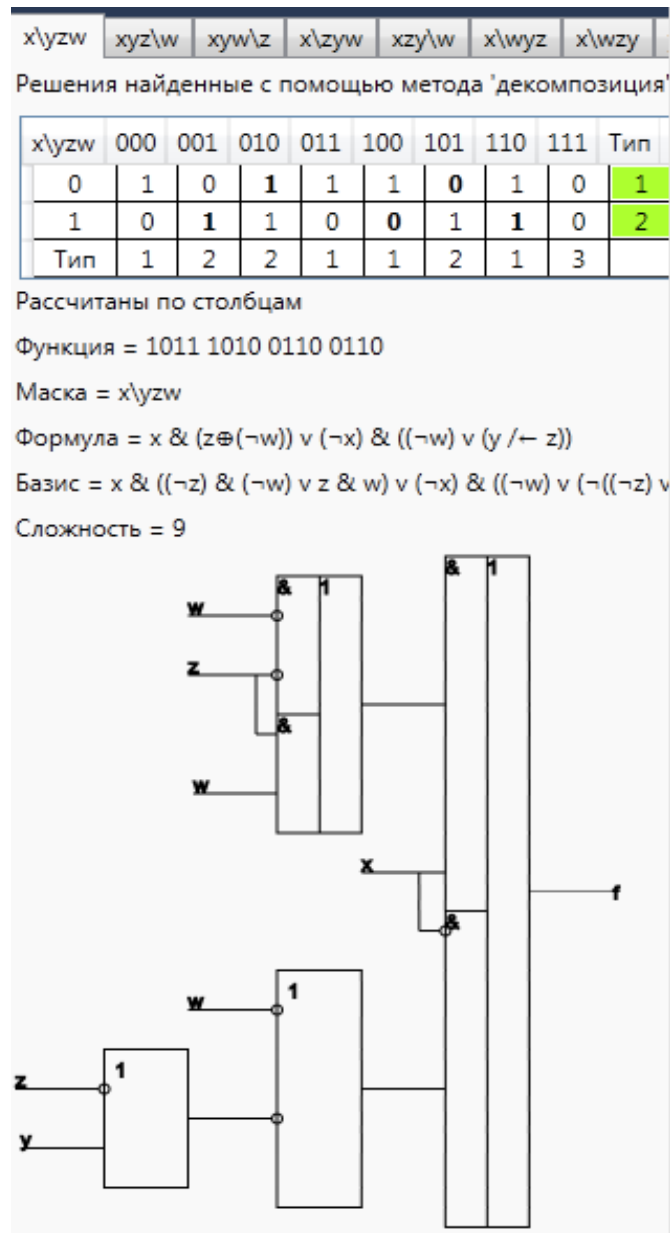


Рисунок 1

Для введенной функции $f(x,y,z,w)$ и заданной маски программа выполняет следующие действия (см. рисунок 1):

- строит таблицу значений этой функции, доопределяя прочерки нулями или единицами так, чтобы в таблице получались строки или столбцы двух типов;
- выполняет разделительную декомпозицию функции $f(x,y,z,w)$;
- находит представление рассматриваемой функции над системой $\{\neg, \&, \vee\}$ и вычисляет сложность полученной формулы;
- по полученной формуле строит логическую схему.

Рассмотренное программное средство помогает без трудоемкого ручного перебора подобрать оптимальное многоуровневое представление булевой функции, получаемое в результате проведения функциональной декомпозиции.

Такая оптимизация оказывает непосредственное влияние на сложность, быстродействие и другие характеристики получаемых логических схем.

Список цитированных источников

1. Тишин, В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.

УДК 681.3.06

СОЗДАНИЕ ИНТЕРФЕЙСА ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ДОКУМЕНТООБОРОТА ТРАНСПОРТНОЙ КОМПАНИИ

Мелещук Д.В.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Кулешова А.М., старший преподаватель*

Сегодня сложно представить какое-либо предприятие, которое не использовало бы в своей работе прогрессивные направления автоматизации. Современная вычислительная техника, программное обеспечение позволяют использовать довольно широкие возможности сбора, хранения и обработки информации. При этом немаловажное значение имеет созданный интерфейс.

Понятие **интерфейс** можно интерпретировать как совокупность возможностей, способов и методов взаимодействия двух систем, устройств или программ для обмена информацией, которая определяется их специфическими характеристиками, характеристиками соединения, сигналов обмена и т.д.

При возникновении необходимости создания автоматизированной формы по обработке командировочной документации для транспортной компании, в первую очередь стояла задача создания удобного и наглядного **интерфейса**, который должен быть простым и максимально универсальным при обработке всех необходимых документов по соответствующей тематике.

Обработка командировочной информации является довольно трудоемкой и требующей большого внимания. На каждый рейс для водителя оформляется командировочное удостоверение и по возвращении предъявляется авансовый отчет о расходах в командировке, карта заправки автомашины. Для подведения итогов по предприятию, для анализа расходов необходимо видеть общую картину, которая должна отображать всю информацию по рейсам, автомобилям, водителям и по компании в целом. На всю эту работу на начальном этапе требуется немало времени – необходимо осуществить ввод справочной информации, которая может быть подготовлена один раз предварительно;

ввод информации, относящейся непосредственно к конкретному рейсу. По окончании рейса водители представляют отчетные данные, которые также необходимо обработать и сохранить эту информацию для отчетов и анализа. Конечно, это именно та работа, которую можно и необходимо автоматизировать.

Чтобы сократить время на обработку документации, исключить возникновение неточностей, обеспечить наглядность результатов, и возникла идея автоматизировать процесс по составлению и оформлению документов по командировкам. При этом важным требованием являлось создание удобного, наглядного и простого в работе интерфейса, который обеспечивал бы реализацию всех поставленных целей. Задача реализована на базе Microsoft Excel+VBA [1].

В рабочей книге Excel созданы информативные листы: «Водители», «Автомобили», «Маршруты». На первых двух листах находится справочная информация, которую можно заполнять как в Excel, так и через соответствующие формы приложения. Лист «Рейсы» представляет собой результирующую информацию табличной формы, где представлены все данные по водителям, рейсам, автомобилям.

Для организации быстрой и удобной работы предусмотрен вызов рабочей формы, которая представляет собой удобный наглядный *интерфейс* и позволяет вводить исходные данные, необходимые для быстрого формирования сопутствующей документации. При вызове формы на главной вкладке пользователем заполняется информация по рейсу (см. рис.1): номер рейса, фамилия водителя, № путевого листа, номер автомобиля (выбирается из справочника), маршрут (выбирается из справочника), сопутствующая информация по рейсу.

Рисунок 1 – Форма добавления информации о рейсе в БД

Помимо вышеуказанной информации, в рабочей книге имеются еще листы, на которых находятся разработанные бланки документов: командировочного удостоверения, авансового отчета и карты заправки. При выезде по заданному маршруту каждый водитель обязан иметь при себе вышеуказанные документы, которые по возвращении представляются в бухгалтерию как отчетная информация по рейсу. По поступившим данным бухгалтер ведет учет по командировочным расходам, по количеству дней нахождения в рейсе, по расходу и учету топлива и AdBlue.

Предусмотрена возможность добавления второго водителя на данный рейс, а также дополнительного маршрута. В дополнительно вызываемом окне вводится информация по автомобилю – показания спидометра, количество начального топлива, количество начального AdBlue. Эти данные необходимы для отчетной информации по возвращении из рейса, а также для ведения общей отчетности по предприятию за отчетные периоды.

Если в процессе работы возникла необходимость пополнения справочников, то это легко можно сделать как посредством возможностей VBA, т.е. через форму, так и в Excel. Программа позволяет осуществлять поиск по общей базе по номеру рейса, либо по номеру путевого листа.

После того как входная информация заполнена и проверена, в нижней части окна представлена возможность выбора необходимых для печати документов, а также записи информации о рейсе в базу данных. На рис. 2 представлена форма, отображающая возможность добавления информации о водителе в базу данных.

Рисунок 2 – Добавление информации о водителе в БД

Помимо ввода информации, получения итоговых форм документов, поиска по номеру рейса либо по номеру путевого листа, в задаче предусмотрена возможность создания документов-дубликатов.

Таким образом, достаточно трудоемкий процесс по заполнению и обработке командировочной документации для транспортной компании успешно автоматизирован. Цель по созданию удобного и простого в работе **интерфейса** достигнута.

Список цитированных источников

1. Гарнаев, А.Ю. Excel, VBA, Internet в экономике и финансах. – СПб.:БВХ-Петербург, 2005. – 816 с.

УДК: 657.1

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ УЧЕТА СПЕЦОДЕЖДЫ

Мельничук О.А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научные руководители: Аверина И.Н., доцент; Гучко И.М., старший преподаватель

Целью настоящей работы является изучение методики учета спецодежды и оптимизация его организации. Объектом исследования послужила законодательная база РБ.

В ст. 230 Трудового кодекса РБ [1] закреплено, что на работах с вредными и (или) опасными условиями труда, а также на работах, связанных с загрязнением или осуще-

ствляемых в неблагоприятных температурных условиях, наниматель обязан обеспечить выдачу бесплатно работникам средств индивидуальной защиты (далее – СИЗ) по нормам и в порядке, определяемым Правительством РБ или уполномоченным им органом.

Спецодежда используется в промышленности, строительстве, транспорте, торговле, здравоохранении и др. Если рассматривать распределение численности занятого населения по видам экономической деятельности в процентах, то мы наблюдаем такую картину: промышленный сектор – 33%, строительный – 10%, сектор транспорта – 8%, торговли – 9%, здравоохранение – 9%, гостинично-ресторанный бизнес – 8% и другие отрасли – 23%. Таким образом, вопрос учета спецодежды был и всегда будет актуален при ведении учета для большого количества предприятий разных видов деятельности и форм собственности.

Спецодежда – это специально разработанная одежда, призванная защищать работника от вредных воздействий внешней среды и обеспечивать необходимые для работы характеристики, такие как, например, для врачей – удобство, гигиеничность, антистатичность, кровоотталкивающие качества, легкость в дезинфекции.

На всех работников и нанимателей независимо от их организационно-правовых форм и видов экономической деятельности распространяется Инструкция о порядке обеспечения работников средствами индивидуальной защиты [2]. В инструкции перечислены классы, на которые подразделяются СИЗ в зависимости от их назначения.

Специальная одежда в зависимости от функционального назначения подразделяется на: средства индивидуальной защиты (например, костюм сварщика); форменную (например, форма проводницы железнодорожного состава); имиджевую или фирменную (например, форма работников кафе «Макдональдс»). В свою очередь, защитная спецодежда классифицируется как средства индивидуальной защиты для различных частей тела: защиты головы (каска, козырёк, кепка); защиты лица (очки, респиратор, противогаз, маска); защиты рук (нарукавники, перчатки); защиты ног (сапоги, галоши, ботинки); защитная одежда для тела (халаты, брюки, куртки, комбинезоны).

При заключении трудового договора по Инструкции [2] наниматель обязан ознакомить работников с порядком обеспечения и нормами выдачи СИЗ, кроме того, наниматель может предусматривать в коллективном или трудовых договорах выдачу работникам СИЗ сверх установленных норм за счет собственных средств предприятия.

Согласно действующей Инструкции [2], работники обеспечиваются СИЗ по типовым нормам в соответствии с наименованиями профессий и должностей, включенных в Общегосударственный классификатор Республики Беларусь «Профессии рабочих и должности служащих» [3]. Классификатор типовых норм (рис. 1) содержит порядковый номер, код и название профессии и перечень средств индивидуальной защиты со специальной маркировкой и сроком носки в месяцах (если вместо срока – дежурные, то это означает, что одежда выдается посменно). В маркировке спецодежды заключается признак ее защитных свойств, например, ЗМи – защита от производственных загрязнений и от истирания, Тн – защита от пониженных температур.

Для целей бухгалтерского учета специальная одежда входит в состав оборотных средств. Оборотными называются средства производства, которые целиком потребляются в каждом цикле производства, полностью переносят свою стоимость на производимую продукцию и целиком возмещаются после каждого производственного цикла. К отдельным предметам в составе оборотных средств относятся: предметы, служащие менее 1 года, независимо от их стоимости; предметы, независимо от срока их службы, стоимость единицы которых не превышает 1 базовой величины; предметы, независимо

от их стоимости и срока службы (такие как: специальная одежда и специальная обувь; форменная одежда, одежда и обувь, предназначенная работникам в соответствии с законодательством).

№ п/п	Код профессии и по ОКРБ 006-96	Наименование профессии, должности	Наименование средств индивидуальной защиты	Классификация (маркировка) средств индивидуальной защиты по защитным свойствам	Срок носки в месяцах
1	2	3	4	5	6
86	13790	Машинист крана (крановщик)	Костюм х/б	ЗМи	12
			Ботинки кожаные	Ми	12
			Галоши диэлектрические	Эн	Дежурные
			Перчатки диэлектрические	Эн	Дежурные
			Рукавицы комбинированные	Ми	До износа
		Зимой на наружных работах дополнительно:			
			костюм для защиты от пониженных температур из х/б ткани	Тн	36
			сапоги кирзовые утепленные	Тн20	24

Рисунок 1 – Классификатор норм бесплатной выдачи СИЗ

Для работника при приёме на работу заполняется личная карточка, в которой он указывает свои размеры: головы, руки, ноги и одежды. После поступления спецодежда выдаётся сотруднику, после чего он пользуется выданной спецодеждой в течение срока носки, а по его истечению сдаёт её на списание и получают взамен новую. Схема оборота спецодежды в производстве представлена на рисунке 2.

Движение спецодежды оформляется бухгалтером рядом сопроводительных документов – приходная накладная при поступлении спецодежды на предприятие, ведомость на выдачу спецодежды работнику с учётом данных личной карточки. В личную карточку заносятся данные о приёме спецодежды работником. После истечения срока носки рабочий сдаёт спецодежду, и бухгалтер оформляет акт о списании.



Рисунок 2 – Схема движения спецодежды на предприятии

Сложностью бухгалтерского учета спецодежды является необходимость в раздельном ведении учета спецодежды, выдаваемой по нормам, и спецодежды, выдаваемой сверх установленных норм, и форменной одежды. Различия в учете нормируемой и ненормируемой спецодежды обусловлены различиями в отнесении затрат на их приобретение и использование. Для упорядочения информации и облегчения ведения бухгалтерского учета спецодежды актуально применение автоматизированных программных средств.

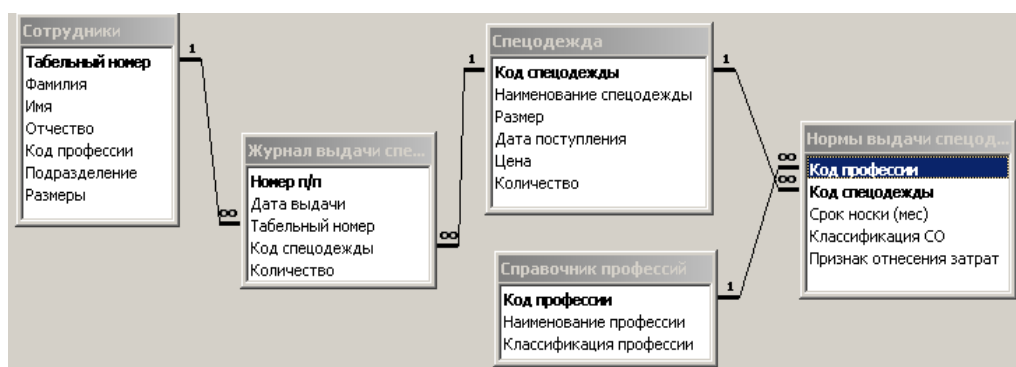


Рисунок 3 – Реляционная модель базы данных для учета спецодежды

В результате проведенного изучения и анализа нормативно-законодательной базы стало возможным разработать реляционную модель (рис. 3), которая может послужить основой для последующей автоматизации бухгалтерского учета спецодежды.

Список цитированных источников

1. Трудовой кодекс Республики Беларусь от 26 июля 1999 г. № 296-З. Принят Палатой представителей 8 июня 1999 года (с изм. и доп. от 30 декабря 2010 г. № 225-З)
2. Инструкция о порядке обеспечения работников средствами индивидуальной защиты: утв. Пост. Министерства труда и социальной защиты Республики Беларусь от 30.12.2008 № 209
3. Профессии рабочих и должности служащих.. Общегосударственный классификатор Республики Беларусь; утв. Пост. Министерства труда и социальной защиты РБ от 22.10.2009 № 125.

УДК 621.311

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА В ЭНЕРГОСИСТЕМЕ

Мороз В.К.¹, Мороз А.В.²

¹Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

²Белорусский теплоэнергетический институт, г. Минск

Годовой расход топлива в энергосистеме на выработку электрической энергии G_1 Может быть определен из выражения:

$$G_1 = \alpha (w_3 \varphi_3 + (w - w_3) \varphi_{12}), \quad (1)$$

где α – коэффициент потерь, учитывающий расход топлива на собственные нужды, включающий потери при передаче мощности и энергии от электростанции до потребителя; w_1, w_2, w_3, w – количество электроэнергии, выработанной в ночное, полупиковое, пиковое время, а также в целом за год; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – относительные приросты расхода топлива в те же часы, соответственно; φ_{12} – осредненный относительный прирост расхода топлива в ночное и полупиковое время,

$$\varphi_{12} = \frac{w_1 \varphi_1 + w_2 \varphi_2}{w_1 + w_2};$$

где $(w - w_3)$ – количество энергии, выработанное в ночное и полупиковое время.

При снижении договорной мощности предприятий в часы максимума нагрузки P_m на величину ΔP_m расход топлива в энергосистеме уменьшится за счет выработки электроэнергии в ночное и полупиковое время, когда генераторы работают с более низкими относительными приростами расхода топлива, и составит:

$$G_{12} = a(w_{13}\varphi_3 + (w - w_{31})\varphi_{12}), \quad (2)$$

где $w_{31} = w_3 - \Delta w_3$ – количество электроэнергии, выработанной в часы максимума нагрузки после снижения договорной мощности на ΔP_m ; $\Delta w_3 = \Delta P_m - t_m$ – количество электроэнергии, на величину которой снижена выработка в часы максимума нагрузки t_m .

Подставляя эти выражения в (2), можно получить

$$G_2 = \alpha(w_3\varphi_3 - \Delta w_3\varphi_3 + (w - w_3 + \Delta w_3)\varphi_{12}). \quad (3)$$

Экономия топлива за счет снижения P_m составит

$$\Delta G_1 = G_1 - G_2 = \alpha \cdot \Delta w_3(\varphi_3 - \varphi_{12}) = \alpha \cdot P_m t_m (\varphi_3 - \varphi_{12}) \quad (4)$$

Поскольку $\varphi_3 > \varphi_{12}$, то $\Delta G_1 > 0$ и $G_1 > G_2$, откуда видно, что действительно будет снижен расход топлива.

При применении для расчетов с потребителями дифференцированного тарифа, когда ставки оплаты зависят от времени суток, предприятия будут заинтересованы в переводе снижений части максимальной мощности ΔP_m в ночное время, поскольку при этом резко уменьшается плата за электроэнергию.

Расход топлива при переводе части нагрузки в ночное время составит:

$$G_3 = \alpha(w_{31}\varphi_3 + w_2\varphi_2 + w_{11}\varphi_1), \quad (5)$$

где $w_{11} = w_1 + \Delta w_3$ – выработка энергии в ночное время. Подставляя это выражение в (5), можно получить:

$$G_3 = \alpha((w_3 - \Delta w_3)\varphi_3 + w_2\varphi_2 + (w_1 + \Delta w_3)\varphi_1). \quad (6)$$

Экономия топлива за счет перевода части нагрузки в ночное время составит:

$$\Delta G = G_1 - G_3 = \alpha \cdot \Delta w_3(\varphi_3 - \varphi_1) = \alpha \cdot P_m t_m (\varphi_3 - \varphi_1). \quad (7)$$

Поскольку $\varphi_3 > \varphi_1$, то $\Delta G > 0$ и $G_1 > G_3$. Если сравнить снижения расходов топлива при двухставочном ΔG_1 и дифференцированном ΔG_2 тарифах, можно получить разность расходов топлива ΔG в двух случаях:

$$\Delta G_2 = \Delta G_2 - \Delta G_1 = \alpha \cdot \Delta w_3(\varphi_{12} - \varphi_1) = \alpha \cdot P_m t_m (\varphi_{12} - \varphi_1). \quad (8)$$

Поскольку $\varphi_{12} > \varphi_1$, то $\Delta G > 0$ и $\Delta G_2 > \Delta G_1$. Это значит, что при дифференцированном тарифе снижение договорной электрической мощности приводит к большей экономии топлива в энергосистеме, чем при обычном двухставочном тарифе.

Список цитированных источников

1. Михайлов, В.В. Тарифы и режимы электропотребления. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 216 с.
2. Мороз, В.К. Особенности перехода с простого двухставочного тарифа на дифференцированный // Известия вузов – Энергетика. – 1992. – №7-8.0.15-18.

УДК 681.3.06

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СЧЁТ-ФАКТУРА ДЛЯ ОТПУСКА КАНЦЕЛЯРСКИХ ТОВАРОВ

Петручик Е.Е., Рамская Л.К.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Счёт-фактура – документ, удостоверяющий фактическую отгрузку товаров, услуг, их стоимость. Организации постоянно сталкиваются с необходимостью его заполнения в случае отгрузки покупателю или заказчику своей продукции. Очевидно, что у торговой организации может быть несколько сотен покупателей, и на каждого из них, необходимо

выписать счёт-фактуру с указанием всех необходимых реквизитов заказчика, даты отгрузки, наименований и цен поставляемой продукции. А также указать информацию о действующих предложениях, акциях, скидках и т.д. Конечно, это весьма трудоемкий процесс. Поэтому целью разработки стала автоматизация бланка счёта-фактуры, позволявшая значительно сократить время, затрачиваемое на его формирование, и свести к минимуму возможность совершения ошибок при заполнении документа.

Задача авторов заключалась в разработке приложения с удобным и простым интерфейсом, позволяющего бухгалтеру автоматизировать процесс ежедневного формирования большого количества однотипных документов, а именно счетов-фактур для предприятия ООО «Паперки», занимающегося реализацией канцелярских товаров в городе Бресте. Вот почему разработка носит прикладной характер, доступными средствами среды Excel+VBA позволяет автоматизировать рутинный процесс расчета и формирования бланка счёта-фактуры конкретного торгового предприятия.

Разработка представляет собой шаблон для оформления новых счетов-фактур (рис. 1). В него внесены неизменные реквизиты компании, текущая дата и время составления документа, количество дней выполнения заказа, учтён тот факт, что учетной политикой фирмы заказ должен быть выполнен в течение двух календарных дней. Для заполнения полей с реквизитами плательщика («адрес», «обслуживающий банк», расчётный счёт, УНП, «Договор-заказ» и др.) разработаны комбинации логических функций, функций поиска и функций обработки ошибок, которые опираются на созданные ранее справочные таблицы. А именно, здесь использованы функции =Если() и =Еошибка(), контролирующие результат поиска функциями =Впр() и =Поискпоз(). Аналогично находятся все остальные реквизиты. Грузополучатель и пункт назначения в данном случае совпадают с плательщиком и его адресом, поэтому заполнение этих ячеек также происходит автоматически.

В табличной части счёта-фактуры наименование и единицы измерения продукции выбираются из созданного списка. Поле «Цена» определится путем использования функций обработки ошибок и функций поиска, как только из списка будет выбран товар. Поле «Сумма заказа» рассчитывается при указании количества заказанного товара, а ставка НДС, по новому законодательству составляющая 20%, появится в одноимённом поле, как только будет выбран из раскрывающегося списка конкретный вид товара. Далее следует расчёт поля «Сумма НДС» и «Сумма с НДС». Все формулы уже занесены в ячейки шаблона и вычисляются автоматически для каждого последующего наименования товара.

По решению руководителя, весь октябрь в фирменном магазине ООО «Паперки» действуют скидки, поэтому итоговая сумма к оплате автоматически скорректирована на вычисляемую, по определённому правилу, величину скидки. Если покупатель приобрел товар на сумму менее одного миллиона рублей, то вместо размера скидки появляется текстовая информация о том, что весь октябрь её можно получить в фирменном магазине «Паперки» (рис. 2). В шаблоне предусмотрен вывод итоговой суммы заказа «прописью» с помощью специальной пользовательской функции =rpropis(), разработанной в редакторе VBA.

Для многократного использования созданный бланк счёта-фактуры был сохранен, как шаблон с установкой защиты листа от случайных изменений. Разрешено изменение лишь тех ячеек, которые имеют непосредственное отношение к конкретному заказу, а именно – «Плательщик», «Наименование товара», «Единицы измерения» и «Количество». Заполнение остальных полей выполняется автоматически, благодаря составлен-

ным специальным образом формулам и пользовательским функциям, которые являются предметом длительной и кропотливой работы авторов.

УНП 200312010 ОКПО 03102300 Поставщик: ООО "Паперки" маг.№4 его адрес: г. Брест, ул. Московская, 332 Р/с 3012000001111 в ф-ле №3 ОАО "Белгазпромбанк" БИК 150501171	Форма № 868 <h3 style="text-align: center;">СЧЕТ-ФАКТУРА</h3> Дата приема заказа от: 17.10.2013 Срок исполнения заказа: 2 (кол-во дней)	=ПРОПИСН("счет-фактура") =СЕГОДНЯ()
Грузоотправитель: ООО "Паперки" маг.№4 Отгрузка производится по адресу: г. Брест, ул. Московская, 332	Шифр документа Распоряжение об оплате или акцепте	=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР(N16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:C12;ПОИСКПОЗ(A18;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:C2;0);0);0;ВПР(N16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:C12;ПОИСКПОЗ(A18;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:C2))) =ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР(N16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:B12;ПОИСКПОЗ(A16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:B2;0);0);0;ВПР(N16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:B12;ПОИСКПОЗ(A16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:B2)))
Плательщик: Гипермаркет "Корона" его адрес: г. Брест ул. Московская, 280 Р/с № 3011200300212 в ф-л №45 ОАО "Москва-Минск" УНП 200032652	Грузополучатель: Гипермаркет "Корона" Пункт назначения: г. Брест ул. Московская, 280	=N16 =N17
Договор-заказ № С-1236854 от 19.06.2009 (дата заключения договора)	Дата отгрузки: 19.10.2013	=ЕСЛИ(ДЕНЬНЕД(ВТ5+ВВ7)=1;ВТ5+ВВ7+1;ВТ5+ВВ7)
Дополнения: 1. При получении товара иметь доверенность и копию платежного поручения. 2. Счет действителен в течение 5 банковских дней. 3. Об изменении суммы оплаты обязательно сообщить поставщику. Уведомление об оплате обязательно для гарантии наличия товара на складе. 4. При непоступлении денег на р/с Поставщика в течении 5 банковских дней, цены могут быть пересмотрены 5. Факт оплаты настоящего счета подтверждает согласие Плательщика с условиями, приведенными выше.		=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР(N16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:G13;ПОИСКПОЗ(Q27;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:G2;0);0);0;ВПР(N16;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:G12;ПОИСКПОЗ(Q27;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!A2:G2;0)))

Рисунок 1 – Счёт-фактура

Наименование	Ед. измер.	Количество	Цена	Сумма	Ставка НДС, %	Сумма НДС	Сумма с НДС
Ручка шариковая	шт	100	2500	250000	20%	50000	300000
Карандаш ТМ Китай	шт	25	1960	49000	20%	9800	58800
Тетрадь обшая 96л	шт	21	8780	184380	20%	36876	221256
Бумага "Снежинка"	пач	5	59410	297050	20%	59410	356460
Тетрадь 48л.	упак	10	5120	51200	20%	10240	61440
Маркер для DVD	шт	2	8200	16400	20%	3280	19680
Ластик Дарвиш	шт	5	1750	8750	20%	1750	10500
ИТОГО:				856780		171356	997292

Вам предоставлена скидка 3%

=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(ВПР(A41;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!\$A\$17:\$B\$27;ПОИСКПОЗ(\$AQ\$40;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!\$A\$17:\$B\$17);0);0;ВПР(A41;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!\$A\$17:\$B\$27;ПОИСКПОЗ(\$AQ\$40;'СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ'!\$A\$17:\$B\$17);0))

=ЕСЛИ(СУММ(СК41:СК49)>10000000;СУММ(СК41:СК49)*0.9;ЕСЛИ(СУММ(СК41:СК49)>5000000;СУММ(СК41:СК49)*0.95;ЕСЛИ(СУММ(СК41:СК49)>1000000;СУММ(СК41:СК49)*0.97;СУММ(СК41:СК49)*1)))

=ЕСЛИ(СК50=0;0;ЕСЛИ(СУММ(СК41:СК49)>10000000;"Вам предоставлена скидка 10%";ЕСЛИ(СУММ(СК41:СК49)>5000000;"Вам предоставлена скидка 5%";ЕСЛИ(СУММ(СК41:СК49)>1000000;"Вам предоставлена скидка 3%";"Весь октябрь у нас действуют скидки!!!! Спешите за покупками!!!!!!!!!!!!"))

Рисунок 2 – Табличная часть счёт-фактуры

В результате, мы получаем готовый к использованию шаблон счёт-фактуры. Для его создания затрачено немало усилий, но теперь заполнение документа для каждого покупателя займет не более двух минут. Отправляем счёт-фактуру на печать, и она уже в руках покупателя, который доволен скоростью и качеством обслуживания фирмы «Паперки».

Разработка внедрена и успешно используется на торговом предприятии ООО «Паперки» г. Бреста, о чём свидетельствует «Акт внедрения в производственный процесс». Экономический эффект данной работы состоит в том, что разработанный шаблон счёт-фактуры позволил ускорить процесс формирования документа, сэкономить личное время покупателей и свести к минимуму возможность совершения ошибки при вводе реквизитов клиента.

Список цитированных источников

1. Гарнаев, А.Ю. Excel, VBA, Internet в экономике и финансах / А.Ю. Гарнаев – СПб.:БВХ-Петербург, 2005. – 816 с.

УДК: 657:004

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ БУХГАЛТЕРСКОГО УЧЕТА В РЕСПУБЛИКЕ ТУРКМЕНИСТАН

Сапаров Д.С.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Аверина И.Н., доцент*

Автоматизация бухгалтерского учета – это комплекс программных средств, который позволяет вести непрерывное фиксирование и анализ данных для получения количественной экономической информации о деятельности предпринимательских и иных организаций. Внедрение информационных систем и технологий в работу бухгалтерии позволяет экономить время и силы за счет автоматизации выполнения однообразных операций, избегать арифметических ошибок в учете и отчетности, уделять больше внимания аналитичности учета, а также своевременно оценивать текущее финансовое положение предприятия и его перспективы. Таким образом, автоматизация бухгалтерского учета в современных условиях является основой эффективного управления предприятия.

Объектом проведенного исследования послужил рынок специализированного программного обеспечения для ведения бухгалтерского учета в Республике Туркменистан.

С 2010 года принят Закон Республики Туркменистан «О бухгалтерском учёте и финансовой отчётности», который определяет основу системы бухгалтерского учёта и финансовой отчётности в Республике Туркменистан, устанавливает общие правила ведения бухгалтерского учёта, составления финансовой отчётности в соответствии с международными стандартами [1]. Основные положения Закона схожи с нормами Закона Республики Беларусь от 18.10.1994 г. № 3321-XII «О бухгалтерском учете и отчетности».

Начало комплексной автоматизации бухгалтерского учета в Республике Туркменистан в полном соответствии с налоговым законодательством положили разработки компании Ochag Software Turkmenistan, созданной в 1991 году [4]. Система «Автобухгалтер», созданная данной компанией, автоматизирует учет для разнообразных видов деятельности: производство, строительство, торговля (оптовая и розничная), сфера услуг, сфера общественного питания. В системе «Автобухгалтер» автоматизированы основные уча-

стки бухгалтерского учета: расчет зарплаты; учет основных средств и нематериальных активов; учет материалов и инвентаря; учет операций по расчетному счету и кассе; учет валютных операций; формирование единого баланса и всех приложений к нему для налоговых служб на русском и туркменском языках.

Также разработкой программного обеспечения для автоматизации бухгалтерского учета в Республике Туркменистан с 1993 года занимается компания «Phoenix Software» [6]. Программные продукты этой компании, такие как кадры, зарплата, основные средства, учет материалов, бухгалтерия, полностью соответствуют действующему законодательству республики и давно пользуются успехом у пользователей-бухгалтеров Туркменистана. Данное программное обеспечение имеет туркменский интерфейс с возможностью параллельной работы на русском и английском языках (драйвер туркменского языка устанавливается бесплатно). Все программные продукты защищены Законодательством РТ и имеют сертификаты патентного Управления Министерства экономики и финансов Туркменистана. Компания имеет широкую дилерскую сеть в Туркменистане для распространения ПО. Большое внимание компании уделяется тщательности разработки, тестированию и сопровождению программных продуктов. Компания помимо разработки специализированного ПО выполняет его последующее сопровождение, которое включает в себя обучение, консультации и полную поддержку программных продуктов.

В настоящее время отмечается внедрение на рынок программного обеспечения Республики Туркменистан зарубежных разработчиков. Так, одна из белорусских компаний по разработке программных технологий и комплексных прикладных программных продуктов для автоматизации деятельности финансовых и других предприятий «СОФТКЛУБ» подписала контракты с тремя банками в Республике Туркменистан (Bank Turkmenbashi, Bank Garagum, State Development Bank of Turkmenistan) на внедрение интегрированной автоматизированной банковской системы SC-BANK NT [7].

Объем продаж ПО в Республике Беларуси в 2012 г., %



Рисунок 1 – Продажи ПО в РБ

Объем продаж ПО в России в 2012 г., %

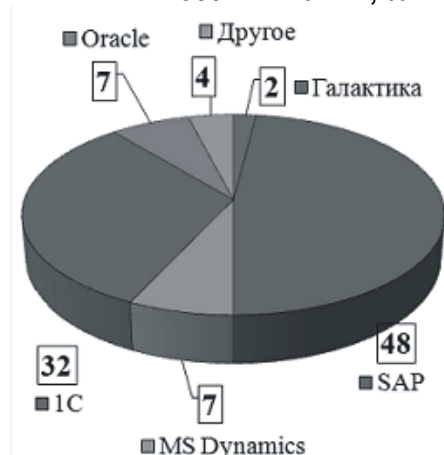


Рисунок 2 – Продажи ПО в РФ

Компьютерные программы бухгалтерского назначения давно известной российской компании «1С», созданной в 1991 году, используются во всех регионах России, странах СНГ и Балтии. На территории Туркменистана последнюю версию «1С: Предприятие 8» внедряют 3 компании: ИНТЕК, группа компаний «Чепарский и Эльгуш» и компания «Туркмен-инновация».

Летом 2012 года в Туркменистане в составе делегации Парка высоких технологий побывали эксперты Центрального офиса корпорации «Галактика» в Республике Беларусь.

Участники с туркменской стороны выразили представителям корпорации «Галактика» свой интерес к возможному продолжению сотрудничества. Парк высоких технологий Беларуси представил свои разработки по созданию заказного программного обеспечения и автоматизации систем в различных сферах экономики и государственного управления Туркменистана. В состав делегации вошли представители администрации и шести компаний-резидентов Парка высоких технологий РБ.

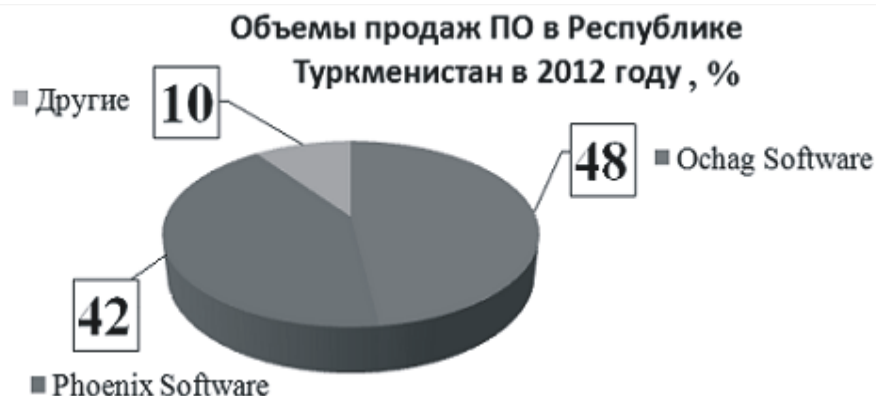


Рисунок 3 – ПО в Республике Туркменистан

В Республике Беларусь компьютерные методы обработки давно и прочно вошли в технологию бухгалтерского учета, и сейчас большую популярность имеют такие программные продукты, как «1С», «Анжелика (Гедымин)», «Галактика», «БЭСТ».

Проведя сравнительный анализ продаж программного обеспечения для автоматизации бухгалтерского учета, было установлено, что наибольший объем продаж в Республике Беларусь занимает «1С» и «Анжелика (Гедымин)» (рис. 1), в России – «SAP» и «1С» (рис. 2), а в Туркменистане – «Ochag Software» и «Phoenix Software» (рис. 3).

В ходе анализа развития рынка программного обеспечения в Республике Туркменистан выявлены следующие направления и перспективы развития средств автоматизации бухгалтерского учета в стране:

1. Подписано постановление «О совершенствовании бухгалтерского учета и финансовой отчетности», в соответствии с которым в Туркменистане все предприятия осуществляют поэтапный переход на новую систему бухгалтерского учета и аудита, соответствующую принципам международных стандартов. Полный переход на эту систему запланирован к 1 января 2014 года.

2. Существуют и развиваются отечественные компании по разработке программного обеспечения, выполненного в соответствии с законодательством Республики Туркменистан.

3. Туркменские предприятия по разработке программного обеспечения для автоматизации бухгалтерского учета сотрудничают с другими странами.

Автоматизация бухгалтерского учета в Республике Туркменистан развивается стремительно. Причем преимущество отдается созданию программных продуктов для комплексной автоматизации деятельности предприятия в целом.

Список цитированных источников

1. О бухгалтерском учете и финансовой отчетности [Текст]: Закон Республики Туркменистан от 27 ноября 2010 года №155-IV.
2. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.ochag-tm.net> – Дата доступа: 11.04.2013 г.
3. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.phoenix-tm.ru> – Дата доступа: 11.04.2013 г.

УДК 004.627

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ RLE**Семионов А.А.***Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель
Научный руководитель: Мурашко И.А., д.т.н., доцент*

Бурный рост объемов информации, циркулирующих в компьютерных системах, приводит к возрастанию времени отклика системы. Сжатие данных снижает требования к компьютерным системам и каналам передачи данных. Поэтому актуальным является разработка новых или повышение эффективности существующих алгоритмов сжатия данных.

В алгоритме RLE достаточно несложно разобраться, если посвятить этому некоторое время. Суть метода заключается в кодировании повторов. Это значит, что последовательность одинаковых элементов записывается в виде пары количество×значение.

Например, строка вида «ТТТКGGGG» будет преобразована в «3×Т, К, 5×G». Это и есть суть метода.

Пример реализации:

Допустим, есть массив целочисленных чисел от 0 до 255:

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, 9, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 70, 70, 70, 0, 4, 4, 4, 4, 255, 255, 255, 255, 0\}$$

Переведем его в HEX форму:

$$\{00, 00, 00, 00, 00, 00, 07, 09, 03, 04, 04, 04, 04, 04, 04, 04, 46, 46, 46, 46, 00, 04, 04, 04, 04, FF, FF, FF, FF, 00\}$$

Нашей целью является сжатие набора данных. Для этого необходимо выявить закономерность: очень часто попадаются последовательности из одинаковых элементов. Алгоритм RLE будет как нельзя кстати для сжатия такого набора.

Зашифруем данный набор с помощью уже описанного RLE алгоритма:

$$6 \times 0, 7, 9, 3, 7 \times 4, 4 \times 70, 0, 4 \times 4, 4 \times 255, 0$$

Чтобы представить результат в понятном для компьютера виде, нужно как-то отделять одиночные байты от кодируемой цепочки. Поскольку весь диапазон значений байта используется данными, то просто так выделить какие-либо диапазоны значений под эти цели не удастся.

Существует довольно простой способ разделять одиночные байты от кодируемой цепочки. Для этого надо указывать количество не только для повторяемых, но и последующих далее одиночных элементов. Тогда можно будет заранее узнать, где какие данные.

Давайте выделим один бит в служебных байтах под тип последовательности: 0 – одиночные элементы, 1 – одинаковые. Возьмём для этого старший бит байта.

Оставшиеся семь бит будут использоваться для хранения длины последовательности. То есть максимальная длина кодируемой последовательности будет 127 байт. Можно, конечно, выделить для служебной информации два байта. Но настолько длинные последовательности в нашем примере не встречаются.

Получается, в выходной поток вначале пишется длина последовательности, затем одно повторяемое значение или цепочка неповторяемых элементов указанной длины.

Сделаем наш алгоритм более эффективным. Не тяжело заметить, что при таком алгоритме есть несколько неиспользуемых значений. Не может быть последовательностей

с нулевой длиной. Поэтому максимальная длина может быть увеличена до 128 байт, отнимая от длины единицу при кодировании и прибавляя при декодировании. Таким образом, можно кодировать длины от 1 до 128 вместо длин от 0 до 127.

Можно также заметить, что не бывает последовательностей единичной длины. Поэтому от значения длины таких последовательностей при кодировании можно отнимать единицу, увеличив тем самым их максимальную длину до 129. То есть цепочки одинаковых элементов могут иметь длину от 2 до 129.

Теперь можно закодировать данные снова, но уже в компьютерном виде. Служебные байты будут записываться в виде $[T|L]$, где T – тип последовательности, а L – длина. Учитывается, что длины записываются в изменённом виде: при $T=0$ отнимается от L единица, при $T=1$ – двойка.

$[1|4], 0, [0|2], 7, 9, 3, [1|5], 4, [1|2], 70, [0|0], 0, [1|2], 4, [1|2], 255, [0|0], 0$

Последним шагом надо сохранить полученный результат как массив байт. Например, пара $[1|4]$, упакованная в байт, будет выглядеть следующим образом:

$[1|4] = 10000100 = 0x84$

Конечный вариант кодирования:

84 00 02 07 09 03 85 94 82 70 00 00 82 04 82 FF 00 00

Таким образом, при помощи алгоритма сжатия RLE, входной массив, состоящий из 30 байт, поместился в 18-ти байтах.

Эффективность алгоритма зависит от способа его реализации. Для разных данных можно разрабатывать разные варианты кодирования. Например, при кодировании изображений можно сделать цепочки переменной длины: выделять один бит под индикацию длинной цепочки, и если он выставлен в единицу, то хранить длину и в следующей байте тоже. Так длина коротких цепочек уменьшается до 65, но зато длина длинных расширяется до 16385 элементов.

УДК 004.413:687.1/.4

АВТОМАТИЗАЦИЯ УЧЕТА ПОСТУПЛЕНИЯ ГОТОВОЙ ПРОДУКЦИИ НА СКЛАД НА ПРИМЕРЕ ШВЕЙНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Стельмашук Н.П., Гучко И.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Цель данной работы – создание прикладной разработки для автоматизации отдельного участка работы на складе готовой продукции (обработка сопроводительных листов) частного швейного предприятия, учет по которому велся «вручную», и данные учета поступали в бухгалтерию на бумажных носителях.

Склад готовой продукции является важнейшим логистическим звеном, органически связывающим производство и сбыт продукции предприятия. В условиях производства продукции с номенклатурой, обычно составляющей более сотни товарных позиций и цикличности технологических процессов, обеспечение на складах быстроты оформления операций позволяет снизить трудозатраты и ускорить их выполнение. Более того, при количестве обрабатываемых документов до тысячи в год, а также когда руководство предприятия считает, что данный рабочий процесс еще не нуждается в более сложной автоматизации, но, тем не менее, уже занимает значительную часть рабочего времени,

было целесообразно создание автоматизированного Excel-приложения с простым и удобным интерфейсом, с использованием встроенных в табличный процессор средств, функций, элементов управления, а также пользовательских форм и программных модулей, написанных на языке программирования VBA [1].

Исходя из поставленной задачи, рабочая книга созданного приложения содержит следующие рабочие листы: **СопрЛист** с шаблоном бланка сопроводительного листа (рис. 1), **ЖурналРег** с журналом регистрации сопроводительных листов (рис. 2), **Прайс** с прейскурантом выпускаемой продукции (рис. 2), **Штат(швеи)** со списком работниц-швей цеха по пошиву одежды (рис. 2), **БланкиСЛ** с чистыми бланками сопроводительных листов, а также отдельные рабочие листы для контроля выполнения нормы выработки для каждой отдельной швеи (рис. 2).

На рабочем листе **СопрЛист** находится шаблон для ввода данных из сопроводительного листа со следующими элементами автоматизации: заполнение данными только определенных ячеек листа (остальные ячейки шаблона защищены от изменений); выбор наименования модели из списка данных, находящихся на листе **Прайс**, с последующим автоматическим заполнением её краткого описания; аналогично выбор швеи из списка данных, находящихся на листе **Штат(швеи)**, с последующим автоматическим заполнением её табельного номера и разряда; проверка своевременности выполнения нормы и формирования соответствующего замечания. Кроме того, на указанном рабочем листе добавлены элементы управления – кнопки для работы в созданном приложении.

Кнопке **Разноска** соответствует подпрограмма, в результате выполнения которой, данные из сопроводительного листа переносятся в соответствующие позиции первой пустой строки табличной базы данных «Журнал регистрации сопроводительных листов» на рабочем листе **ЖурналРег**, а также в соответствующие поля первой пустой строки табличной базы данных «Выполнение нормы» на рабочий лист, номер которого соответствует табельному номеру швеи, чей сопроводительный лист находится в данный момент в обработке. Кнопке **Очистка листа** соответствует подпрограмма для очистки данных заполняемых ячеек. Кнопка **Печать текущего листа** вызывает макрос печати текущего заполненного сопроводительного листа. Кнопка **Печать пустых бланков** вызывает макрос печати чистых бланков сопроводительных листов из рабочего листа **БланкиСЛ** для выдачи их в отдел производства.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with a form for an accompanying sheet. The form is located in the range B2:F16. It contains the following fields and labels:

- Row 2: "Сопроводительный лист №" with a text input field.
- Row 5: "Наименование модели" with a text input field, "кол-во" with a text input field, and "шт." with a text input field.
- Row 6: "дата" with a text input field.
- Row 8: "Краткое описание" with a text input field.
- Row 10: "Швея" with a text input field and "Разряд:" with a text input field.
- Row 11: "Таб. №:" with a text input field.
- Row 12: "Выдача:" with a text input field and "Возврат:" with a text input field.
- Row 13: "(заполняет начальник склада)" with a text input field and "(заполняет начальник производства)" with a text input field.
- Row 15: "Замечания:" with a text input field.

On the right side of the spreadsheet, there are four buttons:

- "Разноска" (Row 3, Column G)
- "Очистка листа" (Row 6, Column G)
- "Печать текущего листа" (Row 10, Column G)
- "Печать пустых бланков" (Row 14, Column G)

Рисунок 1 – Бланк сопроводительного листа

Рабочий лист **ЖурналРег** содержит журнал регистрации сопроводительных листов, данные которого автоматически заполняются из шаблона с помощью процедуры «Разноска», закрепленной за кнопкой **Разноска** на рабочем листе **СопрЛист**.

Журнал регистрации сопроводительных листов

№ сопр. листа	Дата	Наименование модели	Кол-во	ФИО швеи	Замечание
1	01.03.2012	Модель Ж 1	120	Алексейчук В.А.	модель задержана на производстве
3	02.03.2012	Модель ЮП 1	200	Бонцевич А.В.	повышающий коэффициент
2	02.03.2012				
4	03.03.2012				
5	04.03.2012				

Прайс

№ п/п	Наименование модели	Краткое описание	Отпускная цена без НДС (бел. руб.)	Цена с НДС (20%)
1	Модель ПП 1	Платье на подкладе	521 876	626 250
2	Модель Ж 1	Жакет без подклада	401 184	481 420
3	Модель ЮП 1	Юбка на		

Штат(швеи)

Таб. №	Ф.И.О.	Разряд	Примечания	Норма, шт.
1	Алексейчук В.А.	4	0,5 ставки	250
2	Бонцевич А.В.	3	0,25 ставки	125
3	Вашкевич М.Е.	5	надомный труд	100
4	Гаманович М.А.	5	0,75 ставки	370
5	Зорько Н.В.	4	1 ставка	500

Рисунок 2 – Рабочие листы приложения

Рабочий лист **Прайс** содержит табличную базу данных производимой продукции «Прейскурант женской продукции» и элемент управления – кнопка **Добавить позицию**, с помощью которой открывается пользовательская форма для добавления новой модели в прейскурант (рис. 3). Новая позиция помещается в последнюю пустую строку базы данных, и ей присваивается следующий порядковый номер.

На рабочем листе **Штат(швеи)** находится таблица-справочник сотрудниц швейного цеха и кнопка **Добавить сотрудника**, с помощью которой открывается пользовательская форма (рис. 4) для добавления новой швеи в штат и записи в последнюю пустую строку базы данных с присвоением следующего табельного номера. Кроме того, автоматически создается отдельный рабочий лист для учета нормы выработки для новой сотрудницы, и ему присваивается имя, соответствующее табельному номеру добавленной швеи.

Рисунок 3 – Форма для добавления нового вида продукции

Рисунок 4 – Форма для добавления нового сотрудника

Рабочие листы с номерами «1», «2», «3», «4» и «5» содержат данные по учету контроля нормы выработки по каждой швее в отдельности, причем имя рабочего листа соответствует табельному номеру швеи, данные по которой отражаются на нём.

В результате создания приложения, небольшой, но достаточно важный участок работы автоматизирован доступными средствами табличного процессора Excel и среды программирования VBA.

Данная разработка внедрена и успешно используется на частном швейном предприятии, о чём свидетельствует акт внедрения в производственный процесс.

Экономический эффект данной работы состоит в том, что разработанный шаблон документа позволил ускорить процесс обработки данных сопроводительных листов, тем самым сэкономив время работника склада на выполнение должностных обязанностей, освобождая его от «ручного» бумажного труда. Заполнение журнала регистрации сопроводительных листов теперь производится с минимальными потерями рабочего времени и минимальным количеством возможных ошибок, вводимых при его заполнении.

Список цитированных источников

1. Кузьменко, В.Г. VBA 2003. – М.: ООО «Бином-пресс», 2004. – 432 с.

УДК 004.9

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМА ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ ОФСЕТНОЙ ТИПОГРАФИИ

Степаненко И.С.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно

Научный руководитель: Семенчук Н.В., к.ф.-м.н., доцент

Рассматривается задача планирования загрузки производственного оборудования для офсетной типографии. На текущий момент на предприятии имеется система сбора учетных производственных данных (далее – учетная система), реализованная на платформе 1С: Предприятие [1,2]. Механизм оперативно-календарного планирования создается с целью обеспечения слаженного и ритмичного хода всех производственных процессов на предприятии, используя для этого информацию из учетной базы данных. Создание такого механизма средствами 1С: Предприятие не представляется возможным, из-за специфики платформы, непредназначенной для работы с большими объемами часто меняющихся данных, и имеющей ограниченные графические возможности. В связи с этим была разработана следующая схема (рис. 1) реализации механизма планирования:

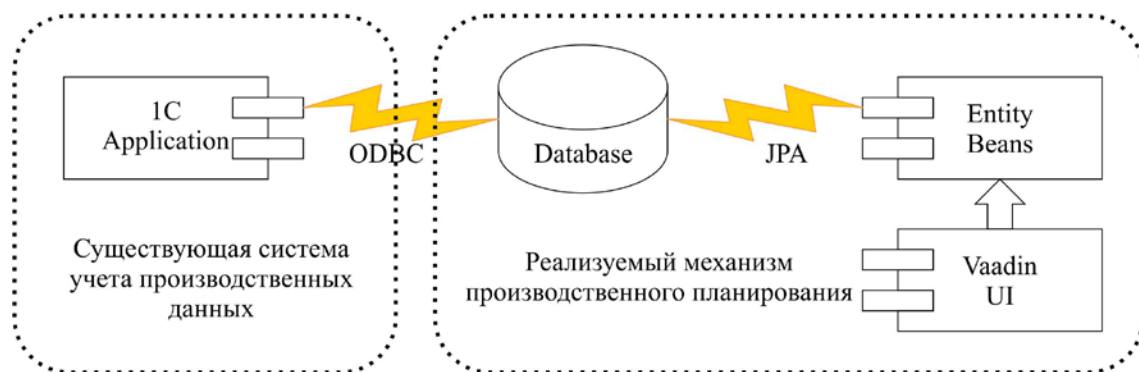


Рисунок 1 – Схема реализации механизма планирования

Серверная часть модуля оперативно-календарного реализована на языке JAVA и спецификации EJB (Enterprise JavaBean) – спецификация технологии написания и поддержки серверных компонентов, содержащих бизнес-логику. Для связи с базой данных используется спецификация JPA (JAVA Persistence API). Для клиентской части системы используется веб-фреймворк Vaadin, предлагающий сервер-ориентированную архитектуру, базирующуюся на Java Enterprise Edition, а также используемую на стороне браузера технологию AJAX, позволяющей осуществлять интерактивное взаимодействие с пользователем.

Основная рабочая область разработанного модуля планирования представляет собой таблицу, строками которой является время, а столбцами – дата. В случаях, когда

был выбран большой промежуток времени, основная рабочая область принимает вид календарной сетки. Слева от основной рабочей области выбирается отображаемый промежуток времени и отображаемые группы работ. Ниже отображаются заказы, которые были отправлены в производство и требующие планирования. При передаче заказа в производство система автоматически анализирует текущую загруженность оборудования и, исходя из полученных данных, размещает все работы, из которых состоит заказ, таким образом, чтобы суммированное время их выполнения было минимальным. Пользователи имеют возможность интерактивно редактировать положение работ в графике, их продолжительность, ставить отметку о выполнении, удалять работы в случае необходимости и т.д. Имеется возможность печати отчетов, таких как: план работ на определенный период времени для определенных операций, отчет по незавершенному производству [3] (рисунок 2).

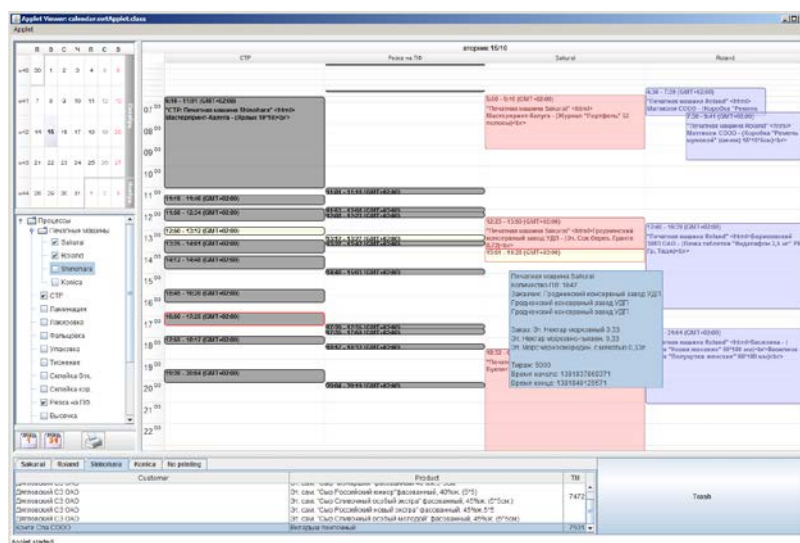


Рисунок 2 – Основная рабочая область в разработанном модуле планирования

Данные для модуля оперативно-календарного планирования хранятся во внешней базе данных PostgreSQL. Необходимая для этого информация автоматически поступает туда из учетной базы производственных данных 1С: Предприятие с помощью соответствующего интерфейса ODBC.

В учетной системе информация, необходимая для производства, содержится в документах: «Наряд на производство» и «Технологическая карта». Так как отношение между этими документами представляет собой отношение «многие ко многим», то во внешней базе данных эта связь отражена 3 таблицами «orderforproduction», «orderforproductionto-technologicalmap» и «technologicalmap». Каждая «Технологическая карта» содержит в себе список выполняемых работ. Для хранения этого списка во внешней базе данных используются 2 таблицы «jobspending» и «jobsplanning» – для хранения запланированных работ и работ, ожидающих попадания в производство. Для хранения дополнительной информации о производимой продукции в системе сбора производственной информации имеются справочники «Контрагенты» и «Номенклатура», которые во внешней базе представлены таблицами «customer» и «product» соответственно.

Все элементы внешней базы данных, которые имеют однозначное представление в учетной системе, хранят в себе также значение уникального ключа, под которыми они находятся в 1С: Предприятие. С помощью этих ключей и осуществляется поиск и редактирование существующих элементов. Таким образом, схема связей между таблицами во внешней базе данных имеет вид (рисунок 3).

Таблица 1 – Сопоставление действий пользователей в учетной системе и соответствующих им изменений во внешней базе данных

Действие пользователя в 1С: Предприятие	Изменения во внешней базе данных
<ul style="list-style-type: none"> • Запись элемента справочника «Контрагенты» 	<ul style="list-style-type: none"> • Создание или редактирование соответствующей записи в таблице «customer»
<ul style="list-style-type: none"> • Запись элемента справочника «Номенклатура» 	<ul style="list-style-type: none"> • Создание или редактирование соответствующей записи в таблице «product»
<ul style="list-style-type: none"> • Проведение документа «Наряд на производство» 	<ul style="list-style-type: none"> • Создание или редактирование соответствующей записи в таблице «orderforproduction»
<ul style="list-style-type: none"> • Проведение документа «Технологическая карта» 	<ul style="list-style-type: none"> • Создание или редактирование соответствующей записи в таблице «technologicalmap» • Создание или редактирование соответствующих записей в таблице «orderforproductiontotechnologicalmap» • Создание или редактирование соответствующих записей в таблице «jobspending» или «jobsplanning»

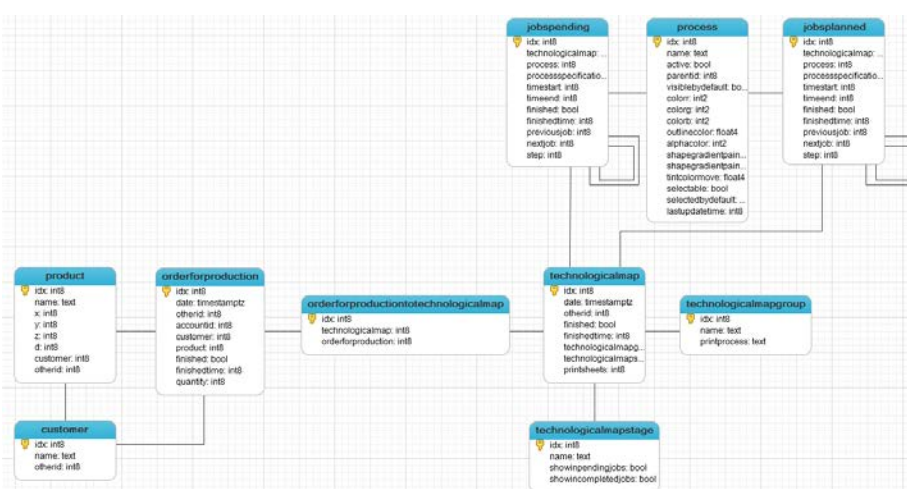


Рисунок 3 – Схема связей таблиц во внешней базе данных

В процессе работы механизма планирования возникает необходимость не только получения данных из учетной системы, но и передача информации обратно. В качестве примера такой информации могут выступать данные о завершении или отмене производства и т.д. Для этого в учетной системе имеется глобальная процедура «Обновить производственные данные», которая считывает флаги изменения данных из таких таблиц, как «orderforproduction» и «technologicalmap», и в случае, если какие-либо данные были изменены, эти изменения переносятся из внешней базы данных в 1С: Предприятие. Стоит отметить, что постоянные проверки на предмет измененных данных сильно увеличат нагрузку на внешнюю базу данных, и это замедлит работу пользователей 1С: Предприятие, поэтому запрос происходит раз в 10 минут, в автоматическом режиме, или чаще, если пользователь сам инициирует этот запрос.

Список цитированных источников

1. Степаненко, И.С. Технология автоматизированного сбора производственной учётной информации для офсетной типографии / И.С. Степаненко // Наука 2012: сборник научных статей ГрГУ им. Я.Купалы, Гродно, 2012. – С. 113-116.
2. Степаненко, И.С. Комплексная автоматизация офсетной типографии на платформе 1С: Предприятие / Сборник лауреатов республиканского конкурса научных работ студентов. НИРС-2012. – Минск, 2013. – С. 211-212.
3. Степаненко, И.С. Об одном из решений задачи производственного планирования для офсетной типографии / И.С. Степаненко // Наука 2013: сборник науч. статей ГрГУ им. Я.Купалы. – Гродно, 2013.

УДК 519.86+519.246.8

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОАТТРАКТОРА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ
ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ****Степанюк Н.Н.***Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Головки В.А., д.т.н., профессор*

В настоящее время для изучения поведения сложных систем широко используется подход, основанный на анализе сигналов, произведенных этой системой. Данный способ актуален в тех случаях, когда математически описать изучаемый процесс весьма проблематично, но имеется некоторая характерная наблюдаемая величина. Поэтому анализ систем часто реализуется посредством обработки регистрируемых сигналов. Например, в сейсмологии в качестве такого сигнала используется запись колебаний земной коры, в метеорологии – данные метеонаблюдений и т.п. Таким образом, под динамической системой понимается система произвольной природы с конечным числом факторов, влияющих на динамику. Раздел, изучающий теорию динамических систем, называется анализом временных рядов.

Пусть имеется некоторая динамическая система, но мы можем наблюдать (фиксировать) только одну из фазовых координат этой системы. Запишем равноотстоящие по времени измерения этой координаты в виде временного ряда: $x(1), x(2), \dots, x(N)$, где N – количество измерений.

При анализе временных рядов главной задачей является реконструкция породившей этот ряд динамической системы. Задача решается посредством нахождения размерности вложения d_e (от embedding) – минимального числа динамических переменных, однозначно описывающих поведение исследуемой системы, которое также называют лаговым пространством.

Приемлемое описание поведения динамической системы можно получить, используя только одну координату в фазовом пространстве, если взять вместо реальных переменных k -мерные векторы задержек, составленные из ряда в последовательные моменты времени: $x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (d_e - 1) \cdot \tau)$.

При выполнении условия $k \geq 2 d_e + 1$ можно реконструировать фазовое пространство (пространство состояний) системы таким образом, что оно будет сохранять важнейшие топологические свойства. При условии стационарности временного ряда на базе этой реконструкции (построив псевдоаттрактор) строится прогноз его дальнейшей динамики.

Таким образом, анализ временных рядов заключается в определении параметров вложения динамической системы, а именно в выборе подходящей временной задержки сигнала τ и размерности d_e пространства вложения для псевдофазовой реконструкции.

Для определения временной задержки τ может использоваться метод взаимной информации. Данный метод реализован в пакете TISEAN [1] в программе mutual.exe из данного пакета. Входными значениями является файл, хранящий временной ряд. Результатом выполнения программы является файл, в котором хранится ряд значений. Первый минимум данного ряда и является задержкой τ . Фрагмент файла, полученного после обработки временного ряда, показан на рис. 1, где видно, что шестое значение является первым минимумом, следовательно, $\tau = 6$.

Для нахождения размера пространства вложения используется программа из того же пакета false_nearest.exe. Она вычисляет относительное количество ложных ближайших соседей при восстановлении аттрактора в лаговом пространстве. Результаты расчёта выводятся в виде четырёх столбцов: размерность лагового пространства; относитель-

ное количество ложных ближайших соседей; средний размер окрестности; среднее значение квадрата размера окрестности. Первое в ряду значение, равное нулю, и является размером пространства вложения. По рис. 2 видно, что первый ноль относится ко второму значению, следовательно, $d_e = 2$.

#shannon= 2.443705e+00	6 1.223172e+00	13 1.056592e+00
0 2.443705e+00	7 1.291381e+00	14 1.027694e+00
1 1.618386e+00	8 1.158991e+00	15 1.047767e+00
2 1.542455e+00	9 1.172538e+00	16 9.734117e-01
3 1.418093e+00	10 1.099944e+00	17 1.071234e+00
4 1.354451e+00	11 1.070944e+00	18 1.006761e+00
5 1.288016e+00	12 1.048078e+00	19 1.051574e+00
		20 1.077075e+00

Рисунок 3 – Результат обработки временного ряда с помощью программы *mutual.exe*

1 1.000000e+00 2.566184e-03 8.205155e-06	1 1.000000e+00 2.566184e-03 8.205155e-06
2 0.000000e+00 5.521890e-03 3.674031e-05	2 0.000000e+00 5.521890e-03 3.674031e-05
3 0.000000e+00 5.770457e-03 3.894124e-05	3 0.000000e+00 5.770457e-03 3.894124e-05
4 0.000000e+00 6.007688e-03 4.114138e-05	4 0.000000e+00 6.007688e-03 4.114138e-05
5 0.000000e+00 6.232683e-03 4.332706e-05	5 0.000000e+00 6.232683e-03 4.332706e-05

Рисунок 2 – Результат обработки временного ряда с помощью программы *false_nearest.exe*

При визуализации временного ряда в фазовом пространстве $d_e = 2$ с задержкой $\tau = 6$ получен результат, показанный на рис. 3.

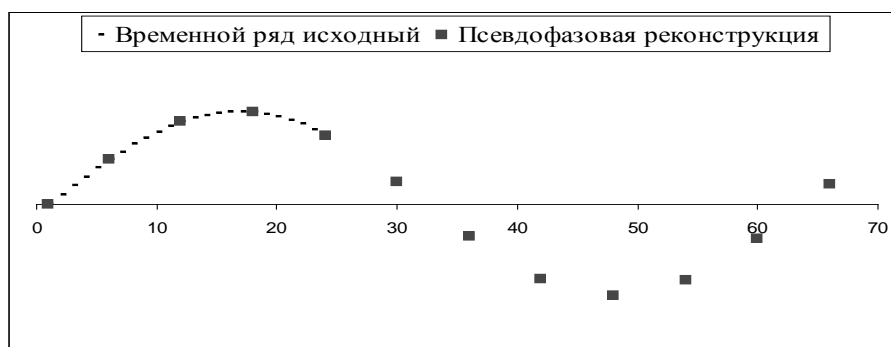


Рисунок 3 – Реконструкция исходного аттрактора в пространстве точек $d_e = 2$ с задержкой $\tau = 6$

Список цитированных источников

1. Головки, В.А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов / В.А. Головки // Лекции по Нейроинформатике. – М.: МИФИ, 2005. – С. 45-57.
2. Hegger, R. Practica implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package / R.Hegger, H. Kantz, Th. Schreiber // CHAOS. – 1999. – P.413-435.

УДК 519.24

СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Сурмач А.И.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно

Семенчук Н.В., к.ф.-м.н., доцент

При построении оценок спектральных плотностей обычно применяются периодограммные методы, в основе которых лежит квадрат модуля преобразования Фурье конечной реализации исследуемого процесса. Для получения состоятельных оценок спектральных плотностей, как правило, используется метод сглаживания периодограмм спектральными окнами. Обработка случайного процесса с помощью функций окна про-

смотра данных и спектрального окна применяется для улучшения статических свойств оценок его спектральной плотности. При этом основное назначение окна просмотра данных – уменьшить величину смещения, в то время как спектрального окна – уменьшить дисперсию в периодограммных спектральных оценках. Одна из основных проблем классического спектрального оценивания связана с выбором указанных функций. Таким образом, возникает необходимость проведения сравнительного анализа известных классических оценок спектральных плотностей в зависимости от используемых окон просмотра данных и спектральных окон. Также оценки спектральных плотностей строятся путем осреднения расширенных периодограмм. Таким образом, возникает необходимость проведения сравнительного анализа известных классических оценок спектральных плотностей в зависимости от используемых окон просмотра данных и спектральных окон.

В современных условиях хозяйственной независимости промышленных и торговых предприятий в Республике Беларусь для многих из них является актуальной задача прогнозирования. Сейчас, когда предприятия вынуждены работать по рыночным законам, менеджеры хотят знать перспективы развития своего предприятия, чтобы предугадать последствия тех или иных решений.

Для построения расширенной периодограммы, т.е. оценки вида:

$$I_T^{(h)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)} d_T(\lambda) d_T(-\lambda) \quad (1)$$

с окном просмотра данных Хэнинга

$$h(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x)), \quad x \in [-1, 1] \quad (2)$$

были смоделированы нормально распределённые случайные величины (с помощью генератора случайных чисел в пакете Excel). Их реализация построена на рис. 1. Далее, используя полученные реализации случайных величин, по формулам:

$$X(t) = \sum_{j=1}^p \beta_j X(t-j) + \varepsilon(t), \quad X(t) = \sum_{k=0}^q \alpha_k \varepsilon(t-k), \quad \alpha_0 = 1, \quad (3)$$

моделировались процессы AR(1) и MA(1). Для смоделированных процессов в СКА Mathematica построена на рис. 2 расширенная периодограмма с окном просмотра данных Хэнинга.

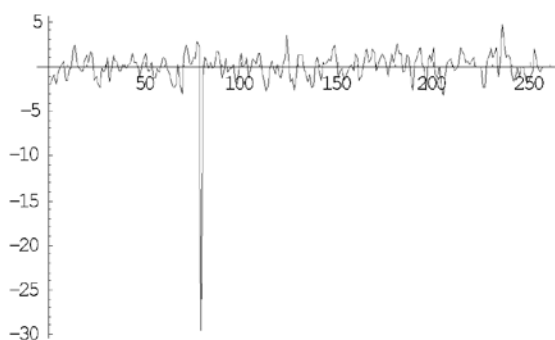


Рисунок 1 – Реализация процесса MA(1),
 $T = 256, a_1 = 0.8, \varepsilon_t \sim N(0, 1)$

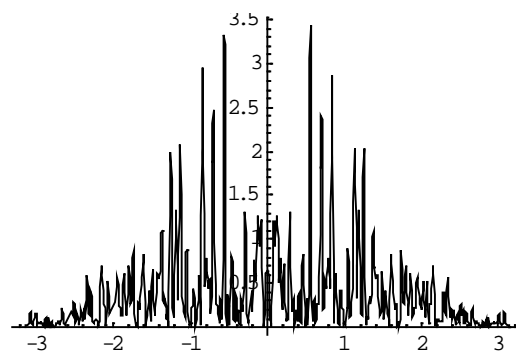


Рисунок 2 – Расширенная периодограмма
с окном просмотра данных Хэнинга

Состоятельная классическая оценка спектральной плотности, полученная путём осреднения расширенной периодограммы $I_T^{(h)}(\lambda_{j+k})$ в точке $\lambda = \lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$, т.е. статистику вида (см. ниже):

$$\hat{f}_T(\lambda_j) = \sum_{k=-[\frac{T}{2}]+1}^{[\frac{T}{2}]} \varphi_T(k) I_T^{(h)}(\lambda_{j+k}), \quad (4)$$

где $j = -[\frac{T}{2}] + 1, [\frac{T}{2}]$, а $\varphi_T(k), k \in Z$ - произвольная, не зависящая от наблюдений четная целочисленная функция, называемая спектральным окном, $\varphi_T(k) = 0$ для $k \notin (-[\frac{T}{2}] + 1, [\frac{T}{2}])$, построена на рис. 3.

Таким образом, получены практические результаты в области спектрального анализа случайных процессов, которые решают задачу построения состоятельных оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов с дискретным временем.

Вышеприведенный алгоритм построения состоятельных классических оценок спектральных плотностей был апробирован на реальных данных. Для анализа были выбраны данные Белинвестбанка по курсу евро-доллар за 2005 – апрель 2013 года. Данные получены как средний курс за каждый месяц.

Получили временной ряд из 100 значений. Графически ряд представляется на рис. 4. Для проверки ряда на стационарность провели ряд различных тестов при помощи эконометрического пакета Eviews 5.5., такие как тест Дики-Фуллера, анализ остатков при помощи статистики Жака-Бера, Q-статистики, анализ ЧАКФ и АКФ.

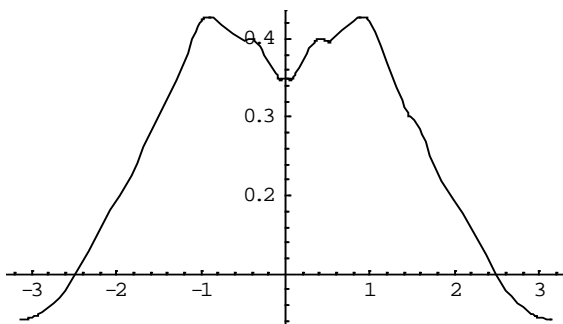


Рисунок 3 – Состоятельная классическая оценка спектральной плотности с параметром $Bt = 22$

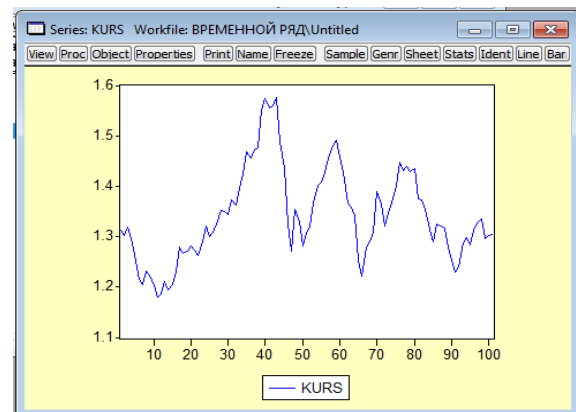


Рисунок 4 – Изменение значений курса евро-доллар за 2005 – апрель 2013 года

Сделан вывод, что данный временной ряд является стационарным и поэтому его можно использовать для реализации алгоритма.

Построили расширенную периодограмму с окном просмотра данных Хэннинга на рис. 5 и её состоятельную классическую оценку спектральной плотности на рис. 6.

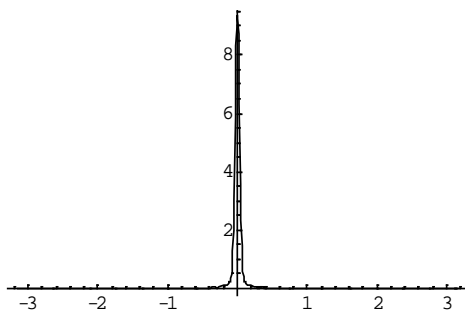


Рисунок 5 – Расширенная периодограмма с окном просмотра данных Хэннинга

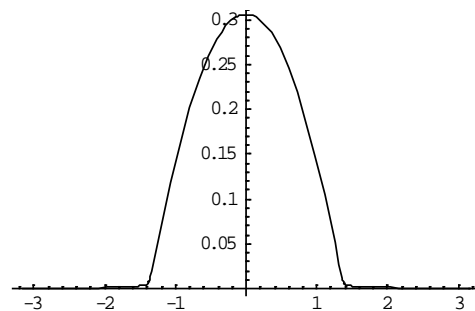


Рисунок 6 – Состоятельная классическая оценка спектральной плотности

По построенным результатам можно сделать вывод, что временной ряд кросс-курса евро-доллар изменяется как процесс скользящего среднего.

Список цитированных источников

1. Журбенко, И.Г. Спектральный анализ стационарных случайных процессов / И.Г. Журбенко, Н.Н. Труш // Вестник БГУ. Сер. 1: Физ. Мат. Мех., 1981. – №1. – 147 с.
2. Дьяконов, В. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления процессов / В. Дьяконов. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 574 с.

УДК 625.539.3

АЛГОРИТМ ФЛОЙДА ПРИ ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАССЫ АВТОМОБИЛЬНОЙ ДОРОГИ

Фёдоров А.В.

*Белорусский государственный технологический университет, г. Минск
Научный руководитель: Лащенко А.П., к.т.н., доцент*

Алгоритм Флойда – динамический алгоритм для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа, не имеющего циклов с отрицательной длиной.

Пусть $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$ – ориентированный граф и задана весовая функция:

$$w(i, j) = \begin{cases} w(i, j) \in R(i, j) \in E & \\ 0, & i = j \\ +\infty, & (i, j) \notin E \end{cases} \quad (1)$$

определяющая длину его дуг $(i, j) \in E$ ([3])

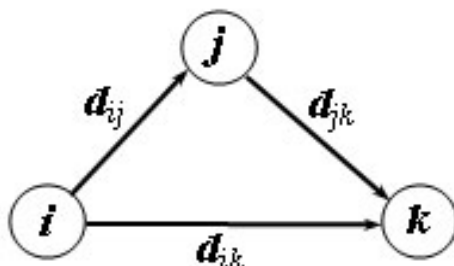


Рисунок 1 – Граф для алгоритма

Суть алгоритма можно рассмотреть на данном графе (рис. 1) из трех вершин. Существуют два возможных случая:

- 1) кратчайший путь между i , k не проходит через вершину j , замену не производим.
- 2) существует более короткий путь между i , k , проходящий через j , тогда он сначала идет от i до j , а потом от j до k .

В этом случае, очевидно $d_{ik} > d_{ij} + d_{jk}$, и заменяем $d_{ik} = d_{ij} + d_{jk}$.

Тогда $d_{ik} = \min(d_{ik}, d_{ij} + d_{jk})$.

Алгоритм Флойда последовательно вычисляет все значения для d_{ik} $i \neq k$ от 1 до n . Полученные значения являются длинами кратчайших путей между вершинами i , k .

В настоящее время практика трассирования автомобильных дорог на заболоченных территориях основывается на интуитивном и в лучшем случае двух, трехвариантном решении переходов через отдельные или наиболее сложные участки[1].

Многообразие факторов, влияющих на положение автомобильных лесовозных дорог в плане, создает условия многовариантности, следовательно, получение оптимального

варианта трассы автомобильной дороги связано с необходимостью переработки большого объема информации, возможной только с использованием современной вычислительной техники.

В этом случае одним из основных вопросов в рассматриваемой задаче является решение математической аппроксимации местности или разработка цифровой модели территории. Изображение территории в виде, удобном для ввода в память персональных компьютеров для дальнейшей обработки информации и выбора оптимального решения, находит свое отражение в США, Канаде, Бельгии, ФРГ и т. д. [2]. Однако эта задача решается там применительно к описанию поверхности земли, т. е. когда каждую точку местности можно представить в декартовой системе координат (x, y, z) .

Поскольку вычислительные средства обрабатывают только цифровую информацию, условия строительства в каждой точке территории можно с требуемой степенью точности описать рядом чисел $x, y, n_1, n_2, \dots, n_k$, где x и y координаты данной точки в прямоугольной системе координат; n_1, n_2, \dots, n_k , конечный ряд чисел, характеризующий условия дорожного строительства в данной точке. Так как критерием оценки условий строительства служат приведенные затраты, то конечный ряд чисел представляет в общем виде экономическую функцию:

$$w = f(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (2)$$

где w – приведенные затраты на строительство единицы длины дороги в любой точке рассматриваемой системы координат; n_1, n_2, \dots, n_k – аргументы-характеристики природно-стоимостных факторов применяемой конструкции земляного полотна и дорожной одежды.

В общем виде все аргументы можно сгруппировать по следующим четырем группам:

$$v = f(n_1, n_2, \dots, n_k); \quad (3)$$

$$c = f(n_{k+1}, n_2, \dots, n_i); \quad (4)$$

$$d = f(n_{i+1}, n_2, \dots, n_m); \quad (5)$$

$$k = f(n_{m+1}, n_2, \dots, n_n), \quad (6)$$

где v – функция оплачиваемых земляных работ; c – функция стоимости выполнения единицы земляных работ; d – некоторая функция, учитывающая достоверность информации об условиях строительства и надежности принятого проектного решения в любой точке системы координат; k – функция стоимости строительства дорожной одежды. Тогда исходную функцию (2) можно представить в виде:

$$w = f(v, c, d, k). \quad (7)$$

Работа по созданию цифровой модели проводится в два этапа.

Первый этап заключается в построении инженерно-геологической карты. Работа выполняется по материалам аэрофотосъемки с использованием материалов инженерно-геологической съемки территории. Кроме того, производится накладка на исследуемую территорию изысканных и построенных трасс автомобильных дорог. Результатом первого этапа является карта категорий местности по условиям дорожного строительства.

Второй этап основан на построении цифровой модели по уже имеющейся карте категорий местности.

Для упрощения ввода в память компьютера цифровой модели, карьеров и корреспондирующих пунктов вместо двух координат каждой узловой точки координатной сетки присваивают порядковый номер (номер вершины графа). Порядковый номер или адрес точки обуславливается путем заданной системы обхода координатной сетки и находится из выражения (см. ниже):

$$q = (n + 1)x + y, \quad (8)$$

где q – порядковый номер любого узла координатной сетки (номер вершины графа); n – число делений на оси ординат; x, y – координаты любой точки координатной сетки.

Порядок обхода координатной сетки принят снизу вверх по каждой ординате и слева направо по оси абсцисс.

Математическая постановка для разработки алгоритма рассматриваемой задачи сводится к следующим инструкциям.

1. Территория представляется в форме координатной сетки размерностью $m \times n$. Каждому узлу сетки соотносится стоимостный функционал, характеризующий стоимость строительства одного километра дороги в данном узле сетки. Из данной сетки можно получить нумерованный граф, соединив ребрами вершины, расположенные на сторонах и диагоналях квадратов сетки.

2. Каждому ребру полученного графа можно соотнести стоимость Z_{ij} строительства автомобильной дороги между i и j узлами координатной сетки, равную среднему арифметическому от стоимости единицы длины дороги в этих узлах, умноженному на расстояние между ними:

$$Z_{ij} = \frac{Z_i + Z_j}{2} \cdot l_{ij}, \quad (9)$$

где Z_{ij} – стоимость строительства дороги вдоль ребра графа между i и j узлами сетки; Z_i, Z_j – стоимость строительства одного километра дороги в i и j узлах сетки; l_{ij} – расстояние между i и j узлами сетки.

3. Решение задачи заключается в нахождении на заданной координатной сетке пути с минимальной стоимостью приведенных затрат на строительство автомобильной дороги между корреспондирующими пунктами А и В.

Список цитированных источников

1. Бабков, В.Ф. Проектирование автомобильных дорог: учебник для вузов / В.Ф. Бабков, О.В. Андреев. – М.: Транспорт, 1979. – 367 с.
2. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М.: Мир, 1973. – 262 с.
3. Смелов, В.В. Алгоритмы на графах и их реализация на С++ / В.В. Смелов, Л.С. Мороз. – Минск: БГТУ, 2011. – 96-100 с.

УДК 004.02

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И ШУМОПОДОБНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВИБРАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

Ширай Д.С.

*Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники, г. Минск*

Научный руководитель: Бранцевич П.Ю., к.т.н., доцент

Повышение эффективности эксплуатации оборудования тесно связано с развитием систем оценки его технического состояния. На первых этапах диагностика различных механизмов осуществлялась обслуживающим их персоналом только на основе своих ощущений, прежде всего слуховых и зрительных. Качество диагноза на этом этапе практически всегда определялось опытом и знаниями обслуживающего машину персонала, а для локализации неисправности использовались простейшие приспособления, напри-

мер, стетоскоп. Второй этап развития диагностики связан с появлением первых измерительных приборов, ряд характеристик которых стал превышать возможности слуха. Но и эти приборы в течение двух-трех десятков лет были достаточно дорогими, поэтому этап начался не с диагностики, а с исследования машин как источников шума и вибрации. Третий этап развития диагностики характеризуется активным развитием работ по созданию математического и программного обеспечения, заменяющего эксперта в задачах интерпретации результатов, получаемых системами мониторинга. Эти результаты могут быть использованы для принятия решения об остановке или задействовании оборудования, проведении профилактических работ или ремонта [1].

Для механизмов с вращательным движением вибрационный сигнал представляет собой композицию периодического сигнала, состоящего из гармоник, кратных частоте вращения, и некоторой шумоподобной составляющей. Такой сигнал можно представить в следующем виде:

$$x(nt_d) = p(nt_d) + s(nt_d) = \sum_{m=1}^L A_m \cos(2\pi k_m f_0 nt_d - \varphi_m) + s(nt_d), \quad (1)$$

где n – номер дискретного отсчета, $n = 0, 1, 2, \dots$; t_d – интервал дискретизации; f_0 – частота вращения приводного вала (оборотная частота); k_m – кратность m -й гармоники, включенной в периодическую составляющую, относительно f_0 ; A_m , f_m , φ_m – амплитуда, частота, начальная фаза m -й гармоники, причем частоту m -й гармоники можно определить как $f_m = k_m \cdot f_0$; L – число гармоник в периодической составляющей сигнала.

Периодическая составляющая сигнала вычисляется по формуле:

$$p(nt_d) = \sum_{m=1}^L A_m \cos(2\pi k_m f_0 nt_d - \varphi_m), \quad (2)$$

а шумоподобная составляющая находится как:

$$s(nt_d) = x(nt_d) - p(nt_d). \quad (3)$$

Следующим шагом является определение характеристик и статистический анализ составляющих, благодаря которым можно определить, как значения зависят от состояния оборудования с вращательным движением в различных режимах функционирования [2].

Для осуществления анализа периодической и шумоподобной составляющей вибрационных сигналов создано веб-приложение на языке C# с использованием технологии ASP.NET MVC 4.5. Основной сложностью в процессе разработки была необходимость обрабатывать большие объемы данных за приемлемое время. Для решения этой проблемы была применена технология Task Parallel Library, входящая в платформу .NET Framework 4 и выше [3].

Таким образом, разработан алгоритм разложения сигнала на периодическую и шумоподобную составляющие, который стал одним из основных в проектируемом программном средстве. Проведена проверка работоспособности приложения на реальных данных.

Список цитированных источников

1. Барков, А.В. Мониторинг и диагностика роторных машин по вибрации / А.В. Барков, Н.А. Баркова, А.Ю. Азовцев. – СПб.: Изд. СПб Государственного морского технического университета, 2012. – 159 с.
2. Бранцевич, П.Ю. Применение разложения вибрационных сигналов на периодическую и шумоподобную составляющие при исследовании технического состояния механизмов с вращательным движением / П.Ю. Бранцевич, В.Э. Базаревский, С.Ф. Костюк / Механика 2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26–28 окт. 2011 г.: в 2 т. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: М.С. Высоцкий [и др.] – Минск, 2011. – Т. II. – С. 27-31.
3. Кемпбелл, К. Parallel Programming with Microsoft .NET: Design Patterns for Decomposition and Coordination on Multicore Architectures (Patterns & Practices) / К. Кемпбелл. – MS Press, 2010. – 196 с.

УДК 50.41

РАЗРАБОТКА МУЛЬТИМЕДИЙНОГО СЕРВЕРА ДЛЯ ВИДЕОТРАНСЛЯЦИИ

Шитько А.М.

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

В данной публикации описано созданное веб-приложение, представляющее собой мультимедийный сервер, предназначенный для видеотрансляции. Основным моментом является использование созданного .NET веб-сервиса, дающего возможность более быстрого потокового считывания видеофайла прямо из базы данных ORACLE и воспроизведения его в браузере с помощью новой технологии HTML 5 плеера.

Введение. Жизнь современного человека без постоянного доступа во всемирную сеть Internet довольно трудно представить. Повсеместное распространение точек доступа и постоянное увеличение популярности привлекли интерес разработчиков, что в свою очередь привело к изобретению новых интернет-технологий. Поточная трансляция видеофайлов завоевала популярность с самых первых дней своего существования. Мало какие информационные интернет-ресурсы обходятся без видео, не говоря уже о развлекательных порталах. Трансляцию видео используют практически везде и в самых разных целях. Однако, при большом количестве файлов, встает вопрос об упорядоченном хранении и сортировке видеофайлов. Лучшим решением этой проблемы стало использование базы данных, а именно – СУБД ORACLE.

Основная часть. Цель разработки – организация упорядоченного хранения большого объема видеофайлов.

Данное приложение выполняет следующие задачи:

- загрузка собственных видеофайлов на сервер и их автоматическое сохранение в базе данных;
- получение списка всех имеющих в базе данных видеофайлов;
- организация потокового вещания выбранного видеофайла;
- возможность просмотра видеопотока с помощью HTML 5 видеоплеера.

Для хранения видеофайлов в базе данных была создана таблица с тремя полями: *id*, хранящее номер видеофайла для его сортировки и адресации; *name*, хранящее имя видеофайла для отображения в общем списке; *data*, хранящее собственно сам видеофайл. В последнем поле использовался тип данных BLOB, который позволяет хранить большие данные (до 4 Гб) даже при удалении оригинального файла.

Для того чтобы хранить файлы в базе данных, необходимо их туда «загрузить». Для этого используется стандартный элемент управления “*FileUpload*” и с помощью специального запроса добавляется файл:

```
cmd.CommandText = "insert into video_table values (" + new_id.ToString() + ", '" + video_name.Text + "', 'AAA')";  
cmd.ExecuteNonQuery();
```

Во избежание переполнения буферов памяти «кусками» по 1 Мб файл копируется в объект BLOB при помощи входящего потока:

```
using (reader)  
{  
    reader.Read();  
    OracleLob blob = reader.GetOracleLob(2);  
    int bytes = 0;  
    byte[] buffer = new byte[1000000];
```

```
do
{
bytes = hpf.InputStream.Read(buffer, 0, 1000000);
blob.Write(buffer, 0, bytes);
}
```

Немаловажным шагом является формирование индивидуальных ссылок на страницу с HTML 5 плеером для каждого файла, поэтому в ссылку передается параметр «*id*», значение которого соответствует идентификатору файла в базе данных. После этого HTML 5 плеер обращается к веб-сервису с запросом на файл с указанным параметром «*id*».

После формирования ссылки для доступа к файлу базы данных используется «посредник» между HTML 5 плеером и хранилищем. Это веб-сервис, который соединяется с базой данных и выбирает необходимый файл:

```
using(OracleConnection conn = new OracleConnection(GenerateConnectionString()))
{
conn.Open();
OracleCommand cmd = conn.CreateCommand();
cmd.Transaction = cmd.Connection.BeginTransaction();
cmd.CommandText = "select * from video_table where id = " + video_id.ToString();
OracleDataReader reader = cmd.ExecuteReader();
using (reader)
{
reader.Read();
OracleLob blob = reader.GetOracleLob(2);
byte[] buffer = new byte[1000000];
do
{
bytes = blob.Read(buffer, 0, 50000);
Context.Response.OutputStream.Write(buffer, 0, bytes);
}
while (bytes > 0);
blob.Position = 0;
cmd.Transaction.Commit();
}
conn.Close();
}
```

Для увеличения быстродействия воспроизведения в HTML 5 плеер встроен механизм воспроизведения минимальной достаточной информации, то есть плеер начинает воспроизводить видео только тогда, когда у него будет достаточно данных для воспроизведения, при этом, не прекращая загрузку файла. В связи с этим лучшим решением было считать файл в исходящий поток не целиком, а «кусками» по 50 кб, что позволило сократить задержку до начала воспроизведения до минимума.

Заключение. Использование веб-сервисов для потокового считывания из базы данных весьма оправдано, так как позволяет увеличить скорость работы приложения за счет того, что сервисы менее требовательны к ресурсам компьютера. К достоинствам можно отнести также кроссплатформенность и отсутствие необходимости установки веб-сервиса на компьютер.

Список цитированных источников

1. Кайт, Т. Oracle для профессионалов. – СПб.: ДиаСофтЮП, 2003. – 848 с.
2. Урман, С. Oracle 9i. Программирование на языке PL/SQL. – М.: Лори, 2004. – 528 с.
3. Шапошников, И.И. Web-сервисы Microsoft .NET. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 334 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.8

О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Антоник И.А., Гладкий И.И., Липовцев А.П., Каримова Т.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

В работе представлен общий подход к вычислению некоторых числовых характеристик распределений дискретных случайных величин. В частности, рассмотрены геометрическое, биномиальное распределения и распределение Пуассона (например, в [1]).

В работе [2] рассмотрены взаимосвязи между начальными, центральными и соответствующими факториальными моментами случайных величин, способы вычисления одних моментов, используя другие, и вычисление моментов случайных величин, используя числа Стирлинга первого и второго рода.

Геометрическим называют распределение дискретной случайной величины X , принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = p(1 - p)^k = pq^k$, где $0 < p < 1$ – параметр геометрического распределения ($q = 1 - p$).

Пуассона распределение – распределение вероятностей случайной величины X , принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями

$$P(X = k) = p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ где } \lambda > 0 \text{ – параметр.}$$

Биномиальным (распределением Бернулли) называют распределение вероятностей случайной величины X , принимающей целочисленные значения $k = 0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями соответственно

$$P(X = k) = p_k(n, p) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, $0 \leq p \leq 1$ – параметр биномиального распределения ($q = 1 - p$), называемый вероятностью положительного исхода.

Моментом n -го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X - a)^n\right)$.

Начальным моментом n -го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X относительно числа a называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$. Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n -го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M(X)$), называется $\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Факториальным моментом n -го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M((X - a)(X - a - 1)\dots(X - a - n + 1))$.

Начальным факториальным моментом n -го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X относительно числа a называется $\alpha_{[n]} = M(X^{[n]}) = M(X(X - 1)\dots(X - n + 1))$. Заметим, что $\alpha_{[0]} = 1$, $\alpha_{[1]} = M(X)$.

Центральным факториальным моментом n -го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M(X)$) называется $\mu_{[n]} = M((X - M(X))^{[n]}) = M((X - M(X))(X - M(X) - 1)\dots(X - M(X) - n + 1))$. Заметим, что $\mu_{[0]} = 1$, $\mu_{[1]} = 0$, $\mu_{[2]} = D(X)$.

Начальные факториальные моменты n -го порядка $\alpha_{[n]}$ могут быть найдены по формулам: $\alpha_{[n]} = n!q^n p^{-n}$ для геометрического распределения [3], $\alpha_{[n]} = \lambda^n$ для распределения Пуассона [4], $\alpha_{[m]} = n^{[m]}p^m$ для биномиального распределения [5].

Начальные моменты n -го порядка α_n случайной величины связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением [2]

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^n S_m^{(n)} \alpha_{[m]}, \quad (1)$$

где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода. Тогда для геометрического распределения получим формулу $\alpha_n = \sum_{m=1}^n \alpha_m^{(n)} q^m p^{-m}$, где коэффициенты

$\alpha_m^{(n)} = S_m^{(n)} m!$ (последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей)) и могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $\alpha_m^{(n)} = m(\alpha_{m-1}^{(n-1)} + \alpha_m^{(n-1)})$, полагая $\alpha_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$. Для распределения Пуассона формула (1) примет

вид $\alpha_n = \sum_{m=1}^n S_m^{(n)} \lambda^m$. Используя формулу (1), начальные моменты n -го порядка биномиального распределения могут быть вычислены так: $\alpha_1 = \alpha_{[1]} = np$ – математическое ожидание,

$$\alpha_2 = \alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = n(n - 1)p^2 + np,$$

$$\alpha_3 = \alpha_{[3]} + 3\alpha_{[2]} + \alpha_{[1]} = n(n - 1)(n - 2)p^3 + 3n(n - 1)p^2 + np \text{ и т.д.}$$

Центральные моменты n -го порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением [2]

$$\mu_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m \alpha_{n-m} \alpha_1^m. \quad (2)$$

Тогда для геометрического распределения формула (2) примет вид

$$\mu_n = \sum_{m=1}^n \mu_m^{(n)} \frac{q^m}{p^m}, \quad \text{где коэффициенты } \mu_m^{(n)} \text{ определяются соотношением}$$

$$\mu_m^{(n)} = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_n^j S_{m-j}^{(n-j)} (m-j)! \quad [3].$$

Центральный момент n -го порядка распределения Пуассона, с учетом формулы (2), можно найти по формуле

$$\mu_n = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^i \mu_i. \quad \text{Для биномиального распределения получим:}$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(-p+1);$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = np(2p^2 - 3p + 1);$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = (3n^2 - 6n)(p^4 - 2p^3 + p^2) - np^2 + np \text{ и т.д.}$$

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576с.
2. Зеневич, Е.А. Моменты распределения вероятностей / Е.А. Зеневич, Н.В. Фомина (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Из-во БрГТУ, 2012. – Ч. 1. – С. 68–72.
3. О моментах геометрического распределения / Л.П. Махнист [и др.] // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов регион. науч.-практ. конф., Брест, 18-19 октября 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2012. – С.108–110.
4. Антоник, И.А. О моментах распределения Пуассона / И.А. Антоник (Научные руководители: к.т.н., доцент Л.П. Махнист, доцент И.И. Гладкий) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Издательство БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 47–50.
5. Липовцев А.П. О моментах биномиального распределения / А.П. Липовцев (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест: Издательство БрГТУ, 2013. – Ч. 1. – С. 71–74.

УДК 517. 538.52 + 517. 538.53

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Астафьева А.В.

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель
Научный руководитель: Старовойтов А.П., д. ф.-м. н., доцент*

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа n, m_1, m_2, \dots, m_k . По определению полагаем

$m = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Известно (см. [1]), что при $j = 1, 2, \dots, k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots \quad (2)$$

Дроби $\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n,m}^j(z; f_j) = P_{n_j}^j(z) / Q_m(z)$, $j = 1, 2, \dots, k$ определяются условиями (2), вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j\}_{j=1}^k$, его элементы называют аппроксимациями Эрмита-Паде для системы функций (1).

Следующая теорема показывает способ применения метода перевала к исследованию аппроксимаций Эрмита-Паде.

Теорема. Пусть $\{e^{(a+ib)z}, e^{(a-ib)z}\}$ – набор из экспонент с действительными числами a, b , для которых выполнено неравенство $a^2 / b^2 + b^2 / a^2 - 14 < 0$, а $\{\pi_{n_1, m}^1(z, e^{(a+ib)\xi}), \pi_{n_2, m}^2(z, e^{(a-ib)\xi})\}$ – соответствующие этому набору аппроксимации Эрмита-Паде. Тогда, если $m_1 = m_2 = n$, $n_1 = n_2 = 2n$, для любого комплексного числа z , при $n \rightarrow +\infty$

$$e^{(a+ib)z} - \pi_{2n, m}^1(z, e^{(a+ib)\xi}) = \frac{2z^{3n+1}}{(3n)!(2b^2 + 4iab - a^2)n} (ab)^{n+1} \times (2b + ia)^{n+1} e^{5az/2} (1 + O(1)),$$

$$e^{(a-ib)z} - \pi_{2n, m}^2(z, e^{(a-ib)\xi}) = \frac{2(-1)^{n+1} z^{3n+1}}{(3n)!(2b^2 + 4iab - a^2)n} (ab)^{n+1} \times (2b + ia)^{n+1} e^{5az/2} (1 + O(1)).$$

Идея доказательства. Из хорошо известного факта в теории приближения получим

$$R_{n, 2n}^1(z) = \frac{e^{(a+ib)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{a+ib} x^n (x - a - ib)^n (x - a + ib)^n e^{-zx} dx.$$

В этом интеграле разобьем кривую интегрирования на два участка, вследствие чего получим

$$R_{n, 2n}^1(z) = \frac{e^{(a+ib)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \left(\int_0^{ib} x^n (x - a - ib)^n (x - a + ib)^n e^{-zx} dx + \int_{ib}^{a+ib} x^n (x - a - ib)^n (x - a + ib)^n e^{-zx} dx \right). \quad (3)$$

Введем новые обозначения

$$I_1^1(z) = \int_0^{ib} x^n (x - a - ib)^n (x - a + ib)^n e^{-zx} dx, \quad (4)$$

$$I_2^1(z) = \int_{ib}^{a+ib} x^n (x - a - ib)^n (x - a + ib)^n e^{-zx} dx. \quad (5)$$

Рассмотрим интеграл (4) и найдем его асимптотику с помощью метода перевала [3]. Для этого преобразуем данный интеграл к следующему виду

$$I_1^1(z) = \int_0^{ib} e^{-zx} e^{nLn(x(x-a-ib)(x-a+ib))} dx.$$

Интегрирование будем проводить по кривой $\gamma_1 = \{z = iy : y \in [0, b]\}$, обозначим $S_1(z) = Ln(z(z - a - ib)(z - a + ib))$. Точка, в которой достигается $\max_{\gamma_1} \operatorname{Re} S_1(z)$, если выполнено ограничение на a, b из условия теоремы, находится на конце кривой интегрирования $z = ib$. Тогда применяя теорему о методе перевала в данном случае [3, теорема 1, стр. 414], получим

$$I_1^1(z) = \frac{(ab)^{n+1} (ia + 2b)^{n+1}}{(2b^2 + 4aib - a^2)n} e^{-ibz} (1 + O(1)). \quad (6)$$

Асимптотика интеграла (5) находится аналогично. И пользуясь тем фактом, что $Q_n(z) = e^{-z/3} (1 + O(1))$, получаем первое равенство теоремы.

Перейдем к доказательству второго равенства теоремы. Рассмотрим

$$R_{n,2n}^2(z) = \frac{e^{(a-ib)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \int_0^{a-ib} x^n (x-a-ib)^n (x-a+ib)^n e^{-zx} dx.$$

Преобразуем данный интеграл

$$R_{n,2n}^2(z) = \frac{e^{(a-ib)z} z^{3n+1}}{(3n)!} \left(\int_0^{-ib} x^n (x-a-ib)^n (x-a+ib)^n e^{-zx} dx + \int_{-ib}^{a-ib} x^n (x-a-ib)^n (x-a+ib)^n e^{-zx} dx \right).$$

Для определения интегралов, входящих в последнее равенство, поступаем аналогично первому случаю. И получаем требуемые теоремой равенства.

Список цитированных источников

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 256с.
2. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов. – 3-е изд. / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин – М.: Наука, 1989. – 480 с.

УДК 519.853.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРЯМОГО ОПОРНОГО МЕТОДА ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Бруцкий В.Р., Мокин А.А.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Ракецкий В.М., к.ф.-м.н., доцент*

1. Введение. Целью настоящей работы является экспериментальное исследование прямого опорного метода для минимизации выпуклых функций [1]. В качестве объекта для проведения численного эксперимента рассматривается задача безусловной оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n, \quad (1)$$

где $f(x)$ – дважды дифференцируемая сильно выпуклая функция, т.е. в задаче (1) всегда существует единственное решение x^* – точка минимума функции $f(x)$, которая удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности

$$\Delta_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

2. Алгоритм прямого опорного метода. Пусть $\{x, J_{oc}\}$ опорный план [1] задачи (1), известный к началу итерации, ε – заданная точность выполнения условий оптимальности (2), η – параметр метода, гарантирующий монотонное убывание целевой функции от итерации к итерации. Предположим, что опора целевой функции J_{oc} состоит из индексов $\{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, множество неопорных индексов J_H состоит из индексов $\{j_1, j_2, \dots, j_{n-m}\}$, j_k –

неопорный индекс, для которого предстоит проверить условия оптимальности на текущей итерации, J_n^0 – множество индексов из J_n , для которых на предыдущих итерациях был установлен факт выполнения условий оптимальности с заданной точностью, т.е. $|\Delta_j(x)| \leq \varepsilon$, $j \in J_n^0$, и опорный план $\{x, J_{oc}\}$ не менялся.

2.1. Проверим, выполняются ли условия (2) на индексе j_k с заданной точностью:

$$|\Delta_{j_k}(x)| \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Если условие (3) не выполняется, то перейдем к п. 2.3. В противном случае положим $J_n^0 = J_n^0 \cup \{j_k\}$. Возможны 2 случая.

а) $J_n^0 = J_n$, т.е. все неопорные индексы удовлетворяют с заданной точностью условиям оптимальности. В этом случае перейдем к проверке согласованности опорного плана.

б) $J_n^0 \subset J_n$, $J_n^0 \neq J_n$, т.е. возможно, что среди неопорных индексов есть такие, для которых условия оптимальности не выполняются с заданной точностью. В этом случае положим $k = (k+1) \bmod (n-m)$ и снова проверим условие (3) для нового индекса.

2.2. Проверим условия согласования опорного плана

$$|\Delta_j(x)| \leq \varepsilon, \quad j \in J_{oc} \quad (4)$$

Если условия согласования (4) выполняются, то решение задачи (1) окончено, план x принимаем в качестве оптимального плана. В противном случае полагаем $J_{oc} = \emptyset$ и переходим к п.2.1. В качестве индекса j_k используем первый из индексов опорного плана, для которого не выполнены условия согласования (4).

2.3. Построим направление l для улучшения опорного плана $\{x, J_{oc}\}$

$$l_{j_k} = -\text{sign} \Delta_{j_k}, \quad l_j = 0, \quad j \in J_n \setminus \{j_k\}, \quad l_{oc} = G_{oc} p_{oc} \text{sign} \Delta_{j_k}, \quad p_{oc} = \{p_j, j \in J_{oc}\}, \quad p_j = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_{j_k}} \quad (5)$$

2.1.4. Вычислим шаг θ вдоль направления l :

$$\theta = \begin{cases} |\Delta_{j_0}| / \alpha, & \text{если } \alpha > 0, \\ \infty, & \text{если } \alpha \leq 0, \end{cases}, \quad \alpha = l'_{oc} p_{oc} \text{sign} \Delta_{j_k} + d_{j_k j_k}, \quad d_{j_k j_k} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_k}} \quad (6)$$

Если $\theta = \infty$, то перейдем к п.2.6.

2.5. Проверим условие

$$f(x + \theta l) < f(x) - \eta. \quad (7)$$

Возможны 2 варианта:

а) условие (7) выполняется. В этом случае построим новый опорный план $\{\tilde{x}, \tilde{J}_{oc}\}$, где $\tilde{x} = x + \theta l$, $\tilde{J}_{oc} = J_{oc} \cup \{j_k\}$, и пересчитаем матрицу G_{oc} :

$$\tilde{G}_{oc} = \begin{pmatrix} G_{oc} + \frac{l_{oc} l_{oc}^T}{\alpha} & -\frac{l_{oc}}{\alpha} \text{sign} \Delta_{j_0} \\ -\frac{l_{oc}^T}{\alpha} \text{sign} \Delta_{j_0} & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

Если $|\tilde{J}_{oc}| = n$, то $\tilde{J}_n = \emptyset$. Поэтому следующую итерацию начнем сразу с п. 2.2 – проверки условий согласования опорного плана $\{\tilde{x}, \tilde{J}_{oc}\}$. Если же $|\tilde{J}_{oc}| < n$, то перейдем к п. 2.1;

б) условие (7) не выполняется. Продолжим итерацию, для чего перейдем к п. 2.6.

2.6. Найдем шаг θ вдоль направления l с помощью метода одномерной оптимизации (например, метода «золотого» сечения») и проверим условие

$$f(x + \theta l) < f(x) - \eta / \delta \quad (8)$$

Возможны 2 исхода:

а) условие (8) выполняется. В этом случае уточним значение параметра $\eta = (f(x) - f(x + \theta l)) / 2$ и перейдем к следующей итерации по правилам пункта 2.5 а), приняв в качестве значения α величину $\alpha = |\Delta_{j_0}| / \theta$.

б) условие (8) не выполняется. В этом случае прервем текущую итерацию и проверим условия согласования опорного плана $\{x, J_{ou}\}$, т.е. перейдем к п. 2.2.

3. Эксперименты. В эксперименте целевая функция (1) имела вид

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T D x + c^T x + \sum_{i=1}^m e^{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}, \quad (9)$$

где D – симметричная положительно определенная ($n \times n$) – матрица, c – n -вектор, $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ – известные величины. Функция (9) является дифференцируемой (существуют любые ее производные) и сильно выпуклой. При этом имеют место следующие соотношения

$$\Delta_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n d_{jk} x_k + c_j + \sum_{k=1}^m a_{kj} e^{\sum_{l=1}^n (a_{kl} x_l - b_k)}, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = d_{ij} + \sum_{k=1}^m a_{ki} a_{kj} e^{\sum_{l=1}^n (a_{kl} x_l - b_k)} \quad (10)$$

Для автоматизации процесса тестирования был разработан генератор задач вида (9). В ходе эксперимента генерировались задачи одного размера сериями по 10 штук. Контролировались два параметра: время решения и количество итераций. В качестве результатов эксперимента принимались средние результаты по серии, из которых отбрасывалось одно наибольшее и одно наименьшее значение.

Эксперимент 1. Исследовалось влияние на вычислительный процесс способа вычисления шага. Рассмотрены 2 варианта: а) вычисление шага по правилам, изложенным в п. 2; б) вычисление шага с заданной точностью на каждой итерации алгоритма (методом «золотого сечения»).

Эксперимент 2. Исследовалось, как влияет на вычислительный процесс способ вычисления производных. Рассмотрены 2 варианта: а) точное вычисление производных по формулам (10); б) приближенное вычисление производных по простейшим разностным формулам.

В табл. 1 приведены результаты эксперимента по решению задач с размерами от 10 до 30 переменных (буквы аа, ба, аб, бб обозначают сочетания вариантов экспериментов 1,2).

Таблица 1 – Результаты эксперимента

Количество переменных	Количество итераций				Время решения (мс)			
	аа	ба	аб	бб	аа	ба	аб	бб
10	30	30	30	30	17	30	24	38
15	60	59	62	65	34	45	47	65
20	79	68	79	65	32	83	81	114
25	81	82	81	93	40	120	102	162
30	120	90	120	90	71	177	286	310

Результаты эксперимента позволяют сделать выводы:

1) вычисление шага с заданной точностью приводит к уменьшению количества итераций, однако в 2-3 раза увеличивает время решения задачи;

2) приближенное вычисление производных не приводит к существенному увеличению количества итераций, однако увеличивает время решения задачи. При этом разрыв по времени решения увеличивается с ростом размеров задачи

Список цитированных источников

1. Ракецкий, В.М. К минимизации выпуклых функций с простыми ограничениями // Вестник БрГТУ. – 2011. – № 5(71): Физика, математика, информатика. – С. 108–110

УДК 519.24

**ПРИМЕНЕНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ
ДЛЯ АНАЛИЗА ЭРГОДИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Бусько Н.В.

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Семенчук Н.В., к. ф.-м. н., доцент*

Эргодическим стационарным случайным процессом называется такой процесс, любая вероятностная характеристика которого, полученная на ансамбле реализаций в какой-либо момент времени t , равна, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, аналогичной характеристике, полученной на одной единственной реализации процесса путем усреднения по времени за достаточно большой промежуток времени T [1].

Использование эргодического стационарного случайного процесса позволяет строить оценки спектральной плотности по одной его реализации, при этом зачастую избавляя исследователей от проведения многочисленных экспериментов, связанных с затратами материальных и временных ресурсов.

Расширенной периодограммой называется периодограмма вида [2]

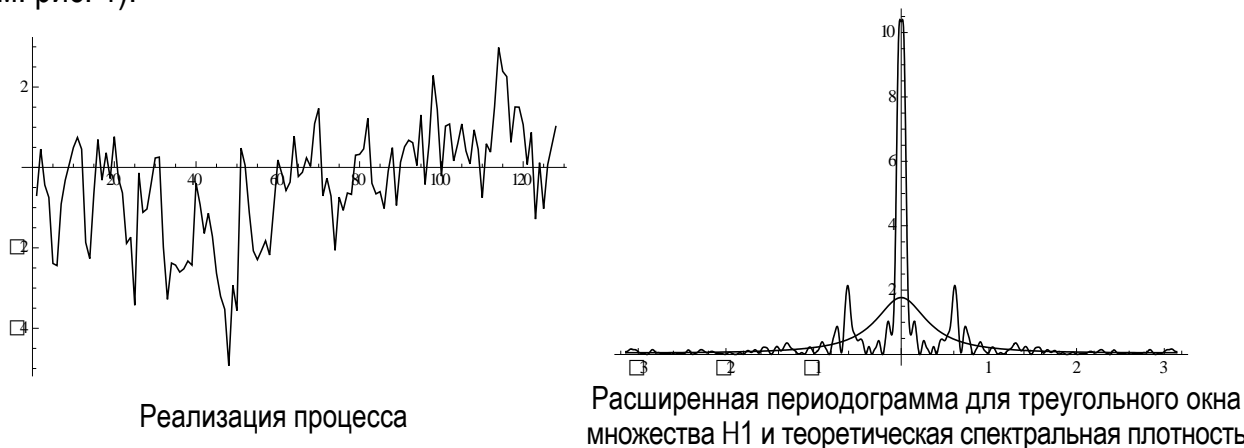
$$I_T^{(h)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)} d_T(\lambda) d_T(-\lambda), \tag{1}$$

где $d_T(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) X(t) e^{-i\lambda t}$,

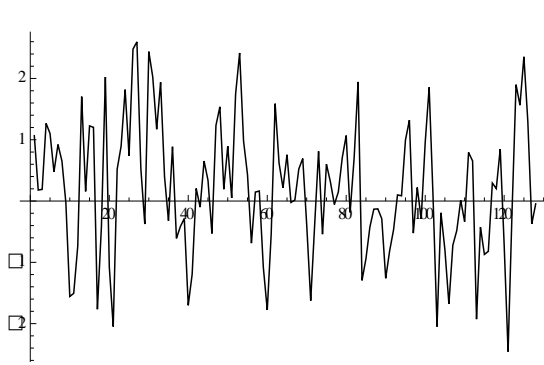
$$H_k^{(T)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} (h_T(t))^k e^{-i\lambda t},$$

функция $h_T(t) = h\left(\frac{t}{T}\right)$, $h: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ – функция окна просмотра данных, $k \in \mathbf{N}, T \in \mathbf{N}$.

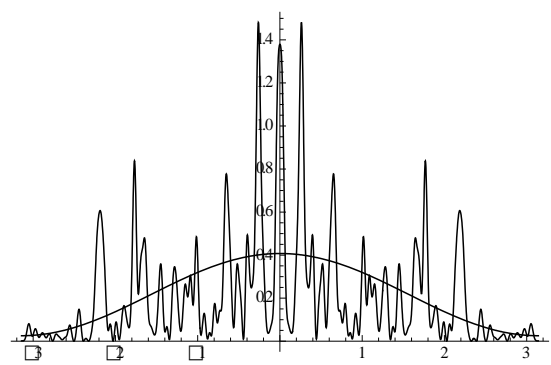
Разработан алгоритм построения расширенной периодограммы в СКА «Mathematica 8.0» с использованием 10 окон просмотра данных. Алгоритм позволяет строить расширенные периодограммы за приемлемое время для рядов длиной до 10000 наблюдений (см. рис. 1).



**Рисунок 1а – Результаты для процесса авторегрессии первого порядка
AR(1) $T=128$, с параметром $\beta_1 = 0.7$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. ($M = 3$)**



Реализация процесса



Расширенная периодограмма для треугольного окна множества Π и теоретическая спектральная плотность

Рисунок 16 – Результаты для процесса скользящего среднего первого порядка $MA(1)$ $T=128$, с параметром $\alpha_1 = 0.6$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. ($M = 3$)

В качестве состоятельной оценки спектральной плотности можно рассмотреть оценки, построенные по непересекающимся интервалам наблюдений [3]

Пусть число наблюдений T за эргодическим стационарным случайным процессом $X(t), t \in \mathbb{Z}$ представимо в виде:

$$T = LN,$$

где L – число интервалов, содержащих по N наблюдений (L не зависит от T).

На l -м интервале, состоящем из наблюдений

$$X(lN), X(lN + 1), \dots, X((l + 1)N - 1), l = \overline{0, L - 1}, \lambda \in \Pi,$$

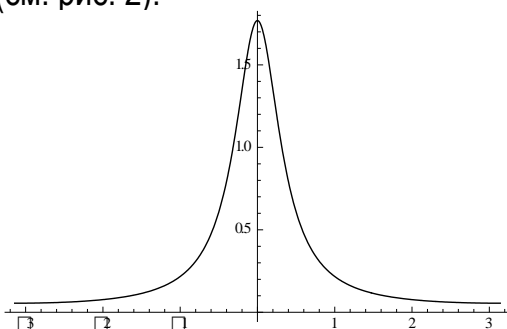
построим расширенную периодограмму (1).

В качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda), \lambda \in \Pi$ рассмотрим статистику вида:

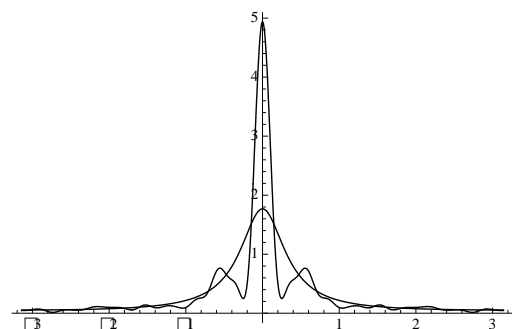
$$\hat{f}_N(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} I_N(\lambda, l), \tag{2}$$

$\lambda \in \Pi$, построенную путем осреднения расширенных периодограмм по L непересекающимся интервалам наблюдений.

Разработан алгоритм построения расширенной периодограммы по непересекающимся интервалам наблюдений в СКА «Mathematica 8.0». Алгоритм позволяет строить расширенные периодограммы за приемлемое время для рядов длиной до 10000 наблюдений (см. рис. 2).



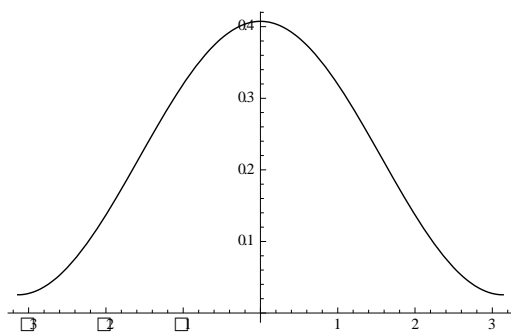
Теоретическая плотность



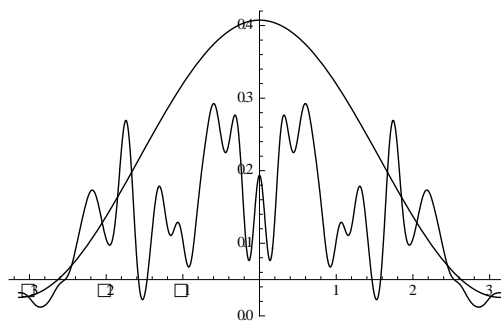
Расширенная периодограмма, построенная по непересекающимся интервалам наблюдений и теоретическая спектральная плотность

Рисунок 2а – Результаты для процесса, реализованного на рисунке 1а

Оценки, построенные с помощью осреднения расширенной периодограммы спектральных окон, являются лучшими по качеству на основе визуального анализа по сравнению с оценками в виде расширенной периодограммы.



Теоретическая плотность



Расширенная периодограмма, построенная по непересекающимся интервалам наблюдений и теоретическая спектральная плотность

Рисунок 26 – Результаты для процесса, реализованного на рисунке 16

Требуются дополнительные исследования по выбору ширины спектрального окна и количеству интервалов осреднения в зависимости от длины реализации случайного процесса, так как очевидно, данные параметры существенно влияют на качество оценки.

С помощью разработанных алгоритмов можно легко анализировать различные данные в виде эргодических стационарных случайных процессов, что является актуальным для решения задачи анализа данных в автоматизированном режиме для производственных предприятий.

Список цитированных источников

1. Волков, И.К. Случайные процессы: учеб. для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 448 с.
2. Труш, Н.Н. Случайные процессы. Преобразование Фурье наблюдений: учеб. пособие / Н.Н. Труш, Е. И. Мирская. – Минск: БГУ, 2000. – 60 с.
3. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.

УДК 519.6+517.983

**СЛУЧАЙ ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННОГО ОПЕРАТОРА
В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Викторович Л.В.

*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к. ф.-м. н., доцент*

В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением, т.е. рассматриваемая задача неустойчива и, значит, некорректна. Будем искать решение уравнения (1), используя неявную схему метода итераций, которая при приближенной правой части уравнения (1) y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ имеет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай, когда счёт ведется по методу (2) не с оператором A , а с оператором A_h , $\|A - A_h\| \leq h$. Введем погрешность $\eta_n = u_n - x_{n,\delta}$, где

$$(E + \alpha A_h)u_{n+1} = u_n + \alpha y_\delta, \quad u_0 = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует

$$(E + \alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha Bx_{n+1}, \quad (4)$$

где $B = A - A_h$, $\|B\| \leq h$, $\eta_0 = 0$.

По индукции нетрудно показать, что $\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (E + \alpha A_h)^{-(k+1)} \alpha Bx_{n-k}$.

Так как $\|x_n\| = \|A^{-1}[E - (E + \alpha A)^{-n}]y\| \leq n\alpha\|y\|$, то $\|x_{n-k}\| \leq (n-k)\alpha\|y\|$.

Для оценки $\|(E + \alpha A_h)^{-(k+1)}\|$ потребуем, чтобы пространство H было сепарабельным и оператор A_h сокоммутировал с A , тогда [1, с. 388] он является функцией оператора A , т. е. $A_h = \int_0^M \varphi(\lambda) dE_\lambda$, $M = \|A\|$ и спектральная функция у этих операторов одна и та же. Следовательно, $\|A - A_h\| = \max_{[0, M]} |\lambda - \varphi(\lambda)| \leq h$, так что

$$\|(E + \alpha A_h)^{-(k+1)}\| = \max_{[0, M]} \frac{1}{|1 + \alpha\varphi(\lambda)|^{k+1}} \leq \max_{[0, M]} \frac{1}{|1 + \alpha(\lambda - h)|^{k+1}} \leq \frac{1}{|1 - \alpha h|^{k+1}}.$$

Таким образом, считая $\alpha h < 1$, имеем $\|\eta_n\| \leq \alpha^2 h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{(1 - \alpha h)^{k+1}} \|y\|$.

Нетрудно доказать, что $\alpha^2 h \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{(1 - \alpha h)^{k+1}} \|y\| = h^{-1} \left[\frac{1}{(1 - \alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y\|$.

В результате получена оценка погрешности метода итераций (2)

$$\|\eta_n\| \leq h^{-1} \left[\frac{1}{(1 - \alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y\|. \quad (5)$$

Покажем, что полученная оценка имеет порядок $O(h)$.

$$\begin{aligned} h^{-1} \left[\frac{1}{(1 - \alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y\| &= h^{-1} \left[\frac{1 - n\alpha h(1 - \alpha h)^n - (1 - \alpha h)^n}{(1 - \alpha h)^n} \right] \|y\| = \\ &= \frac{h^{-1} \left[1 - n\alpha h \left(1 - n\alpha h + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 h^2 - \dots \right) - 1 + n\alpha h - \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 h^2 + \dots \right]}{(1 - \alpha h)^n} \|y\| = \\ &= h^{-1} \left[\frac{n^2 \alpha^2 h^2 - \frac{n^2(n-1)}{2!} \alpha^3 h^3 - \dots - \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 h^2 + \dots}{(1 - \alpha h)^n} \right] \|y\|. \end{aligned}$$

Знаменатель имеет порядок $O(1)$, а числитель $O(h)$, поэтому правая часть в (5) имеет порядок $O(h)$.

Общая оценка погрешности неявного итерационного метода (2) с учетом неточности в правой части уравнения линейного операторного уравнения (1) и погрешности в операторе имеет вид

$$\|x - u_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - u_{n,\delta}\| \leq s^s (2n\alpha)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta + h^{-1} \left[\frac{1}{(1 - \alpha h)^n} - n\alpha h - 1 \right] \|y_\delta\|.$$

Список цитированных источников

1. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

УДК 519.6

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Гиль Д.В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Савчук В.Ф., к. ф.-м. н., доцент

Пусть H и F – гильбертовы пространства и A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F . Предполагается, что нуль не является его собственным значением, однако принадлежит его спектру. Решается уравнение

$$A_\eta x = y_\delta,$$

где $\|A - A_\eta\| \leq \eta$ и $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Предположим, что точное решение уравнения существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного итерационного метода

$$(E + \alpha A_\eta^k) x_{n+1} = x_n + \alpha A_\eta^{k-1} y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{1}$$

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $S_p(A_\eta) \leq [0, M]$, $0 < \eta < \eta_0$. Тогда итерационный метод (1) запишется в виде

$$x_n = g_n(A_\eta) y_\delta,$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^k)^n} \right] \geq 0$. Причем $g_n(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \quad (n > 0), \quad \gamma = k\alpha^{1/k}, \tag{2}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \quad (n > 0), \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha} \right)^{s/k}, \tag{3}$$

(здесь s – степень истокорпредставимости точного решения $x = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$).

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad (n > 0). \tag{4}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{5}$$

Теорема. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $S_p(A_\eta) \leq [0, M]$, $(0 < \eta < \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и выполнены условия (2), (4), (5). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ в приближении (1) так, чтобы $(\delta + \eta)^{1/k}(\delta, \eta) \rightarrow 0$ при $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Тогда $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Список цитированных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест: Изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина. – 2008. – 196 с.

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

Гловацкая А.А.

*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Кожух И.Г., к.ф.-м.н., профессор*

Основным объектом исследований в экологии является динамика или эволюция популяций. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 1. Эволюция популяции.

Составить дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию популяции при следующих предположениях: A – число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, а B – число особей, умирающих в единицу времени. Решить и проанализировать полученное решение.

Решение. Обозначим посредством $x(t)$ число особей в популяции в произвольный момент времени t . С достаточным основанием можно утверждать, что скорость изменения особей в популяции задается формулой:

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \quad (1)$$

Случай 1. Линейная зависимость для скоростей рождения и умирания особей.

Простейшим случаем является ситуация, когда $A = ax$, $B = bx$. В этом случае уравнение (1) переписется в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными: $\frac{dx}{dt} = (a - b)x$. Разделяя переменные, находим $\frac{dx}{dt} = (a - b)dt$ и, интегрируя, получаем $\int \frac{dx}{dt} = (a - b) \int dt \rightarrow \ln|x| = (a - b)t + \ln|c| \rightarrow \ln\left|\frac{x}{c}\right| = (a - b)t \rightarrow x = ce^{(a-b)t}$.

Простейший анализ полученного выражения показывает, что если $a > b$, то при $t \rightarrow \infty$ число особей $x \rightarrow \infty$. При $a < b$, $x \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, и популяция становится вымирающей.

Случай 2. Нелинейная зависимость для скоростей изменения числа особей.

Более реальными случаями для описания эволюции популяций, по-видимому, будут являться модели, которые предполагают, что скорость изменения числа особей является нелинейной функцией. В таком случае скорость прибавления числа особей в популяции задается дифференциальным уравнением следующего вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2)$$

где $f(x)$ – некоторая нелинейная функция.

Пусть, например, $f(x) = ax - bx^2$, где $a > 0$, $b > 0$. В этом случае (2) преобразуем в так называемое дифференциальное уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2. \quad (3)$$

В биологии это уравнение называется уравнением Ферхюльста-Перла. В уравнении учитывается так называемый «эффект самоотравления» популяции или, иначе говоря, внутривидовая борьба.

Причинами, снижающими рост популяции, могут являться конкурентная борьба за пищу, за место, распространение инфекции, из-за тесноты и т.д. Интегрируя уравнение (3), находим, что

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b}x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right)e^{-a(t-t_0)}}, \quad (4)$$

где $x_0 = x(t_0)$.

Из выражения (4) видно, что при $t \rightarrow \infty$ число особей в популяции имеет своим пределом $\frac{a}{b}$: $x(t) \rightarrow \frac{a}{b}$. При этом следует рассмотреть два случая: $\frac{a}{b} > x_0$ и $\frac{a}{b} < x_0$. Различие между ними хорошо видно из рис.1.

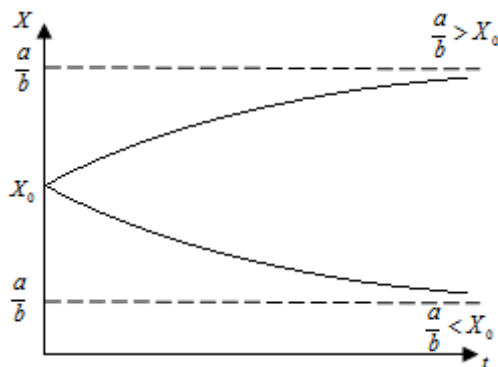


Рисунок 1

Рассмотренная модель описывает динамику популяции в ограниченной среде. Отметим, что уравнение (3) используется также и при моделировании социально-экономических процессов, например, распространение рекламы.

Пример 2. Динамика популяций, модель «хищник-жертва» Вольтерра-Лотка.

Получить систему дифференциальных уравнений, описывающих модель «хищник-жертва» Вольтерра-Лотка.

В динамике популяций часто исследуется взаимодействие хищников и их добычи (жертв) при всевозможных, достаточно общих предположениях.

В частности, рассмотрим модель взаимодействия хищников и добычи в предположении, что между особями одного вида (хищниками) нет соперничества. Пусть x_1 и x_2 – число жертв и хищников, соответственно.

Предположим, что в отсутствии хищников ($x_2 = 0$) относительный прирост жертв происходит с постоянной скоростью, например, $a(a > 0)$. Наряду с этим жертвы несут потери, пропорциональные количеству хищников $x_2(x_2 > 0)$ с коэффициентом пропорциональности $-b(b > 0)$.

В свою очередь рост популяции хищников зависит от количества пищи (жертв) x_1 и при отсутствии пищи ($x_1 = 0$) относительная скорость изменения (убывания) популяции хищников равна $-c$ ($c > 0$). При наличии пищи в количестве x_1 ($x_1 > 0$) скорость убывания хищников компенсируется пропорционально количеству жертв с коэффициентом пропорциональности d ($d > 0$).

Решение. Используя лишь механический смысл производной как скорости изменения переменной и условия задачи, имеем для относительной скорости (прироста) жертв x_1 в отсутствии хищников $\frac{x_1'}{x_1} = a$ и $\frac{x_1'}{x_1} = a - bx_2$ в их присутствии. Аналогично для хищников

имеем для относительной скорости их прироста, а фактически убывания $\frac{x_2'}{x_2} = -c$ в отсутствии пищи и $\frac{x_2'}{x_2} = -c + dx_1$ при наличии компенсации. Отметим, что штрих при переменной обозначает ее первую производную по времени. Объединяя оба равенства, имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными, т.е. второго порядка, соответствующую модели Вольтерра-Лотка

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= (a - bx_2)x_1 \\ x_2' &= (-c + dx_1)x_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Записывая в стандартной форме Коши, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 - bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отметим, что полученная система уравнений имеет многочисленные другие приложения, среди которых:

- поведение конкурирующих фирм,
- рост народонаселения,
- численность воюющих армий,
- изменение экологической обстановки,
- развитие науки и др.

Список цитированных источников

1. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. Пономарев, К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. – Мн.: Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.

УДК 372.85(035.3)

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ (ПРИ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ)

Гринько Е.П., Головач А.Г.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Одним из ярких представителей класса диофантовых уравнений второй степени является уравнение Пелля (его еще называют неопределённым уравнением Ферма), то есть уравнение: $x^2 - ay^2 = 1$, где a – целое положительное число, не являющееся

полным квадратом. Каждое уравнение Пелля имеет решение $(\pm 1; 0)$, которое называется тривиальным. Все остальные решения называются нетривиальными. Наименьшим нетривиальным решением уравнения Пелля называется такое решение, при котором двучлен $x + \sqrt{a}y$ принимает наименьшее значение из всех возможных.

Решений уравнения Пелля бесконечно много. Доказывается это с помощью биннома Ньютона следующим образом. Двучлен $x_0 + \sqrt{a}y_0$, где x_0, y_0 – наименьшее нетривиальное решение, возводится в n -ю степень и раскладывается по биному Ньютона. Если привести подобные слагаемые, то получается выражение вида $x_n + \sqrt{a}y_n$, где x_n, y_n – целые числа. Далее надо провести аналогичные операции для сопряжённого двучлена. В результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} (x_0 + \sqrt{a}y_0)^n = x_n + \sqrt{a}y_n, \\ (x_0 - \sqrt{a}y_0)^n = x_n - \sqrt{a}y_n. \end{cases} \quad (1)$$

Далее следует перемножить эти равенства и «свернуть» по формуле разности квадратов. Так как число n может принимать бесконечное множество значений, то решений уравнения Пелля тоже бесконечное множество. Существует несколько методов нахождения «всех» решений уравнения Пелля. Первый метод основан на формулах (1). Доказывается, что все решения получаются в результате возведения в n -ю степень двучлена $x_0 + \sqrt{a}y_0$. Второй метод основан на операции "гиперболический поворот", переводящей одну целочисленную точку на графике в следующую, и основан на формулах:

$$\begin{cases} x_n = x_0x_{n-1} + ay_0y_{n-1}, \\ y_n = x_0y_{n-1} + y_0x_{n-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Суть индийского метода состоит в следующем: сначала берут два целых числа, подставляют в правую часть уравнения Пелля и находят результат. Выбирают такие числа, чтобы правая часть была близка к единице. Далее получившееся уравнение умножается на уравнение Пелля. Скобки раскрывают, выделяют полные квадраты и подбирают новые числа, удовлетворяющие неравенству. Далее сокращают обе части равенства на НОД и опять умножают на уравнение Пелля и так далее, пока в правой части не получится единица.

Английский метод: алгоритм, основанный на цепных дробях, выполняется следующим образом: \sqrt{a} раскладывается в цепную дробь, которая будет периодична со второго полного частного. Далее находится период k и вычисляется выражение kn , где n – такое наименьшее натуральное число, что kn чётно. Далее находится подходящая дробь с таким индексом, числитель и знаменатель которой и будут наименьшим решением.

Пример 1. Решить уравнение Пелля: $x^2 - 8y^2 = 1$

Решение. 1) найдём наименьшее (x_0, y_0) , так как $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = [2; 1,4,1,4, \dots]$;

2) $S = 2$; 3) $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = \frac{P_1}{Q_1} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}$, следовательно, $x_0 = 3, y_0 = 1$. Остальные решения найдём по формулам:

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}[(x_0 + \sqrt{a}y_0)^n + (x_0 - \sqrt{a}y_0)^n], \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}[(x_0 + \sqrt{a}y_0)^n - (x_0 - \sqrt{a}y_0)^n]. \end{cases} \quad (3)$$

В 1842 г. бельгийский математик Эжен Шарль Каталан сформулировал утверждение: уравнение $x^a - y^b = 1$, где $x, y, a, b > 1$ имеет единственное решение в натуральных числах: $x = 3, y = 2, a = 2, b = 3$ (гипотеза Каталана). Гипотеза Каталана говорит о том, что разность между двумя числами, возведёнными в степень, не может быть равной 1,

за исключением $3^2 - 2^3$. Это утверждение было доказано в 2002 г. румынским математиком Преда Михайлеску. Доказательство использует методы из теории круговых полей.

Для решения уравнения $x^a - y^b = 1$, где $x, y, a, b > 1$, можно рассмотреть случаи: 1) x – чётное число, y – нечётное число; 2) x – нечётное число, y – чётное число. Каждый из вариантов распадается еще на два случая: 1) $x > y, a < b$; 2) $x < y, a > b$. Кроме этого, требуется перебрать комбинации a, b – чётные (нечётные) числа. Всего 16 вариантов перебора.

Уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может быть решено в целых ненулевых числах относительно x, y и z при натуральных значениях показателя n , больших 2; (Великая теорема Ферма). При $n = 2$ данное уравнение имеет решение, к примеру, 3, 4, 5. Эйлер доказал неразрешимость указанного уравнения при $n = 4$ (1738 г.) и при $n = 3$ (1770 г.), Г. Ламе – при $n = 7$ (1839 г.). В 1995 году Эндрю Уайлс, используя достижения современных ученых, сумел завершить доказательство великой теоремы Ферма.

С решением диофантовых уравнений связана одна из знаменитых проблем Давида Гильберта, сформулированных на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году: пусть дано произвольное диофантово уравнение; требуется указать общий метод, следуя которому, можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли оно решение в целых числах. В 1970 году ленинградский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что такого общего метода не существует.

УДК 519.1

О СЛОЖНОСТИ ТЬЮРИНГОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ

Даудов Д.Д.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Будько А.Е., к. ф.-м. н., доцент

В [1] была рассмотрена классификация машин Тьюринга по степени сложности их программ, заданных ориентированными графами. Там же было начато исследование сложности вычислений на машинах Тьюринга в зависимости от сложности их программ. В [2] это исследование было продолжено. В данных работах рассматриваются машины Тьюринга с внешним алфавитом $\{0,1\}$ и программы машин задаются ориентированными графами, вершины которых соответствуют внутренним состояниям, а дуги определяют команды. Будем считать, что в каждый момент времени лента имеет конечную длину, и к ней могут пристраиваться пустые ячейки. Длину ленты, имеющуюся в начальный момент, обозначим через n . Вершины соответствующие, начальным и конечным состояниям, называются соответственно начальной и конечной.

Поскольку программа задается графом, то сложность программы будет определяться сложностью соответствующего графа. Путь, начало и конец которого совпадают, называется циклом. Цикл называется элементарным, если все его вершины, за исключением начальной и конечной, различны. Кустом называется неконечная вершина вместе с входящими из нее двумя дугами. Цикл называется m -циклом, если в нем можно выделить ровно m различных элементарных циклов. Машина называется m -цикловой, если в ее графе имеются m -циклы, возможно c -циклы и нет d -циклов, где $c < m, d > m$. Граф может содержать кусты, дуги которых не входят ни в какой цикл. Класс m -цикловых машин обозначается через L_m . Таким образом, сложность структуры программы характеризует m -цикловость: чем больше m , тем сложнее структура программы.

В [1, 2] были получены верхние оценки сложности вычислений для машин классов $L_0 - L_3$. Для машин класса L_0 время вычисления не зависит от длины начальной записи и является константой. Для машин класса L_1 верхняя оценка времени вычисления является линейной, для машин классов L_2, L_3 – квадратичной.

В настоящей работе рассматривается построение машины класса L_5 . Показывается, что время и емкость работы этой машины над начальной конфигурацией вполне определенного вида являются уже экспоненциальными.

Список цитированных источников

1. Будько, А.Е. О двух классах машин Тьюринга / А.Е. Будько // Доклады АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792 – 793.
2. Будько, А.Е. Верхние оценки сложности вычислений для некоторых классов машин Тьюринга / А.Е. Будько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1987. – № 1. – С. 20.

УДК 517.983.54 + 519.6

СХОДИМОСТЬ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Деращиц Н.А.¹, Матысик О.В.²

¹Брестский государственный технический университет, г. Брест

²Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявная итерационная процедура

$$(E + \alpha A^3)x_{n+1} = x_n + \alpha A^2 y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y , ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A^3)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^2 y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ , т.е. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И, тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$.

Справедлива

Теорема 1. *При условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/6} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.*

Запишем общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (12n\alpha)^{-1/6} \|x\| + 6^{1/2} (n\alpha)^{1/6} \delta, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Оптимизируем оценку (4) по n . Для этого при заданном δ найдём такое значение числа итераций n , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (4), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-5/2} 3^{-2} \alpha^{-1} \delta^{-3} \|x\|^3. \quad (5)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), найдём её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2 \cdot 2^{1/12} 3^{1/6} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}. \quad (6)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии $\alpha > 0$ в энергетической норме имеет вид (6) и получается при $n_{\text{опт}}$ из (5).*

Замечание. *Из неравенства (6) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α . Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α и, поскольку на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$), то за счёт выбора α можно получить $n_{\text{опт}} = 1$, т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять*

$$\alpha_{\text{опт}} = 2^{-5/2} 3^{-2} \delta^{-3} \|x\|^3.$$

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Очевидно для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном ε ($0 < \varepsilon < \|A\|$) было $P_\varepsilon x = 0$, $P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где

$$P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda. \quad \text{Так как } x_{n,\delta} = A^{-1} \left[E - (E + \alpha A^3)^{-n} \right] y_\delta, \text{ то для выполнения последнего из}$$

указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ такова, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства H не требуется истокообразной представимости точного решения.

УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВАЛОВОГО РЕГИОНАЛЬНОГО ПРОДУКТА С ПОМОЩЬЮ НМ-СЕТЕЙ

Дунец А.Ю.

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Косарева Е.В., к. ф.-м. н., доцент*

Введение. Валовый региональный продукт (ВРП) определяется как сумма добавленных стоимостей (ВДС) видов экономической деятельности и чистых налогов на продукты. ВРП формируется в разрезе 15 видов экономической деятельности (далее – секция) [1]. Для расчета ВРП области за каждый отчетный период (месяц, квартал, год) в отрас-

левые отделы главного статистического управления области поступает из районных отделов статистики перечень форм государственной статистической отчетности, используемых при формировании ВРП. Затем данные обрабатываются в отраслевых отделах и поступают в отдел статистического регистра и внутреннего обследования (ОСР и ВО), где непосредственно рассчитывается ВРП. Ранее в работе [2] была разработана стохастическая модель образования ВРП в разрезе отраслей на основе НМ-сети. НМ (Howard-Matalytski)-сеть – это сеть массового обслуживания (МО), в которой заявка при переходе из одной системы в другую приносит последней системе некоторый доход, а доход первой системы уменьшается на эту величину. В последнее время НМ-сети широко используются для моделирования различных реальных объектов в экономике, технике и производстве, для которых необходимо исследовать не только функциональные характеристики, но и оценить доходы или издержки, связанные с функционированием этих систем.

Стохастическая модель ВРП. Сетевой моделью образования и прогнозирования ВРП может служить открытая НМ-сеть, состоящая из 15 периферийных систем массового обслуживания (СМО) S_1, S_2, \dots, S_{15} , которые соответствуют отраслевым отделам главного статистического управления области, и центральной системы S_{16} , которая соответствует ОСР и ВО. Заявками являются данные от организаций и предприятий различных секций, доходы от переходов заявок внутри сети – это ВДС и чистые налоги соответствующих отраслей. Для того чтобы найти ВРП области, нужно найти ожидаемый доход центральной СМО. Для этого можно применить методику, описанную в [2].

Пусть в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Интенсивность обслуживания заявок $\mu_i(k_i(t))$ в момент времени t в системе S_i зависит от числа заявок в этой системе $k_i(t)$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через m_i – число линий обслуживания в i -й СМО, p_{0j} – вероятность поступления заявки из внешней среды в систему S_j , $\sum_{j=1}^n p_{0j} = 1$; p_{ij} – вероятность перехода заявки после обслуживания в системе S_i в систему S_j , $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим динамику изменения доходов некоторой системы S_i сети, $i = \overline{1, n}$. Пусть $V_i(t)$ – ее доход в момент времени t и $V_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1, n}$. Доход этой СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно представить в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \quad (1)$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода системы S_i на интервале времени $[t, t + \Delta t)$. Для нахождения этой величины выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt , а также связанные с ними изменения доходов периферийных систем S_i , $i = \overline{1, n-1}$, и центральной системы S_n :

1. С вероятностью $\lambda p_{0i} \Delta t + o(\Delta t)$ в систему S_i из внешней среды поступит заявка, которая принесет ей доход в размере $r_{0i}(1 + 0.01I(t + \Delta t))$, где r_{0i} – СВ с математическим ожиданием $M\{r_{0i}\} = a_{0i}$; ее экономический смысл заключается в том, что она равна сумме ВДС и чистых налогов i -й секции экономики в ценах сопоставимых к началу периода прогнозирования, а $I(t)$ – уровень инфляции на интервале времени $[0, t]$, $i = \overline{1, n-1}$.

2. С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t + o(\Delta t)$ заявка перейдет из системы S_i в систему S_n , при этом доход системы S_n возрастет на величину $r_{in}(1 + 0.01I(t + \Delta t))$, а доход системы S_i уменьшится на эту величину, где r_{in} – СВ с математическим ожиданием

$M\{r_{in}\} = a_{in}, i = \overline{1, n-1}, u(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ 1, x > 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда. Исходя из постановки задачи, следует, что $r_{0i} = r_{in}$.

3. С вероятностью $\mu_n(k_n(t))u(k_n(t))\Delta t + o(\Delta t)$ заявка из системы S_n перейдет во внешнюю среду, при этом доход системы S_n уменьшится на величину $R_{n0}(1+0.01I(t+\Delta t))$, где R_{n0} – СВ с математическим ожиданием $M\{R_{n0}\} = b_{n0}$ и R_{n0} равен ВРП области в ценах, сопоставимых к началу периода прогнозирования.

4. С вероятностью $1 - (\lambda p_{0i} + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)))\Delta t + o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t, t + \Delta t)$ изменение состояния системы S_i не произойдет, $i = \overline{1, n-1}$.

5. С вероятностью $1 - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Delta t + o(\Delta t)$ на отрезке времени $[t, t + \Delta t)$ изменение состояния центральной системы S_n не произойдет.

Кроме того, за каждый малый промежуток времени Δt система S_i может увеличить свой доход на величину $r_i I(t + \Delta t)\Delta t$, где r_i – СВ с математическим ожиданием $M\{r_i\} = c_i, i = \overline{1, n}$. Будем считать, что СВ r_{in}, r_{0i}, R_{n0} независимы по отношению к СВ $r_i, i = \overline{1, n}$.

Пусть $N_i(t)$ – среднее число заявок в i -й системе в начальный момент времени, $i = \overline{1, n}$. Тогда, используя методику, описанную в [2], для случая, когда сеть функционирует так, что в среднем в ней не наблюдается очередей, т.е. $\min(N_i(t), m_i) = N_i(t), i = \overline{1, n}$, получаем выражение для дохода центральной СМО

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = (1 + 0.01I(t)) \left(c_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i N_i(t) a_{in} - \mu_n N_n(t) b_{n0} \right), v_n(0) = v_{n0}, \quad (2)$$

где $N_i(t)$ находится с помощью выражений (3)

$$N_i(t) = \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i} + e^{-\mu_i t} \left(N_i(0) - \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i} \right), i = \overline{1, n-1} \quad (3)$$

$$N_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i} + e^{-\mu_i t} \left(N_i(0) - \frac{\lambda p_{0i}}{\mu_i} \right) \right\} (1 - e^{-\mu_n t}) + N_n(0) e^{-\mu_n t}$$

Далее реализуем австрийский подход к моделированию инфляции $I(t)$ из [3], адаптированный под экономику Республики Беларусь:

$$I(t) = -0,096 CPI_t^{petrol} - 0,144 P_{imp_t} + 0,272 NW_t + 0,729 ExD_t - 5,142, \quad (4)$$

где P_{imp_t} – средние цены импорта, CPI_t^{petrol} – индекс потребительских цен на бензин, NW_t – номинальная среднемесячная заработная плата.

Используя статистические данные по месяцам 2012 года, было найдено представление $I(t)$ в виде кусочно-постоянной функции. Подставив $I(t)$ и (3) в систему (2), можно найти выражение для ожидаемого дохода системы S_n , зависящее от времени. Это позволяет получить соотношение для ВРП в любой момент времени $t, [t \in 0, T]$.

Проведенные исследования показали, что относительная погрешность квартального ВРП, рассчитанного по представленной модели, не превышает 34%, а в среднем ВРП за год отклоняется от реального значения всего на 14%.

Список цитированных источников

1. Методика по формированию валового регионального продукта производственным методом в текущих и постоянных ценах: Постановление Национального статистического комитета Республики Беларусь № 277 от 27.12.2010.

2. Колузаева, Е.В. Исследование НМ-сетей со случайными доходами от переходов между их состояниями / Е.В. Колузаева, М.А. Маталыцкий // Известия Томского государственного университета. Сер. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2009. – №5. – С.91–100.

3. Хацкевич, Г.А. Современные подходы к моделированию инфляционных процессов в экономике Беларуси / Г.А. Хацкевич, А.М. Картун // Банковский Вестник, 2008. – №4. – С.11-16.

УДК 517.8

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ И ТРАЕКТОРИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПРИ СВОБОДНОМ ЕЁ ПАДЕНИИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

Желткович А.Е., Лазарук А.В., Лавринюк Е.Ю., Бышко А.Г.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Задача «Определение величины отклонения при падении от вертикальной прямой материальной точки, находящейся в северном полушарии Земли, падающей с высоты 500 метров, когда точка находится на некоторой параллели» была сформулирована в [1]. Некоторые подходы к её решению сформулированы в работе [2]. Одним из условий при решении задачи являлось требование определить величину отклонения при падении в восточном направлении. При решении задачи принимается ряд допущений. Так же пренебрегают двумя проекциями относительной скорости на оси y и x , (см. рис. 1) и влиянием соответственно на относительное движение точки в этих направлениях углового вращения Земли.

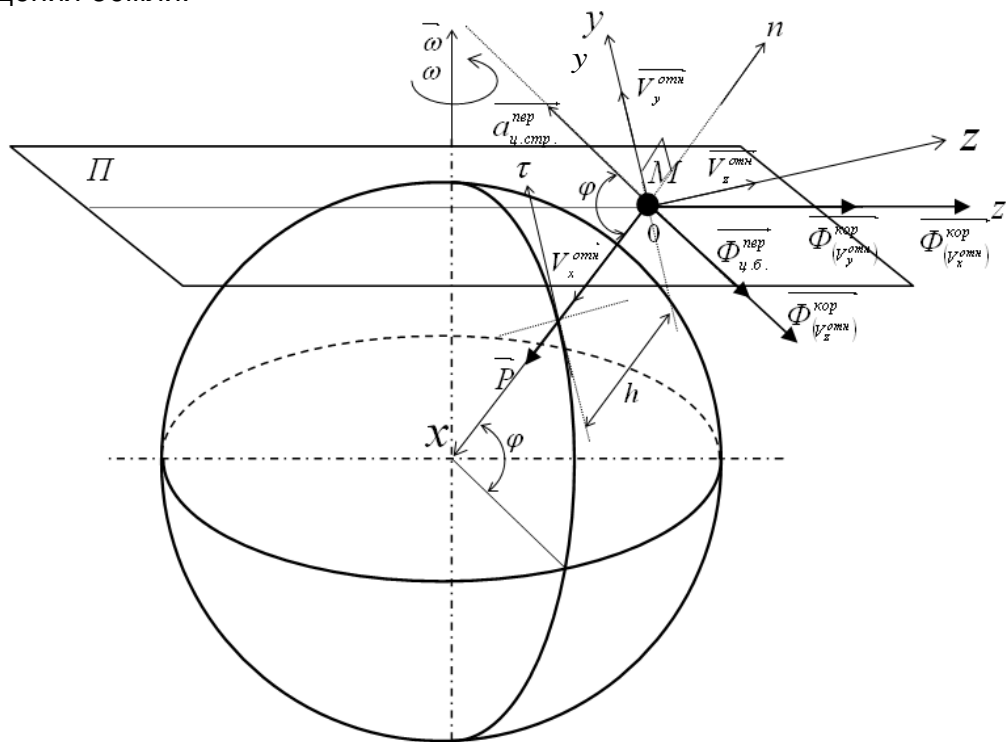


Рисунок 1 – Падение материальной точки M с высоты h

$$\begin{cases} ma_x = P - \Phi_{(V_z^{отн})}^{кор} \cdot \cos(\varphi) - \Phi_{у.б.}^{пер} \cdot \cos(\varphi) \\ ma_y = -\Phi_{(V_z^{отн})}^{кор} \cdot \sin(\varphi) - \Phi_{у.б.}^{пер} \cdot \sin(\varphi) \\ ma_z = \Phi_{(V_x^{отн})}^{кор} + \Phi_{(V_y^{отн})}^{кор} \end{cases} \quad (1)$$

В данной работе рассматривается точное решение полученных дифференциальных уравнений, где: m – масса точки; g – ускорение свободного падения; φ – угол обозначающий данную параллель северного полушария; a_x, a_y, a_z – проекции относительных ускорений на оси координат x, y, z ; $\Phi_{(V_z^{omni})}^{kop}$ – Кориолиса сила инерции от скорости V_z^{omni} (V_z^{omni} – проекция относительной скорости на ось Z); $\Phi_{(V_x^{omni})}^{kop}$ – Кориолиса сила инерции от скорости V_x^{omni} (V_x^{omni} – проекция относительной скорости на ось x); $\Phi_{(V_y^{omni})}^{kop}$ – Кориолиса сила инерции от скорости V_y^{omni} (V_y^{omni} – проекция относительной скорости на ось y); $\Phi_{ц.б.}^{nep}$ – переносная центробежная сила; Π – плоскость параллельная экваториальной.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида (1):

$$\begin{cases} V_x' = \alpha_x V_z + \beta_x \\ V_y' = \alpha_y V_z + \beta_y \\ V_z' = \alpha_z V_x + \beta_z V_y \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями $V_x(0) = v_x^0, V_y(0) = v_y^0, V_z(0) = v_z^0$.

Продифференцируем по t третье уравнение системы: $V_z'' = \alpha_z V_x' + \beta_z V_y'$.

Учитывая первое и второе уравнения системы, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$V_z'' = \alpha_z V_x' + \beta_z V_y' = \alpha_z (\alpha_x V_z + \beta_x) + \beta_z (\alpha_y V_z + \beta_y) = (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) V_z + \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$$

или уравнение $V_z'' - (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) V_z = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$.

Введем обозначения: $p^2 = -(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)$, так как $\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z < 0$ и $q = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$.

Тогда получим уравнение $V_z'' + p^2 V_z = q$. Найдем решение соответствующего однородного уравнения $V_z'' + p^2 V_z = 0$.

Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + p^2 = 0$, получим $\lambda = \pm i\sqrt{p}$, где $p = \sqrt{-(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)}$.

Тогда $V_z^0 = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt)$ – решение однородного уравнения второго порядка $V_z'' + p^2 V_z = 0$.

Частное решение дифференциального уравнения $V_z'' + p^2 V_z = q$ будем отыскивать в виде $V_z^1 = A$, так как корни характеристического уравнения $\lambda = \pm i\sqrt{p}$ отличны от 0.

Подставляя $V_z^1 = A$, $(V_z^1)'' = 0$ ($(V_z^1)' = 0$) в уравнение $V_z'' + p^2 V_z = q$, получим $p^2 A = q$.

Откуда $A = \frac{q}{p^2}$. Следовательно, $V_z^1 = \frac{q}{p^2}$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $V_z'' + p^2 V_z = q$. Поэтому $V_z = V_z^0 + V_z^1 = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2}$ – общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $V_z'' + p^2 V_z = q$.

Подставляя $V_z = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2}$, в первое и второе уравнения системы (2) получим, что

$$V'_x = \alpha_x \left(c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \right) + \beta_x \quad \text{и} \quad V'_y = \alpha_y \left(c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \right) + \beta_y.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим, что

$$V_x = -\frac{\alpha_x c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_x c_2}{p} \sin(pt) + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t + c_3 \quad \text{и}$$

$$V_y = -\frac{\alpha_y c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_y c_2}{p} \sin(pt) + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t + c_4.$$

Учитывая третье уравнение системы, получим, что

$$V'_z = \alpha_z V_x + \beta_z V_y = \alpha_z \left(-\frac{\alpha_x c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_x c_2}{p} \sin(pt) + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t + c_3 \right) +$$

$$+ \beta_z \left(-\frac{\alpha_y c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_y c_2}{p} \sin(pt) + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t + c_4 \right) =$$

$$= -(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) \cdot \frac{c_1}{p} \cos(pt) + (\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) \cdot \frac{c_2}{p} \sin(pt) +$$

$$+ \left((\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z) \frac{q}{p^2} + \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z \right) t + \alpha_z c_3 + \beta_z c_4.$$

Так как $p^2 = -(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)$ и $q = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$, получим

$$V'_z = p^2 \cdot \frac{c_1}{p} \cos(pt) - p^2 \cdot \frac{c_2}{p} \sin(pt) + \left(-p^2 \cdot \frac{q}{p^2} + q \right) t + \alpha_z c_3 + \beta_z c_4 =$$

$$= c_1 p \cos(pt) - c_2 p \sin(pt) + \alpha_z c_3 + \beta_z c_4.$$

С другой стороны $V'_z = c_1 p \cos(pt) - c_2 p \sin(pt)$, так как $V_z = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2}$.

Тогда выполняется условие $\alpha_z c_3 + \beta_z c_4 = 0$. Откуда $c_4 = -\frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3$, учитывая, что $\beta_z \neq 0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\alpha_x c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_x c_2}{p} \sin(pt) + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t + c_3 \\ V_y = -\frac{\alpha_y c_1}{p} \cos(pt) + \frac{\alpha_y c_2}{p} \sin(pt) + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t - \frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3 \\ V_z = c_1 \sin(pt) + c_2 \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \end{cases} \quad \text{— общее решение системы}$$

линейных дифференциальных уравнений (2).

Учитывая начальные условия $V_x(0) = v_x^0$, $V_y(0) = v_y^0$, $V_z(0) = v_z^0$, получим

$$V_x(0) = -\frac{\alpha_x c_1}{p} + c_3 = v_x^0; \quad V_y(0) = -\frac{\alpha_y c_1}{p} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3 = v_y^0; \quad V_z(0) = c_2 + \frac{q}{p^2} = v_z^0.$$

Откуда $c_2 = v_z^0 - \frac{q}{p^2}$. Тогда

$$\begin{cases} -\frac{\alpha_x c_1}{p} + c_3 = v_x^0 \\ -\frac{\alpha_y c_1}{p} - \frac{\alpha_z}{\beta_z} c_3 = v_y^0 \end{cases}.$$

$$\text{Откуда } c_1 = \frac{\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0}{p}, \quad c_2 = \frac{\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0}{p}, \quad c_3 = -\beta_z \cdot \frac{\alpha_y v_x^0 - \alpha_x v_y^0}{p^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\alpha_x(\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0)}{p^2} \cos(pt) + \frac{\alpha_x}{p} \left(v_z^0 - \frac{q}{p^2} \right) \sin(pt) + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t - \frac{\beta_z(\alpha_y v_x^0 - \alpha_x v_y^0)}{p^2} \\ V_y = -\frac{\alpha_y(\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0)}{p^2} \cos(pt) + \frac{\alpha_y}{p} \left(v_z^0 - \frac{q}{p^2} \right) \sin(pt) + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t + \frac{\alpha_z(\alpha_y v_x^0 - \alpha_x v_y^0)}{p^2} \\ V_z = \frac{\alpha_z v_x^0 + \beta_z v_y^0}{p} \sin(pt) + \left(v_z^0 - \frac{q}{p^2} \right) \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \end{cases} \quad (3)$$

– решение системы линейных дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями $V_x(0) = v_x^0$, $V_y(0) = v_y^0$, $V_z(0) = v_z^0$, где $p = \sqrt{-(\alpha_x \alpha_z + \alpha_y \beta_z)}$ и $q = \alpha_z \beta_x + \beta_y \beta_z$.

В частном случае, если $V_x(0) = 0$, $V_y(0) = 0$, $V_z(0) = 0$, получаем решение

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\alpha_x q}{p^3} \sin(pt) + \left(\alpha_x \frac{q}{p^2} + \beta_x \right) t \\ V_y = -\frac{\alpha_y q}{p^3} \sin(pt) + \left(\alpha_y \frac{q}{p^2} + \beta_y \right) t. \\ V_z = -\frac{q}{p^2} \cos(pt) + \frac{q}{p^2} \end{cases} \quad (4)$$

Интегрируя уравнения системы, получим

$$\begin{cases} x(t) = \int V_x(t) dt = \frac{\alpha_x q}{p^4} \cos(pt) + \frac{\beta_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 + C_x \\ y(t) = \int V_y(t) dt = \frac{\alpha_y q}{p^4} \cos(pt) - \frac{\alpha_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 + C_y \\ z(t) = \int V_z(t) dt = -\frac{q}{p^3} \sin(pt) + \frac{q}{p^2} t + C_z \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая начальные условия $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, получим

$$c_y = -\frac{\alpha_y q}{p^4}, \quad c_x = -\frac{\alpha_x q}{p^4}, \quad c_z = 0$$

Т.о., окончательно перемещения материальной точки запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\alpha_x q}{p^4} \cos(pt) + \frac{\beta_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 - \frac{\alpha_x q}{p^4} \\ y(t) = \frac{\alpha_y q}{p^4} \cos(pt) - \frac{\alpha_z(\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)}{2p^2} t^2 - \frac{\alpha_y q}{p^4} \\ z(t) = -\frac{q}{p^3} \sin(pt) + \frac{q}{p^2} t \end{cases} \quad (6)$$

Заключение

Область применения данного решения может быть распространена на решение прикладных задач, связанных с расчётом точной скорости, траектории и места падения сводимых с орбиты космических объектов, отработавших свой срок (спутники различного назначения, мусор, оставшийся от пилотируемых станций, ступени разгонных блоков ракет), представляющих в настоящий момент серьёзную проблему для орбитальной навигации не только существующих автоматических спутников, международной космической станции, но и других планируемых и осуществляемых миссий.

Список цитированных источников

1. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. 49-е изд., стер. / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 448 с.: ил. – (Учебник для вузов. Специальная литература).

2. Теоретическая механика. Динамика. Практикум: учеб. пособие: в 2 ч. / В.А. Акимов [и др.]; под общ. ред. проф. А.В. Чигарёва и доц. Н.И. Горбача. – Минск: Новое знание; М.: ЦУПЛ, 2010. – Ч. 1.: Динамика материальной точки. – 528 с.: ил.

УДК 517.9

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ НОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Жук А.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0; a] \subset R$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t)) L^j(t), \quad i = \overline{1, p} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где f^{ij} $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ – липшицевы функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$, $x_0 \in R^p$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T . Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1, q}$.

Таким образом, правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций, которое однозначно не определено, и решение системы уравнений (1) зависит от подхода к трактовке этой системы. Основные подходы для исследования таких уравнений можно охарактеризовать следующим образом: переход к интегральному уравнению, где интеграл понимается в определенном смысле, аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами, формализация данной задачи в рамках теории обобщенных функций.

В работе [3] показано, что все указанные выше подходы можно охватить одним, связанным с вложением данной задачи в алгебру новых обобщенных функций и дальнейшим исследованием решений на ассоциированном уровне в этой алгебре. Отметим, что одномерный случай рассматривался в работе [2].

Напомним определение алгебры мнемофункций [3]. Пусть R – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей из элементов R введем отношение эквивалентности следующим образом: $(x_n) \sim (y_n)$, если $\exists n_0 \in N$, $\forall n \geq n_0$, $x_n = y_n$, тогда

обобщенным числом назовем класс эквивалентности $\tilde{x} = [(x_n)]$. Множество обобщенных чисел обозначим \tilde{R} . Аналогично можно построить расширение \tilde{T} отрезка $T = [0; a]$. Выделим в \tilde{R} следующие подмножества:

$$H = \{\tilde{h} \in \tilde{R} : \tilde{h} = [(h_n)], h_n > 0, \forall n \in N, \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0\},$$

$$I = \{\tilde{h} \in H : 1/n = o(h_n), h_n \rightarrow 0, \forall (h_n) \in \tilde{h}\},$$

$$S = \{\tilde{h} \in H : h_n = o(1/n), n \rightarrow \infty, \forall (h_n) \in \tilde{h}\}.$$

На множество всех последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $f_n \in C^\infty(R)$, введем отношение эквивалентности: $(f_n) \sim (g_n)$, если $\exists n_1 \in N, \forall n \geq n_1, \forall x \in R, f_n(x) = g_n(x)$. Класс эквивалентности $[(f_n)]$ будем называть мнемофункцией [3] и обозначать \tilde{f} . Обозначим через $G(R)$ множество всех мнемофункций, которое является алгеброй с покоординатными операциями умножения и сложения. Алгебру мнемофункций вида $\tilde{f}(\tilde{x}) = [(f_n(x_n))]$, где $\tilde{x} = [(x_n)] \in \tilde{R}$, а $[f_n(x)] \in G(R), \forall x \in R$, обозначим как $G(\tilde{R})$. Определим на $G(\tilde{T})$ обобщенный дифференциал

$$d_{\tilde{h}} \tilde{f}(\tilde{x}) = [(f_n(x + h_n) - f_n(x))], \tilde{x} = [(x)] \in \tilde{T}, \tilde{h} \in H.$$

Обобщенный дифференциал $d_{\tilde{h}}$ назовем I – обобщенным (S – обобщенным) дифференциалом и будем обозначать $d_{\tilde{h}}^I (d_{\tilde{h}}^S)$, если $\tilde{h} \in I$ ($\tilde{h} \in S$).

Будем говорить, что мнемофункция $\tilde{f} = [(f_n)]$ ассоциирует элемент f из топологического пространства Ω , если последовательность $\{f_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к f в топологии Ω .

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций.

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), \quad i = \overline{1, p} \quad (3)$$

с начальным условием $\tilde{x}|_{[0, \tilde{h}]} = \tilde{x}^0$, где $\tilde{h} = \{[h_n]\} \in H, \tilde{a} = \{[a]\} \in T$ и $\tilde{t} = \{[t_n]\} \in \tilde{T}, \tilde{x} = \{[x_n(t)]\}, \tilde{f} = \{[f_n(x)]\}, \tilde{x}^0 = \{[x_n^0(t)]\}, \tilde{L} = \{[L_n(t)]\}$ и $x_n^0 \rightarrow x(0)$.

Наряду с задачей (3) с начальным условием $\tilde{x}|_{[0, \tilde{h}]} = \tilde{x}^0$ рассмотрим системы уравнений с I – и S – обобщенными дифференциалами.

$$d_{\tilde{h}}^I \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}) \quad (4)$$

$$d_{\tilde{h}}^S \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}) \quad (5)$$

Будем говорить, что функция x является I – ассоциированным (S – ассоциированным) решением уравнения (3), если данная функция является ассоциированным решением задачи (4) ((5)).

Таким образом, под решением системы дифференциальных уравнений (1) будем понимать ассоциированное решение системы уравнений в дифференциалах (3), существование и единственность решения которой доказано в [1]. Везде далее будем полагать, что необременительные условия этой теоремы выполнены.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1, p} \quad (6)$$

$$x_n(t)|_{[0, h_n]} = x_{n0}(t), \tag{7}$$

Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s)\rho_n(s)ds$, $j = \overline{1, q}$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \geq 0$,

$supp(\rho) \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)ds = 1$, а $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, где $\tilde{\rho}_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^p \tilde{\rho}(nx_0, nx_1, \dots, nx_p)$,

$\tilde{\rho} \in C^\infty(R^{p+1})$, $\tilde{\rho} \geq 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \tilde{\rho}(x_0, x_1, \dots, x_p) dx_0 dx_1 \dots dx_p = 1$, $supp(\tilde{\rho}) \subset [0,1]^{p+1}$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) – (5) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t + kh_n, x_n(\tau_t + kh_n)) [L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)],$$

где $i = \overline{1, p}$.

Случай Ито. Для описания предельного поведения задачи (6) – (7) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^{t+} f^{ij}(s, x(s-)) dL^j(s), \quad i = \overline{1, p} \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть f^{ij} $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда I – ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если для любого $t \in T$ выполняется $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \rightarrow 0$.

В случае Стратоновича для описания предельного поведения задачи (6) – (7) рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1, p}, \tag{9}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r+) - L^d(\mu_r-)$ – величина скачка.

$S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, где $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из

уравнения $\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)) ds$, $i = \overline{1, p}$.

Теорема 2. Пусть f^{ij} $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1, q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда S – ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (9), если для любого $t \in T$ выполняется $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \rightarrow 0$.

Список цитированных источников

1. Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2009. – №2. – С. 81 – 86.
2. Ковальчук, А.Н. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением / А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский // Известия вузов. Математика. – 2005. – №3. – С. 23–31.
3. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, №5. – С. 23–27.

УДК 517.925

УСЛОВИЯ АЛГЕБРОИДНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ДОМИНИРУЮЩИМИ ЧЛЕНАМИ

Завадский А.Ф.*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест**Научный руководитель: Климашевская И.Н., к. ф.-м. н., доцент*

Одной из основных задач аналитической теории нелинейных дифференциальных уравнений является задача нахождения классов дифференциальных уравнений и систем, решения которых имеют лишь простейшие подвижные особенности – алгебраические. Для уравнений первого порядка эта задача была решена Пенлеве. Он доказал [1], что уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и ее производной, не имеют решений с подвижными трансцендентными и существенно особыми точками. Для уравнений высшего порядка или систем дифференциальных уравнений аналогичное утверждение места не имеет.

В работе рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{p(z)x^{p_1}y^{p_2} + P_1(x, y, z)}{r(z)x^{r_1}y^{r_2} + R_1(x, y, z)} = \frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)}, \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{q(z)x^{q_1}y^{q_2} + Q_1(x, y, z)}{s(z)x^{s_1}y^{s_2} + S_1(x, y, z)} = \frac{Q(x, y, z)}{S(x, y, z)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y, z – комплексные переменные, а P, R, Q и S – многочлены относительно x и y , коэффициенты которых – аналитические функции относительно z . Область аналитичности этих коэффициентов обозначим D . p_1 и p_2 , r_1 и r_2 , q_1 и q_2 , s_1 и s_2 – степени многочленов P, R, Q и S по x и y , причем члены со старшей степенью многочленов одновременно по x и y не содержатся в P_1, R_1, Q_1 и S_1 соответственно.

Ставится задача: найти условия, при выполнении которых система (1) не имеет решений

$$(x(z), y(z)), \quad (2)$$

обладающих свойством

$$x(z) \rightarrow \infty, y(z) \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow z_0 \in D, \quad (3)$$

для которых точка z_0 являлась бы подвижной трансцендентной точкой.

С помощью замены $x = \frac{1}{u}$ и $y = \frac{1}{v}$ система (1) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} &= \frac{p(z) + P_2(u, v, z)}{r(z) + R_2(u, v, z)} \cdot u^{r_1-p_1+2} v^{r_2-p_2}, \\ \frac{dv}{dz} &= \frac{q(z) + Q_2(u, v, z)}{s(z) + S_2(u, v, z)} \cdot u^{s_1-q_1} v^{s_2-q_2+2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для изучения условий существования решений со свойством (3) у системы (1) и условий алгеброидности особых точек этих решений применяется метод, основанный на го-

ломорфности правых частей системы (4) и систем, производных от нее [2]. Доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. При выполнении условий

$$p_1 - r_1 \leq 2, p_2 \leq r_2, q_1 \leq s_1, q_2 - s_2 \leq 2 \quad (5)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место равенство

$$p(z_0)r(z_0)q(z_0)s(z_0) \neq 0, \quad (6)$$

система (1) либо имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{-m+i}, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{-n+i},$$

($\alpha_0 \beta_0 \neq 0$, а $m > 0$ и $n > 0$ – целые числа), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, либо вовсе не имеет решений, обладающих свойством (3) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Теорема 2. При выполнении условий

$$p_1 - r_1 \geq \max\{2, q_1 - s_1 + 2\}, p_2 \geq r_2, q_2 - s_2 \leq p_2 - r_2 + 2 \quad (7)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место равенство (6), система (1) либо имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{i-1}{n}}, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{i-m}{n}},$$

($\alpha_0 \beta_0 \neq 0$, а $m > 0$ и $n > 0$ – целые числа), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, как правило, критическим, либо вовсе не имеет решений, обладающих свойством (3) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Теорема 3. При выполнении условий

$$p_1 - r_1 \leq q_1 - s_1 + 2, q_1 \geq s_1, q_2 - s_2 \geq \max\{2, p_2 - r_2 + 2\} \quad (8)$$

и любом конечном $z_0 \in D$, для которого имеет место равенство (6), система (1) либо имеет единственное решение (2) со свойством (3) вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^{\frac{i-m}{n}}, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (z - z_0)^{\frac{i-1}{n}},$$

($\alpha_0 \beta_0 \neq 0$, а $m > 0$ и $n > 0$ – целые числа), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, как правило, критическим, либо вовсе не имеет решений, обладающих свойством (3) при $z \rightarrow z_0$ хотя бы по некоторому пути L .

Точки $z_0 \in D$, в которых $p(z_0)r(z_0)q(z_0)s(z_0) \neq 0$, отнесем к неподвижным точкам системы (1).

Таким образом, каждое из условий (5), (7) и (8) выделяет классы систем вида (1), не имеющих решений (2) со свойством (3), для которых точка z_0 являлась бы подвижной трансцендентной точкой.

Список цитированных источников

1. Матвеев, Н.М. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – СПб.: СПбГУ, 1995. – 314 с.
2. Кондратеня, С.Г. Дифференциальные уравнения / С.Г. Кондратеня. – 1976. – вып.12, №4.

УДК 518.82

ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ**Зубей Е.В.***Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест**Научный руководитель: Юдов А.А., к.ф.-м.н., доцент*

Ставится задача – среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства.

Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли \overline{G} и \overline{G}_i , затем находятся все n -мерные подпространства алгебры Ли \overline{H} , инвариантные относительно $ad \overline{G}_i$. Среди таких пространств находятся дополнительные к \overline{G}_i . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i . При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Группу Ли G движений пространства 1R_4 будем задавать как совокупность матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию:

$$A\varepsilon_{4,1}A^T = \varepsilon_{4,1} \quad (2)$$

где $\varepsilon_{4,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли \overline{G} будет задаваться как совокупность матриц вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix} \quad (3)$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B\varepsilon_{4,1} + \varepsilon_{4,1}B = 0$.

Точки пространства 1R_4 будем задавать в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x \quad (4)$$

Группа G действует в пространстве 1R_4 слева по правилу:

$$x \rightarrow a \cdot x. \quad (5)$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$${}^1R_4:G = H \otimes T_4. \quad (6)$$

Алгебра Ли \overline{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \overline{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4 :

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4. \quad (7)$$

Базис в алгебре Ли \overline{G} группы Ли G движений пространства 1R_4 берется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52}, \\ i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке, β -м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули.

Причем векторы i_5, i_6, \dots, i_{10} образуют базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H , векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4 , а операция коммутирования в алгебре Ли \overline{G} задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA \quad A, B \in \overline{G}. \quad (9)$$

Алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6, \overline{G}_7, \overline{G}_8, \overline{G}_9, \overline{G}_{10}, \overline{G}_{11}, \overline{G}_{12}, \overline{G}_{13}$, задаются соответственно базисами

$$\begin{aligned} \{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - \\ i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \\ \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}. \end{aligned}$$

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G .

Затем в работе классифицируются все канонические морфизмы однородных пространств, структурной группой которых является группа Ли вращений пространства Минковского.

Список цитированных источников

1. Юдов, А.А. О редуктивности однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 1R_4 / А.А. Юдов, О.В. Пинчук // Вестник БрГУ. – 2011. – № 1. – С. 123–128.
2. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства 2R_4 / А.А. Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. – № 1(30). – С. 35–41.

УДК 519.872

РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ ДОКУМЕНТООБОРОТА

Капура Д.П.

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Маталыцкий М.А., д. ф.-м. н., профессор*

Система документооборота организации включает процессы работы с документами, начиная от регистрации до списания документов в архив. Все процедуры передачи документов исполнителям, выполнение указанных в них поручений, контроль исполнительской дисциплины фиксируются.

Автоматизированные системы обработки документов обеспечивают действенный эффект в том случае, когда архитектура системы предусматривает адекватное отражение существующих в организации процессов информационного взаимодействия и оптимальное распределение потоков работ по автоматизированным рабочим местам сотрудников организации.

Разработка моделей функционирования является традиционным средством определения основных характеристик проектируемой системы, а также средством получения данных о видах и необходимом количестве рабочих мест, которые должны быть включены в архитектуру системы.

Наибольший интерес представляют документы в процессе обработки, направляемые в подведомственные организации. Именно в этом процессе занято большинство сотрудников организации, так как прохождение документов является одним из основных показателей деятельности иерархической управленческой организации [1].

Моделью системы документооборота любой организации может служить открытая сеть массового обслуживания с однотипными заявками. Системами в такой сети являются отделы организации, заявками – документы, а линиями обслуживания являются сотрудники организации.

Предполагается, что в открытую НМ-сеть массового обслуживания, состоящую из n систем обслуживания (СМО) S_1, S_2, \dots, S_n , поступает произвольный поток заявок (документов), имеющий среднюю интенсивность λ . Дисциплины обслуживания в каждой из них – FIFO. Система обслуживания S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания заявок в которых распределено по произвольному закону с интенсивностью μ_i , $i = \overline{1, n}$, p_{ij} – вероятность того, что заявка после обслуживания в системе S_i поступит на обслуживание в систему S_j , $j = \overline{1, n}$.

Для нахождения средних характеристик систем сети использовался рекуррентный по моментам времени метод анализа средних значений, итерационные соотношения при этом имеют вид [2]:

$$\rho_i(t) = \min(N_i(t), m_i), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\tau_i(t) = \frac{N_i(t)}{\mu_i \rho_i(t)}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$N_i(t+1) = \lambda_i \tau_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где λ_i – интенсивность входящего потока заявок в i -ю СМО, $i = \overline{1, n}$, $\lambda_i = \lambda e_i$, $i = \overline{1, n}$, а величины e_j удовлетворяют системе линейных уравнений: $e_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^n e_i p_{ij}$, $j = \overline{1, n}$;

$N_i(t)$ – среднее число заявок в i -й СМО на интервале времени $[0, t]$, $\rho_i(t)$ – среднее число занятых линий обслуживания в i -й СМО на интервале времени $[0, t]$, $\tau_i(t)$ – среднее время пребывания заявок (в очереди и на обслуживании) на интервале времени $[0, t]$. Начальные условия могут быть выбраны следующим образом: $N_i(0) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Среди различных систем документооборота встречаются такие, в которых обработка документов приносит организации определенный доход, например, это может быть в страховых компаниях. Страховая компания (СК) может иметь доходы:

- 1) от страховой деятельности;
- 2) от инвестиционной деятельности и размещения временно свободных средств;
- 3) от других операций.

Например, доходы от страховой деятельности включают: заработанные страховые платежи по договорам страхования и перестрахования; комиссионные вознаграждения за перестрахование; доли от страховых сумм и страховых возмещений, уплаченных перестраховщиками; возвращенные суммы из централизованных страховых резервов; возвращенные суммы технических резервов. Обработка таких документов приносит СК доход.

Расходы СК несет из-за: выплаты страховых сумм и страховых возмещений; отчисления в централизованные страховые резервные фонды; отчислений в технические резервы, отличные от резервов незаработанных премий, в случаях и на условиях, предусмотренных актами действующего законодательства. Следует заметить, что именно обработка соответствующих документов приносит СК расходы.

Для рассматриваемой модели сформулирована оптимизационная задача, связанная с максимизацией доходов сети в целом (по числу линий обслуживания):

$$\left\{ \begin{aligned} W(T, m_1, \dots, m_n) &= \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^n (v_i(t) - d_i N_i(t) - E_i m_i) dt \rightarrow \max_{m_1, m_2, \dots, m_n}, \\ m_i &\leq a_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \right.$$

где E_i – стоимость содержания одной линии обслуживания, занимающейся обработкой заявок в i -й СМО, а d_i – плата за пребывание (задержку) одной заявки в i -ой СМО (в очереди и на обслуживании), $v_i(t)$ – ожидаемые доходы i -й СМО, $i = \overline{1, n}$. Методика нахождения ожидаемых доходов $v_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, описана в [2].

Получили задачу условной целочисленной оптимизации. Она решалась методом полного перебора. Решением задачи является число сотрудников организации, при котором целевая функция (в нашем случае доход организации) будет максимальным.

Список цитированных источников

1. Баканова, Н.Б. Моделирование процесса движения документов в корпоративных системах документооборота / Н.Б. Баканова, В.М. Вишневский // Автоматика и телемеханика – 2008. – №9. – С. 183 – 188.
2. Маталыцкий, М.А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применение: монография / М.А. Маталыцкий, О.М. Тихоненко, Е.В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.

УДК 656.2-50: 519.8

ВСТРЕЧНЫЙ ПОИСК КРАТЧАЙШИХ МАРШРУТОВ НА СЕТЯХ С ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Кароли М.К.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск

Научный руководитель: Ревотюк М.П., к.т.н., доцент

Известно, что при поиске кратчайших путей на нагруженном ориентированном графе $G(N, A)$, где N – множество вершин, A – множество дуг, время построения дерева путей (поиска решения) растет квадратично или, по меньшей мере, при тщательном построении вычислительной схеме по закону $x \cdot \log_2 x$ с увеличением расстояния x от корня дерева до целевой вершины [1]. Классический алгоритм Дейкстры с отображением очередей на Фибоначчиевы кучи характеризуется сложностью $O(m + n \cdot \log_2 n)$, где $m = |A|$, $n = |N|$.

Известные приемы ускорения процесса поиска кратчайших путей, такие как целенаправленный поиск, встречный поиск, многоуровневый подход [2], базируются на ограничении локальных областей поиска. Далее будем полагать, что построение дерева путей идет по волновой схеме однократного просмотра дуг, реализуемой алгоритмом Дейкстры, а граф транспортной сети представлен структурой смежности:

$$FSF = \{S_i = \{(j, w_{ij}) : (i, j) \in A\}, i \in N\}, w_{ij} \rightarrow R^+, (i, j) \in A. \quad (1)$$

Состояние поиска решения алгоритмом Дейкстры представляется массивом расстояний $D = \{D_i, i \in N\}$, а также очередью вершин, элементы которой упорядочены по значению расстояния от корня дерева.

Можно заметить, что в процессе развития дерева кратчайших путей из заданной вершины каждая вершина окончательного дерева как минимум один раз будет представлена в очереди вершин. Однако некоторые вершины в очереди побывают один раз, если для них первоначально выбраны входные дуги минимальной длины [1]. Такие дуги можно выделить до начала поиска. Эффективный прием фильтрации просматриваемых дуг – каждой дуге поставить в соответствие список вершин, кратчайшие пути к которым включают такую дугу [2]. Построение подобных списков возможно после предварительного построения всех деревьев кратчайших путей. В результате процесс поиска дерева путей идет на графе, дуги которого ассоциированы с целевой вершиной.

Достаточно часто на практике встречаются задачи поиска маршрута между двумя заданными вершинами сети. В этом случае целесообразно организовать процесс поиска путем построения двух встречно растущих деревьев. В результате объем анализируемых данных сокращается в два раза. Дерево из конечной вершины должно строиться на графе с обратным направлением дуг, поэтому представление модели сети задается расширенным графом – объединением (1) и инверсии (1). Предлагается учесть ассоциации дуг с целевыми вершинами характеристическими множествами признаков вхождения вершин в заранее выделенные подмножества вершин.

Встречный поиск принципиально можно реализовать любой процедурой построения дерева от одной вершины до всех остальных на расширенном графе, отражающем фактически существующее пространство поиска. Оптимальный размер деревьев поиска, как легко показать, соответствует одинаковому расстоянию от корней дерева.

Предлагается улучшить известные процедуры встречного поиска посредством остановки процесса после выявления predeterminedенных решений

$$T_j = \{(i, j) : i = \arg \min_i \{w(i, j) : (i, j) \in A\}\}, j \in N. \quad (2)$$

Обозначим исходный граф, заданный в виде (1), через $G^+(N^+, A^+)$, а граф с инвертированием направления дуг – $G^*(N^*, A^*)$. Множества дуг таких графов могут не включать дуги без ассоциаций с начальной и конечными вершинами пути. С целью удобства организации процесса ветвления желательно использовать общую очередь, для чего множество вершин и дуг графа $G^*(N^*, A^*)$ определим так:

$$\begin{cases} N^* = \{x^* = x^+ + n, x^+ \in N^+\} \\ A^* = \{(x^*, y^*) = (y^+ + n, x^+ + n), (x^+, y^+) \in A^+\}. \end{cases} \quad (3)$$

Вершины x^+ и x^* будем далее называть сопряженными. Легко заметить, что условие отбора predeterminedенных решений для графа $G^*(N^*, A^*)$ имеет вид

$$T_j^* = \{(i, j) : j = \arg \min_{i, j} \{w_{ij} : (i, j) \in A^+\}\}, j \in N^+.$$

В общем случае связь сопряженных вершин пусть задается функцией

$$conj(x) = x^* \cdot (x \in G^+) + x^+ \cdot (x \in G^*), x \in N^+ \cup N^*.$$

В случае же нумерации вершин по правилу (3)

$$conj(x) = (x + n) \cdot (x < n) + (x - n) \cdot (x \geq n) \quad x \in N^+ \cup N^*.$$

Пусть заданы s и f – начальная и конечная вершины исходного графа G^+ . Так как, по определению (3), $N^+ \cap N^* = \emptyset$, то построение деревьев можно проводить параллельно, организовав синхронное движение волны от корней дерева на графе

$$G(N, A) = G(N^+, A^+) \cup G(N^*, A^*).$$

Для этого достаточно начать процесс ветвления из вершин $s \in G^+$ и $f^* = conj(f)$, $f^* \in G^*$. В отличие от известного приема поочередного развития деревьев, синхронное движение оказывается оптимальным для “географических” графов.

Организация встречного поиска требует определения правила остановки. Можно показать, что остановка должна соответствовать моменту фиксации постоянной пометки вершины дерева, когда сопряженная вершина уже является постоянно помеченной.

Если для некоторого дерева кратчайших маршрутов максимальное расстояние от постоянно помеченных вершин до корня есть d , то признаком постоянной пометки вершины x является условие $D_x \leq d$. В рассматриваемом случае для обоих деревьев значение d одинаково.

Отсюда следует, что правило остановки можно определить на значениях текущих расстояний – $D_{conj(i)} \leq D_i$, где i – вершина графа $G(N^+, A^+)$ или графа $G(N^*, A^*)$, получающая постоянную пометку.

Таким образом, использование синхронного движения от корней деревьев не требует хранения пометок, а момент остановки совпадает с моментами выделения критических вершин дерева маршрутов.

В случае наличия predetermined решений правило остановки можно определить относительно фактов пометки обеих вершин выделенной дуги. Факт пометки конечной вершины дуги, имеющей постоянную пометку в инвертированном графе, – достаточное условие остановки. Правило остановки здесь: $(D(y) < \infty) \wedge ((x, y) \in T_j), y = conj(x)$.

Очевидно, что проверка такого предиката в задаче поиска кратчайших путей на классическом нагруженном графе может стать громоздкой.

После остановки в вершине x остается достроить маршрут до конечной вершины в исходном графе. Так как остановка может быть обнаружена в любом из встречно растущих деревьев, а результат поиска необходимо получить лишь для дерева из исходной вершины, то для перехода в такое дерево используем функцию

$$orig(x) = x \cdot (x \in G^+) + conj(x) \cdot (x \in G^*), x \in N^+ \cup N^*.$$

В случае нумерации вершин расширенного графа по правилу (3)

$$orig(x) = x \cdot (x < n) + (x - n) \cdot (x \geq n), x \in N^+ \cup N^*.$$

Таким образом, построенные процедуры поиска используют для представления модели сети память в два раза увеличенного объема. Структура представления модели сети остается эффективнее матричных моделей, по крайней мере, с точки зрения удобства коррекции описания сети в реальном времени.

Проведенные рассуждения базировались на предположении, что состояние процесса поиска отражается на очереди вершин – листьев текущего дерева. В случае наличия ограничений на пути на графе [1] приходится использовать очередь дуг. Однако легко заметить, что и здесь помеченные дуги (2) по тем же соображениям являются пригодными для ускоренного включения в дерево кратчайших путей. Правило остановки остается без изменений.

Эксперименты показывают, что на графе реальной сети автомобильных дорог, где $|N| \cong 10^4$, $|A| \cong 10^5$, среднее время поиска кратчайших маршрутов между случайными парами вершин сокращается более, чем в два раза. Степень сокращения зависит от количества подмножеств вершин кратчайших путей, ассоциируемых с дугами.

Список цитированных источников

1. Ревотюк, М.П. Поглощение предопределенных решений жадными алгоритмами / М.П. Ревотюк, Н.И. Застенчик, Е.В. Шешко // Известия Белорусской инженерной академии. – № 1(17)/2, 2004. – С. 112–114.
2. Holzer, M. Combining Speed-up Techniques for Shortest-Path Computations / M. Holzer, F. Schulz, D. Wagner, T. Wilhalm // ACM Journal of Experimental Algorithmics. – Vol. 10, Article No. 2.5, 2005. – P. 1–18.

УДК 517.3

ПРИЛОЖЕНИЯ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Карпук И.А.

*Брестский государственный технический университет, г.Брест
Научный руководитель: Лебедь С.Ф., к.ф.-м.н., доцент*

Определение. Взаимно-однозначное отображение области D на область D^* называется конформным, если в окрестности любой точки области D главная линейная часть этого отображения есть ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию.

Из этого определения вытекают два основных свойства конформных отображений:

1. Конформное отображение преобразует бесконечно малые окружности в окружности с точностью до малых высших порядков (круговое семейство).
2. Конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения (свойство сохранения углов). Предполагается, что при конформном отображении направление отсчёта углов не изменяется, т.е. сохраняется взаимное расположение (ориентация) кривых. Иногда такое отображением называют конформным отображением первого рода, тогда как при сохранении углов, но изменении ориентации кривых, говорят о конформном отображении второго рода.

Утверждение. Отображение с помощью аналитической, однолистной в конечной области D функции является конформным в D .

Если функция $w = f(z)$, аналитическая в D , осуществляет взаимно однозначное отображение, то точки w называются образами точек z , а точки z – прообразами. В силу свойств взаимно однозначного отображения образом области D как открытого множества, состоящего из внутренних точек, является область G , а образом кривой γ – границы области D ($\gamma = \delta D$) – является кривая Γ – граница области G ($\Gamma = \delta G$).

В теории и практике конформных отображений ставятся и решаются две задачи.

Первая задача: нахождении образа данной линии или области при заданном отображении – прямая задача.

Вторая – нахождение функции, осуществляющей отображение данной линии или области на другую заданную линию или область – обратная задача.

На практике при нахождении образов с помощью отображений элементарных функций комплексного переменного используются свойства этих отображений, например круговое свойство дробно-линейного отображения или свойство функции $\omega = z^n$ увеличивать углы в n раз. При решении обратной задачи используют также некоторый набор известных отображений, так называемая «таблица» отображений.

Получим формулы для вычисления площади образа области и длины образа кривой при заданном отображении.

Замечание. Отображение $\omega = f(z)$ комплексной плоскости эквивалентно отображению:

$$u = u(x, y) \qquad v = v(x, y),$$

где $\omega = u + iv$, а $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Якобиан этого отображения равен:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Используя условия Коши-Римана, получаем: $J(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$. Так как

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ то } J(x, y) = |f'(z)|^2.$$

Вывод. Учитывая геометрический смысл якобиана, можем сказать, что величина: $|f'(z)|^2$ представляет собой коэффициент изменения площади при отображении $\omega=f(z)$. Эта величина зависит от значений двух переменных x и y , являющихся координатами точки $z \in \mathbb{C}$. При этом, если $f'(z_0) \neq 0$, то якобиан в точке z_0 также отличен от нуля.

Исходя из геометрического смысла величин $|f'(z)|^2$ и $|f'(z)|$, можно получить формулы вычисления площади образа области и длины образа кривой при отображении $\omega=f(z)$.

Пусть функция $\omega=f(z)$ конформно отображает область D на D^* (т.е. отображение $\omega=f(z)$ конформно в каждой точке области D). Известно, что площадь S^* области D^* выражается двойным интегралом $\iint_{D^*} dudv$. Используя правило замены переменных в двой-

ном интеграле, получаем

$$S^* = \iint_{D^*} dudv = \iint_D |J(x, y)| dx dy = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy. \tag{1}$$

Пусть теперь γ – кривая в области D , а γ^* – ее образ при отображении $\omega=f(z)$. Дифференциал dl длины дуги в плоскости (z) равен $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = |dz|, dz = dx + idy$, а дифференциал dl^* длины дуги в плоскости (ω) равен:

$$dl^* = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2} = |d\omega| = |f'(z)dz| = |f'(z)||dz|.$$

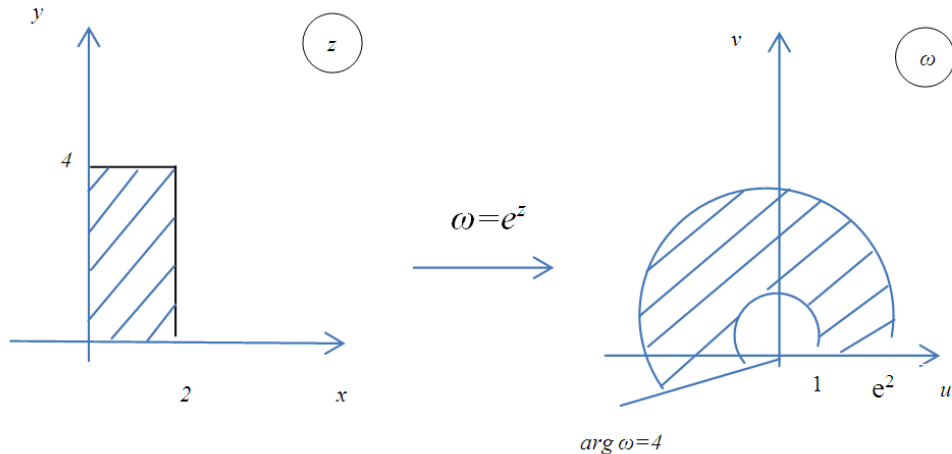
Учитывая представление длины кривой с помощью криволинейного интеграла и формулу замены переменных в таком интеграле, заключаем, что длину l^* образа γ^* кривой γ при отображении $\omega=f(z)$ можно вычислить по формуле:

$$l^* = \int_{\gamma^*} |d\omega| = \int_{\gamma} |f'(z)||dz|. \tag{2}$$

Рассмотрим применение полученных формул на практике.

Постановка задачи. Найти площадь области, являющейся образом прямоугольника $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$ при отображении $\omega = e^z$.

Решение. Изобразим образ прямоугольника при заданном отображении:



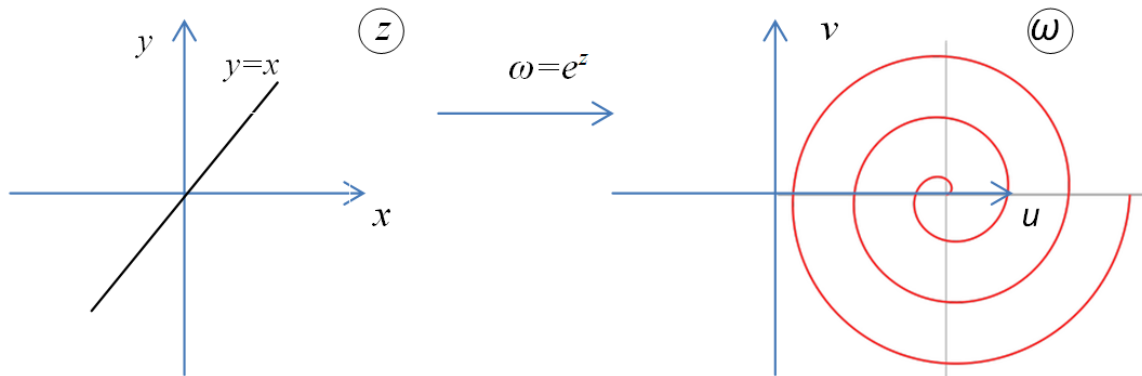
Используя формулу (1), имеем:

$$S = \iint_{D^*} dudv = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy = \left[\begin{array}{l} f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \Rightarrow f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z \\ f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \Rightarrow u = e^x \cos y, v = e^x \sin y \\ \Rightarrow |f'(z)|^2 = e^{2x} \end{array} \right] \Rightarrow =$$

$$= \iint_D e^{2x} dx dy = \int_0^2 e^{2x} dx \int_0^4 dy = 2(e^4 - 1).$$

Постановка задачи. Найти длину участка спирали, являющейся образом отрезка $y = x, 0 \leq x \leq 2\pi$ при отображении $\omega = e^z$.

Решение. Изобразим образ прямой при заданном отображении:



Используя формулу (2), имеем:

$$l = \int_{\gamma} |f'(z)| |dz| = \left[\begin{array}{l} |f'(z)| = e^x \\ dz = d(x + iy) = [y - x] - (1 + i)dx \\ |dz| = \sqrt{2}dx \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} e^x \sqrt{2} dx = \sqrt{2} (e^{2\pi} - 1).$$

Список цитированных источников

1. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного: учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 520 с.
2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

УДК 512.643.4

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Каשתелян А.Н., Юхимук Т.Ю.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим уравнение $X^2 = A$, где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ – заданная, $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ – неизвестная матрица с действительными коэффициентами. Очевидно, уравнение может иметь решение лишь в том случае, если $\det A \geq 0$. В противном случае $(\det X)^2 = \det A < 0$, что невозможно при действительных коэффициентах матрицы X .

Рассмотрим сначала частный случай: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{11}a_{22} > 0$. Равенство $X^2 = A$

приводит к системе
$$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = a_{11}; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 = a_{22}. \end{cases}$$
 Если $x_{12} = 0$, то из 1-го и 4-го уравнений следует,

что $x_{11}^2 = a_{11}$, $x_{22}^2 = a_{22}$, т.е. необходимым условием существования решения является требование $a_{11} > 0, a_{22} > 0$. При этом $x_{21} = 0$ и решения уравнения $X^2 = A$ принимают

вид: $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm\sqrt{a_{11}} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}$. Если же $x_{12} \neq 0$, то $x_{11} + x_{22} = 0$ и система

остаётся совместной лишь при $a_{11} = a_{22}$. Если $a_{11} = a_{22} < 0$, то уравнение имеет беско-

нечное множество решений вида $\begin{bmatrix} t & u \\ \frac{a_{11}-t^2}{u} & -t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v & \frac{a_{11}-v^2}{w} \\ w & -v \end{bmatrix}$, где t, u, v, w – произ-

вольные параметры ($u \neq 0, w \neq 0$). Если же $a_{11} = a_{22} > 0$, то к этим решениям добавляются четыре перечисленные выше решения. Легко проверить, что форма решений сохранится и в случае, когда один из коэффициентов a_{11}, a_{22} либо оба равны нулю, что соответствует случаю $\det A = 0$.

Пусть теперь $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где $a_{12} \neq 0$. Тогда система для определения коэффици-

ентов матрицы X примет вид:
$$\begin{cases} x_{11}^2 + x_{12}x_{21} = 0; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = a_{12}; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = 0; \\ x_{12}x_{21} + x_{22}^2 = 0. \end{cases}$$
 Т.к. $a_{12} \neq 0$, то из 3-го уравнения

следует, что $x_{21} = 0$, откуда $x_{11} = x_{22} = 0$ и $x_{11} + x_{22} = 0$. Это противоречит 2-му уравне-

нию системы, поэтому уравнение $X^2 = A$ для этого случая не имеет решений. Аналогичный результат имеет место и для матриц вида $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, где $a_{21} \neq 0$.

Пусть теперь $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, где $a_{12}a_{21} < 0$. Из 1-го и 4-го уравнений системы

$$\begin{cases} X_{11}^2 + X_{12}X_{21} = 0; \\ X_{12}(X_{11} + X_{22}) = a_{12}; \\ X_{21}(X_{11} + X_{22}) = a_{21}; \\ X_{12}X_{21} + X_{22}^2 = 0 \end{cases} \text{ следует, что } X_{12}X_{21} \leq 0 \text{ и } |X_{11}| = |X_{22}|, \text{ а из 2-го и 3-го - что}$$

$X_{12} \neq 0, X_{21} \neq 0$ и $X_{11} + X_{22} \neq 0$. Поэтому $X_{11} = X_{22}, X_{12} = \frac{a_{12}}{2X_{11}}, X_{21} = \frac{a_{21}}{2X_{11}}$, откуда

$$X_{11}^2 = -\frac{a_{12}a_{21}}{4X_{11}^2}. \text{ Получаем два решения уравнения: } \begin{bmatrix} \pm \sqrt[4]{\frac{-a_{12}a_{21}}{4}} & \pm \frac{a_{12}}{\sqrt[4]{-4a_{12}a_{21}}} \\ \pm \frac{a_{21}}{\sqrt[4]{-4a_{12}a_{21}}} & \pm \sqrt[4]{\frac{-a_{12}a_{21}}{4}} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, где $a_{12} \neq 0$ и $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$. Из системы

$$\begin{cases} X_{11}^2 + X_{12}X_{21} = a_{11}; \\ X_{12}(X_{11} + X_{22}) = a_{12}; \\ X_{21}(X_{11} + X_{22}) = 0; \\ X_{12}X_{21} + X_{22}^2 = a_{22} \end{cases} \text{ получаем } a_{21} = 0, \text{ откуда необходимым условием разрешимости}$$

является условие $a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0$. При этом решениями уравнения $X^2 = A$ являются

$$\begin{bmatrix} \pm \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\pm \sqrt{a_{11}} \pm \sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \pm \sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm \sqrt{a_{11}} & \frac{a_{12}}{\pm \sqrt{a_{11}} \mp \sqrt{a_{22}}} \\ 0 & \mp \sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}. \text{ Аналогично для } A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где $a_{21} \neq 0$, решениями являются $\begin{bmatrix} \pm \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{a_{21}}{\pm \sqrt{a_{11}} \pm \sqrt{a_{22}}} & \pm \sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm \sqrt{a_{11}} & 0 \\ \frac{a_{21}}{\pm \sqrt{a_{11}} \mp \sqrt{a_{22}}} & \mp \sqrt{a_{22}} \end{bmatrix}.$

Покажем, что решение уравнения $X^2 = A$ в общем случае имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} \pm \frac{a_{11} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} & \pm \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} \\ \pm \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} & \pm \frac{a_{22} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{\sqrt{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}} \end{bmatrix},$$

где знак дроби и знак перед радикалом могут быть выбраны независимо друг от друга:

$$\begin{aligned}
 X^2 &= \frac{1}{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \begin{bmatrix} a_{11} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} a_{11} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \pm \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} a_{11}^2 \pm 2a_{11}\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12} \pm 2a_{12}\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} \pm 2a_{21}\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{21}a_{22} & a_{22}^2 \pm 2a_{22}\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{11}a_{22} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{a_{11} + a_{22} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} a_{11}(a_{11} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{22}) & a_{12}(a_{11} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{22}) & a_{22}(a_{11} \pm 2\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, данные формулы неприменимы в случае $\begin{cases} a_{11} + a_{22} = 0; \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} a_{22} = -a_{11} \neq 0; \\ a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = 0. \end{cases}$ Тогда система для определения элементов матрицы X запи-

шется в виде: $\begin{cases} x_{11}^2 + x_{11}x_{22} = a_{11}; \\ x_{12}(x_{11} + x_{22}) = a_{12}; \\ x_{21}(x_{11} + x_{22}) = a_{21}; \\ x_{11}x_{22} + x_{22}^2 = -a_{11}, \end{cases}$ откуда $(x_{11} + x_{22})^2 = 0$, что противоречит 2-му и

3-му уравнениям системы. Значит, в этом случае уравнение $X^2 = A$ не имеет решений.

Список цитированных источников

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
2. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 376 с.

УДК 621.923

РАСЧЕТ ЭКВИДИСТАНТНОГО ПРОФИЛЯ ПОЛЮСНЫХ НАКОНЕЧНИКОВ ДЛЯ МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ ЛОПАТОК ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Кравченко С.И.

*Белорусский государственный аграрный технический университет, г. Минск
Научные руководители: Сергеев Л.Е., к.т.н., доцент; Сенчуров Е.В.*

Многие задачи теории формообразования сложнопрофильных поверхностей при их финишной обработке могут быть получены с помощью уравнений дифференциальной геометрии. Одним из финишных методов, где необходимо решать подобные задачи, является магнитно-абразивная обработка (МАО), при которой поверхность инструмента материализуется использованием электромагнитного поля (ЭМП), однако ее рассмотре-

ние следует осуществлять как изначально заданное, исходя из условия достижения заданного качества и эффективного процесса. Проблема распределения магнитного поля (МП) в той или иной области рабочей зоны часто решается путем построений методом сеток и интеграторов или на основе интуиции. На сегодняшний день исключение столь нестрогих решений приобретает особую важность, поскольку рост мощности технологического оборудования при использовании энергии МП производится масштабно и быстро.

В работе [1] обработка лопаток газотурбинного двигателя (ГТД) методом МАО проводилась в больших кольцевых зазорах и при наличии прямолинейной формы полюсных наконечников, выполняющих функцию поверхности инструмента. Это привело к падению величины магнитной индукции в данных зазорах и к отсутствию требуемого уровня съема материала. Так, кривизна соответствующих участков образующей поверхности детали не соответствовала кривизне режущего контура полюсных наконечников. Таким образом, для повышения производительности и качества обработки этих сложнопрофильных деталей необходимым условием служит полнота прилегания поверхности инструмента к поверхности детали в области их контакта, и получение количественной оценки этой полноты обеспечивает переход от интуитивного понятия к объемному и однозначному восприятию, выражаемому численными значениями. В качестве расчета профиля полюсных наконечников лопаток ГТД предлагается схема, представленная на рис. 1.

Исходя из вышеизложенного, предлагается расчет профиля полюсных наконечников и образование эквидистантного в их радиальном сечении [2], что обеспечивает реализацию создания меньших по величине рабочих зазоров и рост интенсивности обработки деталей.

Эквидистантный профиль полюсных наконечников определяется как огибающая окружности радиуса $R_s = R_u - R_p$, центр которой (x_d, y_d) движется по профилю изготавливаемой детали.

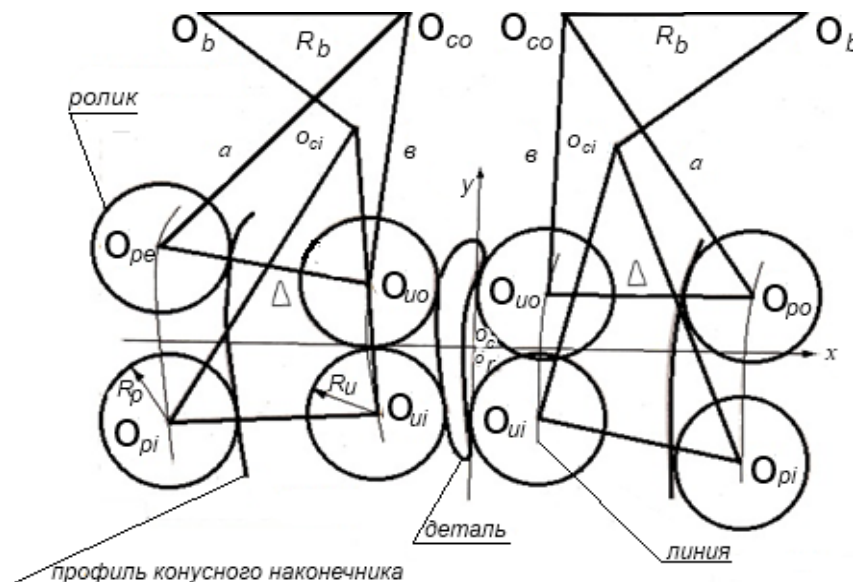


Рисунок 1 – Схема для расчета профиля полюсных наконечников МАО лопаток ГТД

При задании обрабатываемого профиля в виде функции $(F(x, y) = 0)$ огибающая окружностей, образующая профиль копира, находится из решения

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, c) &= 0, \\ F'_c(x, y, c) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где каждое значение c выделяет определенную окружность из их семейства.

Общее решение системы дают расчетные зависимости для определения координат $(X_3; Y_3)$ эквивалентного профиля, отстоящего от заданного $(X_\delta; Y_\delta)$ на расстоянии R_3 .

$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_\delta \pm \frac{K_3 \cdot Y_\delta}{\sqrt{1 + (Y'_\delta)^2}}; \\
 y_3 &= y_\delta \pm \frac{R_3}{\sqrt{1 + (Y'_\delta)^2}}; \\
 y'_\delta &= -\frac{\partial F}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

При задании обрабатываемой поверхности в виде функции $y = F(x)$ используются те же зависимости, что и в случае, где $Y'_\delta = F'(X_\delta)$, в случае задания обрабатываемого профиля в виде $x = x(t), y = y(t)$, огибающая находится из решения системы уравнений

$$x = x(t, c); y = y(t, c) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0,
 \tag{3}$$

где, как и в предыдущих случаях, каждое значение c выделяет определенную окружность из свойства окружностей, а t выделяет на окружности определенную точку.

Решение системы дает расчетные зависимости

$$x_3 = x_\delta \mp \frac{R_3 \cdot y_{\partial c}}{\sqrt{(x'_{\partial c})^2 + (y'_{\partial c})^2}};
 \tag{4}$$

$$y_3 = y_\delta \mp \frac{R_3 \cdot x_{\partial c}}{\sqrt{(x'_{\partial c})^2 + (y'_{\partial c})^2}}.
 \tag{5}$$

При задании обрабатываемой поверхности в полярных координатах

$$\rho = \rho(\phi);
 \tag{6}$$

$$y_3 = \frac{\arccos x_3}{P_3} = \frac{\arccos 1}{P_3} \left[p_\delta \cos \phi + \frac{R_3(p'_\delta \sin \phi + p_\delta \cos \phi)}{\sqrt{p_\delta^2 + (p'_\delta)^2}} \right],
 \tag{7}$$

где ρ_δ – радиус-вектор профиля обрабатываемой детали; ϕ – соответствующий ρ_δ полярный угол; ρ_3 – радиус-вектор эквидистантного профиля; γ_3 – соответствующий ρ_3 полярный угол.

Если обрабатываемый профиль задается таблицами значений

x	...	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	...
y	...	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	...

или

T	...	t_{i-1}	t_i	t_{i+1}	...
x	...	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	...
y	...	y_{i-1}	y_i	y_{i+1}	...

то координаты эквидистанты определяются с использованием зависимостей для вышеуказанных случаев или входящие в эти зависимости производные могут быть найдены известными методами дифференцирования табличных функций или дифференцированием интерполяционных кривых. При графическом задании профиль обрабатываемой детали, как правило, описывается дугами окружностей. Порядок графического построения эквидистанты к графически заданному профилю общеизвестен и состоит в увеличении или уменьшении на требующуюся величину радиуса кривизны детали.

Список цитированных источников

1. Майборода, В.С. Основи створення і використання порошкового магнітно-абразивного інструменту для фінішної обробки фасонних поверхонь: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.03.01 / В.С. Майборода.; Киев. политех. ин-т. – Киев, 2001. – 36 с.
2. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1969. – 640 с.

УДК 330.4

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Мацулевич Е.И.

*Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Климашевская И.Н., к. ф.-м. н., доцент*

Все в окружающем нас мире находится в непрестанном движении: меняется с течением времени взаимное расположение планет нашей солнечной системы, температура и давление воздуха, силы, действующие в машине, токи, протекающие в электрической цепи, состояние живой клетки. Таким образом, при изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления. Дифференциальное исчисление создано в XVII и XVIII вв. в трудах И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

В природе и физике часто встречаются ситуации, когда ничего не известно о функции, зато известна ее производная, которая часто имеет самостоятельный физический смысл. Например, мгновенная скорость – первая производная координаты по времени, мгновенное значение силы тока – первая производная заряда по времени.

В физике производная находит широкое применение, в том числе и для вычисления наибольших или наименьших значений каких-либо величин. В качестве такого примера рассмотрим задачу о равновесии системы электрических зарядов.

Пусть имеется система зарядов e_k и заряд e , находящийся в точке с координатами (x, y, z) в положении равновесия. Возникает вопрос: будет ли такое равновесие устойчивым, т.е. вернется ли заряд в исходное положение, если его из него вывести.

Рассмотрим систему, состоящую из заряда e и заряда e_1 , находящегося в точке с координатами (x_1, y_1, z_1) . Потенциальная энергия заряда e , находящегося в поле заряда e_1 , определяется выражением

$$u_1 = \frac{e_1 e}{r} = \frac{e_1 e}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}. \quad (1)$$

Зафиксируем координаты y и z и найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – вторую производную от u по x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3e_1 e (x - x_1)^2}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{e_1 e}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

Аналогично найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3e_1 e (y - y_1)^2}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{e_1 e}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3e_1 e (z - z_1)^2}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{e_1 e}{((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Складывая выражения (2), (3) и (4), легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Поскольку мы не накладывали на заряд e_1 никаких ограничений, то (5) будет справедливо для любого числа слагаемых вида $\frac{e_k e}{r}$, для любой конфигурации зарядов e_k .

Следовательно, (5) выполняется для каждой точки пространства между неподвижными зарядами, в том числе и для той точки, в которой заряд e находится в равновесии. Воспользуемся принципом суперпозиции сил: результат воздействия на частицу нескольких внешних сил есть векторная сумма воздействия этих сил.

Так как в положении равновесия векторная сумма сил, действующих на заряд, равна нулю, то должна быть равна нулю и сумма проекций на каждую ось координат, т.е.

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

где F_x, F_y, F_z – проекции силы соответственно на ось X, Y и Z .

Известно, что в положении устойчивого равновесия заряд обладает минимальной потенциальной энергией, таким образом, для устойчивости равновесия должны выполняться условия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} > 0. \quad (7)$$

Но условия (7) противоречат уравнению (5), поскольку сумма трех положительных величин не может равняться нулю. Следовательно, всякая равновесная конфигурация точечных зарядов неустойчива, если на них, кроме кулоновских сил притяжения и отталкивания, ничто не действует.

Доказанное утверждение носит название теоремы Ирншоу, которая сыграла важную роль в теории строения атома до создания квантовой теории, на её основании была отвергнута модель атома по Томпсону.

Список цитированных источников

1. Зельдович, Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом – М.: Наука, 1982. – 512 с.
2. Савельев, И. В. Курс физики: учеб.: в 3-х т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика. – 462 с.

УДК 5.1.-.8

ГЕНЕРАЦИЯ СУДОКУ И ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА РЕШАЕМЫХ СУДОКУ**Митьковец А.А., Савчик П.А.***Белорусский государственный университет информатики
и радиозлектроники, г. Минск**Научный руководитель: Борисенко О.Ф., к.ф.-м.н., доцент*

Судoku – математическая головоломка с числами. В нашей работе рассматривается классическая версия судoku. Игровое поле представляет собой квадрат размером 9x9 клеток, разделённый на меньшие квадраты со стороной в 3 клетки. Цель игры – заполнить пустые ячейки так, чтобы каждый ряд, столбик и квадрат 3x3 содержали цифры от 1 до 9 по одному разу.

Постановка задачи:

- Создать алгоритм (а также программу на его основе), генерирующий незаполненное поле судoku с заданным количеством изначально указанных чисел. Реализовать создание заполненного поля на основании венгерского алгоритма, создание маски для удаления при помощи «банковской последовательности».

- Оценить количество всех незаполненных полей судoku, имеющих решение.

Работа состоит из нескольких частей. Краткое описание каждой из них:

1. Генерация заполненного поля судoku.

Для создания судoku по нашему алгоритму необходимо иметь полностью заполненное (по правилам судoku) поле (рис.1, а). Генерация основывается на применении венгерского метода. Поле судoku заполняется построчно. Задача о заполнении строки рассматривается как задача о назначениях, матрица стоимостей изменяется с учётом уже заполненных строк.

2. Генерация масок.

Маска представляет собой матрицу 9x9, состоящую из 0 и 1 (рис.1, б). Служит для удаления чисел из заполненного поля судoku. Алгоритм составления маски основывается на использовании «банковской последовательности» [1]. Каждая маска имеет свой номер, что позволяет последовательно перебрать все возможные маски.

Составление масок случайным образом имеет недостаток – при генерации выборки мы не можем быть уверены, что не получим множество похожих друг на друга масок. «Банковская последовательность» дает нам возможность сделать выборку из n-го количества действительно различных масок, что необходимо при вычислении количества всех возможных незаполненных полей судoku (п. 4).

3. Получение незаполненного судoku.

Реализуется путём совмещения маски и сгенерированного заполненного поля. (рис.1, в)

0 в маске означает, что соответствующая клетка в заполненном поле становится пустой, 1 – что число в соответствующей клетке не убирается.

4. Вычисление количества всех возможных незаполненных полей судoku.

Мы применяли 1000 масок с одинаковым количеством нулей к различным заполненным полям. Затем повторяли действие, постепенно увеличивая количество нулей в масках до 60. При этом было замечено, что доля судoku с одним решением убывает схожим образом для разных полей (рис. 2).

Имея такой график для одного заполненного поля, а также зная общее количество масок, можем получить среднее количество всех возможных судoku, приводящих к данному заполненному полю.

А зная общее количество всех заполненных полей [2], можем получить количество всех возможных незаполненных sudoku вообще.

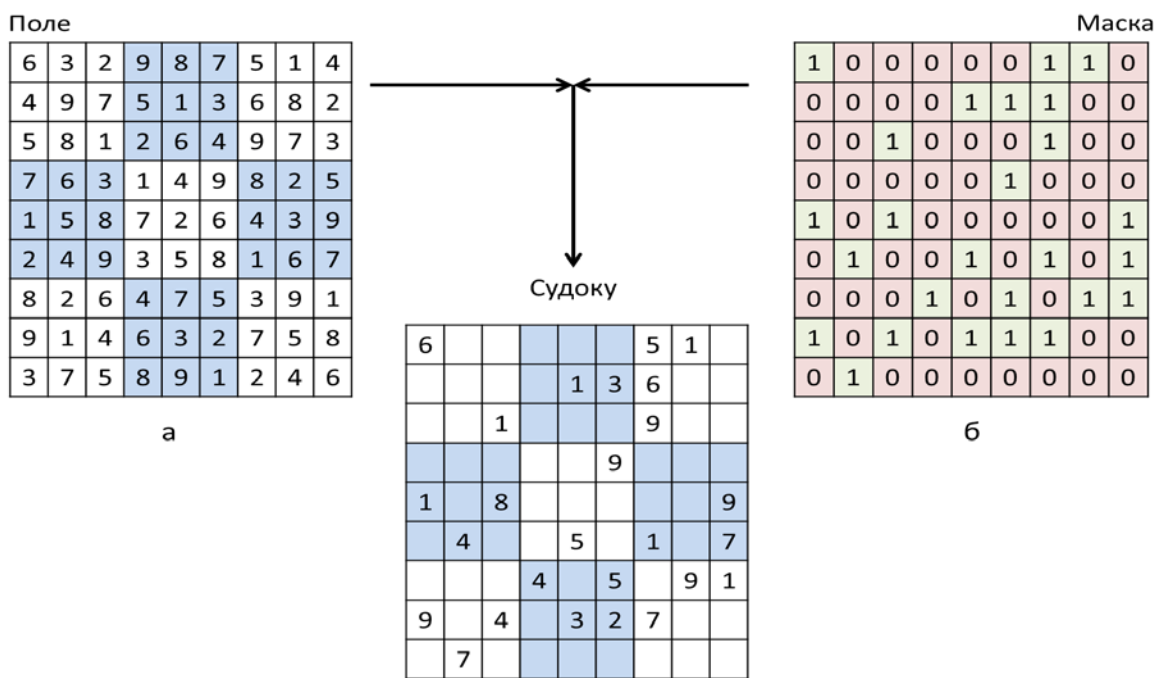


Рисунок 1

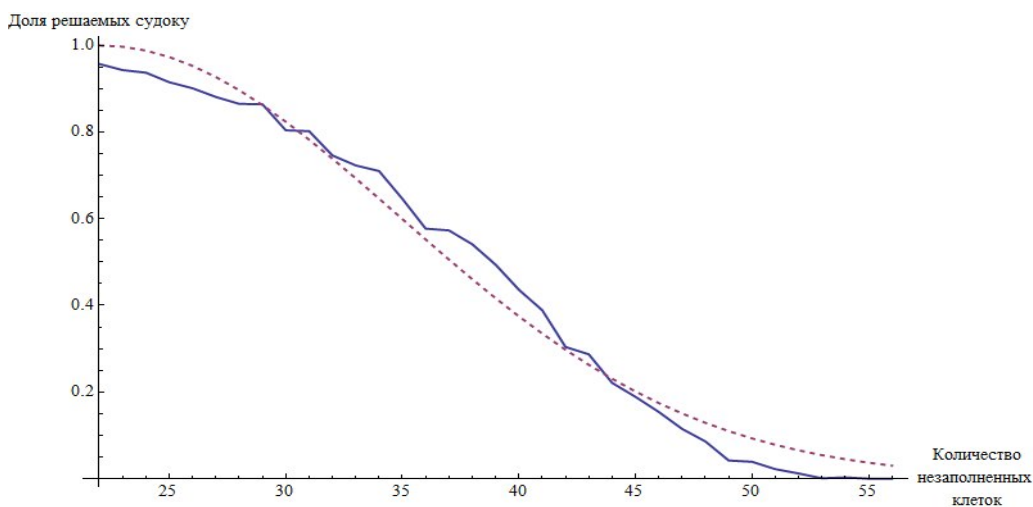


Рисунок 2 – Сплошной график: уменьшение отношения решаемых sudoku к нерешаемым с уменьшением начальных чисел с 60 до 25 чисел (60 – 35) для одного заполненного поля. Штриховой график: функция $y = e^{-x^2/330}$.

В результате работы получено:

1. Алгоритм генерации любого заполненного поля sudoku из множества всех возможных полей.
2. Алгоритм генерации всех возможных масок (с нумерацией).
3. Алгоритм генерации sudoku с заданным количеством изначально указанных чисел.
4. Среднее количество всех возможных незаполненных sudoku.

Список цитированных источников

1. Loughry, J. Efficiently Enumerating the Subsets of a Set / J. Loughry, J.I. van Hemert, L. Schoofs [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.applied-math.org/subset.pdf>
2. Russell, E. Sudoku enumeration: the symmetry group / E. Russell, F. Jarvis [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html>

УДК 532.546:536.421

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ**Мокроусова Е.А.***Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак (Россия)**Научный руководитель: Хасанов М.К., к.ф.-м.н, доцент*

При построении математической модели многих процессов математическая постановка задачи может быть сведена к начально-краевой задаче для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Решения данных задач и методы их получения можно разделить на два основных класса: численные и аналитические. Во многих случаях принципиальный интерес представляет получение аналитического решения, т.к. данное решение является удобным инструментом для анализа математической модели изучаемого процесса. Одним из методов получения аналитического решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных является введение автомодельной переменной, т.е. некоторого единого комплекса, включающего себя несколько переменных. Рассмотрим данный метод на примере задачи о фазовых переходах газогидрат-вода в пористой среде.

Пусть полубесконечный пористый пласт в начальный момент времени насыщен газом и газогидратом, давление и температура которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям стабильного существования гидрата. Положим, что через границу пласта производится отбор газа, в результате чего от границы в глубь пласта начинает распространяться фронтальная поверхность диссоциации гидрата, разделяющая пласт на две области. В первой области, находящейся вблизи границы пласта, гидрат разложился на газ и воду, а во второй области поры заполнены газом и гидратом. Таким образом, согласно данной модели, предполагается, что разложение газогидрата полностью происходит на фронтальной границе между этими двумя зонами.

Система основных уравнений, представляющая собой законы сохранения масс, энергии, закон Дарси и уравнение состояния газа, при допущениях о несжимаемости и неподвижности скелета пористой среды, гидрата и воды, в прямолинейно-параллельном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g m S_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g m S_g v_g) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \rho_l S_l) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$m S_g v_g = - \frac{k}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$p = \rho_g R_g T,$$

где m – пористость; \vec{v}_g , k , c_g и μ_g – соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; ρ_j и S_j ($j = sk, h, l, g$) – истинные плотности и насыщенности пор j -й фазы; p – давление; T – температура; ρc и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; индексы sk, h, l и g относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно.

Данные уравнения дополняются условиями баланса массы и тепла на границе фазового перехода ($x = x_{(s)}$):

$$\begin{aligned} m\nu\rho_h(1-g)\dot{x}_{(s)} &= mS_{i0}\rho_l\dot{x}_{(s)} \\ mS_{g(2)}\rho_{g(s)}^0(\nu_{g(2)} - \dot{x}_{(s)}) - m\nu\rho_h g\dot{x}_{(s)} &= mS_{g(1)}\rho_{g(s)}^0(\nu_{g(1)} - \dot{x}_{(s)}), \\ \lambda\frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} - \lambda\frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} &= m\nu\rho_h l\dot{x}_{(s)}, \end{aligned}$$

где g – массовая концентрация газа в гидрате; l – удельная теплота гидратообразования; ν – начальная гидратонасыщенность пласта; $\dot{x}_{(s)}$ – скорость движения границы фазовых переходов, параметры первой и второй областей снабжены нижними индексами в скобках $i = 1, 2$.

На границе между областями для температуры и давления выполняется условие фазового равновесия:

$$T_{(s)} = T_0 + T_* \ln\left(\frac{\rho_{(s)}}{\rho_{s0}}\right),$$

где T_0 – исходная температура системы, ρ_{s0} – равновесное давление, соответствующее исходной температуре, T_* – эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата.

Будем полагать, что в начальный момент времени в пористой среде давление p_0 и температура T_0 во всех точках пласта одинаковы:

$$p_{(2)} = p_0, \quad T_{(2)} = T_0 \quad (t = 0, \quad x \geq 0).$$

На границе фазовых переходов потребуем условие непрерывности давления и температуры:

$$p_{(1)} = p_{(2)} = p_{(s)}, \quad T_{(1)} = T_{(2)} = T_{(s)} \quad (x = x_{(s)}).$$

Условия на границе пласта запишем в виде:

$$\frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} = 0, \quad p_{(1)} = p_e \quad (t > 0, \quad x = 0).$$

Сформулированная таким образом задача является автомодельной. Введем автомодельную переменную:

$$x = \frac{x}{\sqrt{\aleph^{(T)}t}},$$

где $\aleph^{(T)} = \frac{\lambda}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности.

Тогда интегрированием можно получить следующие аналитические решения:

$$\begin{aligned} p_{(1)}^2 &= p_e^2 + \frac{(p_s^2 - p_e^2) \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\eta_{(1)}}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(1)}}}\right)}, \quad 0 < \xi < \xi_s, \\ T_{(1)} &= T_s, \quad 0 < \xi < \xi_s, \end{aligned}$$

$$p_{(2)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_s^2 - p_0^2) \left(\sqrt{\pi \eta_{(2)}} - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\eta_{(2)}}} \right) \right)}{\sqrt{\pi \eta_{(2)}} - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(2)}}} \right)}, \quad \xi_{(s)} < \xi < \infty,$$

$$T_{(2)} = T_0 + \frac{(T_s - T_0) \left(\sqrt{\pi} - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{2} \right) \right)}{\sqrt{\pi} - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi_{(s)}}{2} \right)}, \quad \xi_{(s)} < \xi < \infty,$$

где erf – интеграл ошибок, $\eta_{(i)} = \frac{\aleph_{(i)}^{(p)}}{\aleph_{(i)}^{(T)}}$, $\aleph_{(i)}^{(p)} = \frac{k p_0}{\mu_g m S_{g(i)}}$.

На основе данных решений и условий баланса массы и тепла на фронтальной границе разложения газогидрата можно получить систему уравнений для определения автономной координаты ξ_s данной границы и значения параметров p_s и T_s на ней.

$$\frac{(p_s^2 - p_e^2) \exp\left(-\frac{\xi_s^2}{4\eta_{(1)}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(1)}}}\right)} - \frac{(p_0^2 - p_s^2) \exp\left(-\frac{\xi_s^2}{4\eta_{(2)}}\right)}{\sqrt{\pi \eta_{(2)}} - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_s}{2\sqrt{\eta_{(2)}}}\right)} = K \xi_s,$$

$$\frac{(T_0 - T_s) \exp\left(-\frac{\xi_s^2}{4}\right)}{\sqrt{\pi} - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_s}{2}\right)} = \Delta T \xi_s.$$

где $\Delta T = \frac{m \rho_h l v}{2 \rho c}$, $K = m \mu_g \aleph_{(T)}^{(T)} \rho_0 \left(\frac{\rho_h g}{\rho_{g(s)}} + \frac{\rho_h (1-g)}{\rho_l} - 1 \right) \frac{v}{k}$.

Записанная система уравнений может быть решена следующим образом. Выражая из первого уравнения величину p_s и подставляя ее (с учетом условия фазового равновесия) во второе уравнение, получаем трансцендентное уравнение с одной неизвестной ξ_s . Решая данное уравнение, определяем величину ξ_s .

УДК 512.542

О ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С P -СУБНОРМАЛЬНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Мурашко В.И.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Гомель
Научный руководитель: Васильев А.Ф., д.ф.-м.н., доцент

Рассматриваются только конечные группы. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется P -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1, \dots, n$.

Как следует из известной теоремы Хупперта, группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая её подгруппа P -субнормальна. В развитие этой теоремы в работах [1,2] исследовались группы с различными системами P -субнормальных подгрупп. В [1] А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева и В.Н. Тютянов показали, что класс \mathcal{U} всех групп, у которых каждая силовская подгруппа P -субнормальна, является насыщенной наследственной формацией, отличной от класса \mathcal{U} всех сверхразрешимых групп. Такие группы называются \mathcal{U} -сверхразрешимыми. В работе [2] В.С. Монаховым и В.Н. Княгиной изучался класс \mathcal{X} всех групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа P -субнормальна.

Теорема 1 [2]. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *Класс \mathcal{X} является насыщенной наследственной формацией.*
- (2) *Группа G принадлежит \mathcal{X} тогда и только тогда, когда она обладает силовской башней сверхразрешимого типа (дисперсивна по Оре) и каждая бипримарная подгруппа G с циклической силовской подгруппой сверхразрешима.*
- (3) *Всякая минимальная не \mathcal{X} -группа является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой все силовские подгруппы, не являющиеся нормальными, циклические.*

Отметим [1,2], что $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{X}$.

Так как \mathcal{X} является насыщенной наследственной формацией, то из теоремы Гашюца, Любезедер, Шмида следует, что она локальна. Напомним определение локальной формации [3]. Пусть P – множество всех простых чисел. Функция $f: P \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация F называется локальной, если её можно задать следующим образом $F = \langle f \rangle = (G \mid \text{если } H/K \text{ является главным фактором группы } G, \text{ то } G/C_G(H/K) \in f(p) \text{ для любого простого } p \text{ делящего } |H/K|)$, где f – локальный экран. В этом случае говорят, что f является локальным экраном формации F .

В [1] был найден локальный экран формации \mathcal{U} . Однако вопрос о нахождении локального экрана формации \mathcal{X} оставался открытым. Ответ на этот вопрос даёт теорема 2.

Теорема 2. *Формация \mathcal{X} имеет локальный экран f такой, что $f(p)$ состоит из всех тех разрешимых групп, у которых все циклические примарные подгруппы имеют экспоненту делящую $p - 1$.*

Обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N имеет абелевы силовские подгруппы. В [1] было показано, что всякая \mathcal{U} -сверхразрешимая группа имеет нильпотентный обобщенный коммутант.

Следствие 1. *Группа G \mathcal{U} -сверхразрешима тогда и только тогда, когда она имеет нильпотентный обобщенный коммутант и всякая её циклическая примарная подгруппа P -субнормальна.*

Следствие 2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда она имеет нильпотентный коммутант и всякая её циклическая примарная подгруппа P -субнормальна.*

Формация \mathcal{X} не является радикальной, как показывает следующий пример. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathcal{X} и $p = 3$. Рассмотрим $G = \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle$. Заметим, что $G \notin F(3)$, но содержит нормальные подгруппы $A = \langle (1,3)(2,4), (1,3) \rangle$ и $B = \langle (1,3)(2,4), (1,2)(3,4) \rangle$, которые принадлежат $F(3)$ и $G = AB$. То есть формация $F(3)$ нерадикальна. Тогда по предложению 4.10 [6, с. 43] формация \mathcal{X} не радикальна.

Теорема 3. *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих P -субнормальных \mathcal{X} -подгрупп A и B . Если $(|G:A|, |G:B|) = 1$, то $G \in \mathcal{X}$.*

Список цитированных источников

1. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270-1281.
2. Monakhov, V.S. Finite groups with P -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniagina. // Ricerche di Matematica. – 2013. – Springer, DOI 10.1007/s11587-013-0153-9.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

УДК 517.948.32

АБАГУЛЬНЕНАЕ ГІПЕРГЕАМЕТРЫЧНАЕ РАЎНАННЕ Ў АЛГЕБРЫ МАТРЫЧНЫХ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ

Навічкова Д.А.

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт, г. Мінск
Навуковы кіраўнік: Васільеў І.Л., к.ф.-м.н., дацэнт

Шмат работ прысвечана вивучэнню гіпергеаметрычнай функцыі Гаўса ${}_2F_1[a, b; c; z]$ і адпаведнага ёй гіпергеаметрычнага раўнання, напрыклад [1], а таксама іх абагульненням: абагульненай гіпергеаметрычнай функцыі ${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; c_1, \dots, c_q; z]$ і абагульненаму гіпергеаметрычнаму раўнанню [2].

Мэтай дадзенай работы з'яўляецца развязаць дыскрэтны матрычны аналаг абагульненага гіпергеаметрычнага раўнання.

Няхай K – алгебра гіперпаслядоўнасцей [3] над \mathbb{C} выгляду

$$x = \sum_{k=-r}^{\infty} x_k h^k = \{ \dots, 0, \dots, 0, x_{-r}, \dots, \underline{x_0}, x_1, \dots \},$$

дзе $x_k \in \mathbb{C}$, r – любы натуральны лік, $h^k = \{ \dots, 0, \dots, 0, \underset{k-e \text{ месца}}{1}, 0, \dots, 0, \dots \}$, з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Фур'е. Ейнае падмноства K_0 элементаў выгляду

$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h^k$ утварае алгебру паслядоўнасцей з множаннем у выглядзе дыскрэтнай згорткі Ляпляса [3]. Пазначым праз s адваротны да h элемент.

$K^{m \times m}$ – алгебра $(m \times m)$ -матрыц з элементамі з K , $K_0^{m \times m}$ – алгебра $(m \times m)$ -матрыц з элементамі з K_0 . Матрыцы з $K^{m \times m}$ уяўляюцца ў выглядзе фармальнага ступеневага

шэрагу $A = \sum_{k=-r}^{\infty} A_k h^k$, $A_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Заўважым, што тут маецца на ўвазе зручны спосаб

запісу і пытанне збежнасці не паўстае. У дадзенай рабоце паўсюль будзе мецца на ўвазе, што матрыцы камутуюць паміж сабой.

Паслядоўнасць $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ назавем пашыранай гіперпаслядоўнасцю.

Пазначым мноства пашыраных гіперпаслядоўнасцей праз \tilde{K} . У адрозненне ад гіперпаслядоўнасцей, пашыраныя гіперпаслядоўнасці могуць мець бясконцую колькасць ненулявых элементаў на месцах з адмоўнымі нумарамі. Відавочна, мае месца ўлучэнне $K \subset \tilde{K}$.

Праз $K_- = \left\{ \left\{ \dots, x_n, \dots, x_{-1}, \underline{x_0}, \dots, x_m, 0, \dots, 0 \right\} \mid x_n \in \mathbb{C}, \forall n = \overline{-\infty, m}; m \in \mathbb{N}_0 \right\}$ пазначым мноства пашыраных гіперпаслядоўнасцей з канечнай колькасцю ненулявых элементаў на месцах з дадатнымі нумарамі, якое ўяўляе сабой “люстэркавы адбітак” алгебры K .

Назавем множества K_- люстеркавымі гіперпаслядоўнасцямі. Па аналогіі з азначанымі вышэй алгебрамі $K^{m \times m}$ і $K_0^{m \times m}$ азначым іх люстеркавыя адбіткі $K_-^{m \times m}$ і $K_{-0}^{m \times m}$, якія складаюцца з матрыц, элементамі якіх з'яўляюцца люстеркавыя гіперпаслядоўнасці і люстеркавыя паслядоўнасці адпаведна.

Разгледзім дыскрэтнае матрычнае раўнанне

$$X_n \prod_{t=1}^p (nE + A_t) - (n+1) X_{n+1} \prod_{t=1}^q (nE + C_t) = O, \quad (1)$$

дзе $X = \{X_n\}_{n=0}^\infty = \{X_0, \dots, X_n, \dots\}$ – невядомая матрычная паслядоўнасць з $K_0^{m \times m}$; $A_k, C_j \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $k = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$. Паўсюль будзем разглядаць толькі выпадак $p = q + 1$.

У $K^{m \times m}$ увядзем алгебраічнае дыферэнцаванне падобна таму, як гэта зроблена для паслядоўнасцей у [1], $DX = D \sum_{n=-r}^\infty X_n h^n = \sum_{n=-r}^\infty n X_n h^n = \{n X_n\}_{n=r}^\infty * s$, дзе r свой для кожнай паслядоўнасці. Аналагічным чынам уводзіцца азначэнне алгебраічнай вытворнай і для $K_-^{m \times m}$. Тады пераўтворым дыскрэтнае раўнанне (1) да раўнання ў алгебры ў аператарным выглядзе

$$\left\langle \prod_{t=1}^p (hD + A_t) - s \prod_{t=1}^q (hD + C_t - E) \right\rangle X = O, \quad (2)$$

дзе $\langle \rangle$ – аператарныя дужкі, $C_p = E$.

Для лікавых матрыц увядзем сымбаль Пахгамера па аналогіі з тым, як гэта робіцца для лікаў $(A)_n = \begin{cases} E, & n = 0 \\ A(A+E)(A+2E) \cdots (A+(n-1)E), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Непасрэднай праверкай можна ўпэўніцца ў тым, што

$$X_{(oj)} = h^{E-C_j} \sum_{n=0}^\infty (E - C_j + C_1)_n^{-1} \cdots (E - C_j + C_p)_n^{-1} (E - C_j + A_1)_n \cdots (E - C_j + A_p)_n h^n \quad (3)$$

з'яўляецца фармальным развязкам раўнання (2), калі $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $k, j = \overline{1, p}$ матрыцы $(nE - C_j + C_k)$ абарачальныя. Засталося высветліць, пры якіх умовах (3) будзе менавіта развязкам з алгебры $K_0^{m \times m}$.

Неабходна адзначыць, што h^A , дзе $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, з'яўляецца элементам $K_0^{m \times m}$ толькі ў выпадку $A = T^{-1} \text{diag} \{a_1, \dots, a_m\} T$, дзе $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}_0$ (не абавязкова розныя), $T \in \mathbb{C}^{m \times m}$ абарачальная (відавочна, магчыма і больш простая сітуацыя, калі $T = E$).

Разгледзім выпадак, калі $\forall k = \overline{1, q}$ $C_k = \text{diag} \{\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{mk}\}$. Каб $h^{E-C_j} \in K_0^{m \times m}$, неабходна і дастаткова, каб выконвалася ўмова $\forall i = \overline{1, m}$ $\lambda_{ij} \leq 1$ – цэлыя. Каб $\forall n \in \mathbb{N}_0$ матрыцы $(nE - C_j + C_k)$ былі абарачальнымі, неабходна, каб $\forall i = \overline{1, m}$ $1 - \lambda_{ij} + \lambda_{ik}$ не былі цэлымі недадатнымі лікамі. Тады развязак, азначаны формулай (3), будзе адзіным, г.зн, што будзе існаваць толькі адзіны $j \in \{1, \dots, q\}$ такі, што $X_{(oj)} \in K_0^{m \times m}$, а для $k \neq j$ $X_{(ok)}$ могуць належаць $K_0^{m \times m}$ толькі ў выпадку роўнасці матрыц C_j і C_k , але фактычна развязкі будуць супадаць.

Пройдем да развязання раўнання (1) у алгебры люстэркавых паслядоўнасцей $K_{-0}^{m \times m}$. Фармальны развязак эквівалентнага (1) раўнання (2) можна атрымаць па формуле

$$X_{(\infty j)} = s^{A_j} \sum_{n=0}^{\infty} (E + A_j - A_1)_n^{-1} \cdots (E + A_j - A_p)_n^{-1} (E + A_j - C_1)_n \cdots (E + A_j - C_p)_n s^n \quad (4)$$

Няхай выконваюцца ўмовы:

1. $\forall k = \overline{1, q} \quad A_k = \text{diag} \{ \mu_{1k}, \dots, \mu_{mk} \}$,
2. $\forall i = \overline{1, m} \quad \mu_{ij} \geq 0$ – цэлыя,
3. $1 + \mu_{ij} - \mu_{ik}$ не з'яўляюцца цэлымі недадатнымі.

Тады $\forall k = \overline{1, q}, n \in N_0$ матрыцы $(nE + A_j - A_k)$ абарачальныя, $s^{A_j} \in K_{-0}^{m \times m}$, а значыць, і развязак (4) належыць алгебры $K_{-0}^{m \times m}$. Прычым ён будзе адзіным у тым жа сэнсе, які меўся на ўвазе для алгебры $K_0^{m \times m}$.

Спісак выкарыстаных крыніц

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи: в 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – 297 с.
2. Smith, F.C. Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when $p = q + 1$ / F.C. Smith // Bull. of the Amer. Math. Soc. – 1938. – Vol. 44. – P. 429–433.
3. Васільеў, І.Л. Рашэнне дыскрэтнага раўнання Лапласа ў кольцы паслядоўнасцей / І. Л. Васільеў, Д. А. Навічкова // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 3. – С. 114–119.

УДК 519.6 + 517.983.54

СХОДИМОСТЬ ЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ПРИ ПРИБЛИЖЁННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Наумовец С.Н.¹, Матысик О.В.²

¹Брестский государственный технический университет, г. Брест

²Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Пусть в гильбертовом пространстве H требуется решить уравнение

$$Ax = y, \quad (1)$$

где A – ограниченный, самосопряженный, положительный оператор $A: H \rightarrow H$, для которого нуль не является собственным значением. Причем $0 \in Sp A$, т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y . Для его отыскания предлагается итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближённо, т.е. вместо y известно y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1, \delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n, \delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \quad x_{0, \delta} = 0. \quad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем

выборе n и достаточно малых δ . Иными словами, метод итераций (3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0. \quad (4)$$

Покажем, что при условии (4) процесс (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ . Имеет место

Теорема. При условии (4) итерационный процесс (3) сходится, если выбрать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство

Будем считать, $x_{0,\delta} = 0$, и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} x - x_{n,\delta} &= (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \\ x - x_n &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A , получим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} [E - (E - \alpha A)^{2n}] (y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha \lambda)^{2n}] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha \lambda)^{2n}] \leq 2n\alpha.$$

Тогда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2n\alpha\delta$. Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta,$$

и $\|x - x_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то для сходимости итерационного метода (3) достаточно, чтобы $n\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Общая оценка погрешности метода (3) при приближённой правой части y_δ : $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Итак, доказана

Теорема. Если точное решение x уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии $0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}$ для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

УДК 621.311.153

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ТРАНСФОРМАЦИЙ И НЕОДНОРОДНОСТИ СЕТИ

Радоман Н.В

Белорусский государственный технологический университет, г. Минск
Научный руководитель: Александров О.И., к.т.н., доцент

При расчете параметров установившихся режимов в электрических сетях большой энергетической системы наибольшие трудности вызывают сети с высокой степенью неоднородности. Особенно это проявляется в высоковольтных питающих, системообразующих и межсистемных линиях электропередачи [1-3].

Предлагается новый метод расчета коэффициентов распределения для потерь в электрической сети энергосистемы от активных и реактивных мощностей в узлах и от результирующих продольных и поперечных трансформаций в контурах сети, а также методика его реализации.

Метод расчета потокораспределения в электрической сети основан здесь не на физическом моделировании структуры исследуемой цепи, а на математическом моделировании структуры уравнений, описывающих потокораспределение, благодаря чему снимаются ограничения, накладываемые неоднородностью сети и наличием трансформаций.

Как известно, любая линейная система уравнений с симметричной матрицей коэффициентов может быть промоделирована электрической цепью по методу электрических узлов. Сущность этого метода кратко можно охарактеризовать следующим образом.

Рассмотрим задачу приближенного определения потокораспределения в электрической сети энергосистемы, исходя из допущения одинаковых напряжений в узлах. При этом для каждого i -го независимого контура схемы исследуемой цепи уравнение имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m_i} \dot{S}_{ij} \dot{Z}_{ij} = \left(1 - \prod_{v=1}^{n_i} \dot{k}_{iv} \right) \dot{U}_{cp}^2,$$

где m_i – общее число ветвей в контуре, n_i – число трансформаторов в контуре, \dot{S}_{ij} , $j=1, 2, \dots, m_i$ – комплексная полная мощность в j -й ветви i -го контура, \dot{Z}_{ij} , $j=1, 2, \dots, m_i$ – комплекс приведенного сопротивления соответствующей ветви; \dot{k}_{iv} , $v=1, 2, \dots, n_i$ – комплексный коэффициент трансформации v -го трансформатора в i -м контуре, причем первичной считается обмотка, проходимая первой при обходе контура в принятом для него положительном направлении, \dot{U}_{cp} – средняя величина напряжения той ступени, к которой приведены сопротивления ветвей.

Это комплексное уравнение распадается на два действительных:

$$\sum_{j=1}^{m_i} (P_{ij} R_{ij} + Q_{ij} X_{ij}) = \left(1 - \operatorname{Re} \left[\prod_{v=1}^{n_i} \dot{k}_{iv} \right] \right) \dot{U}_{cp}^2,$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} (P_{ij} X_{ij} - Q_{ij} R_{ij}) = -\operatorname{Im} \left[\prod_{v=1}^{n_i} \dot{k}_{iv} \right] \dot{U}_{cp}^2,$$

где P_{ij} , Q_{ij} – потоки соответственно активной и реактивной мощности в j -й ветви i -го контура; R_{ij} , X_{ij} – соответственно активное и реактивное сопротивления j -й ветви i -го контура.

В матричной форме уравнения второго закона Кирхгофа можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{NR} & \mathbf{NX} \\ \mathbf{NX} & -\mathbf{NR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(\operatorname{Re})} \\ \mathbf{K}^{(\operatorname{Im})} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{N} – матрица контуров схемы размера $(m-k+1) \times m$ (m – число ветвей, n – число узлов схемы), \mathbf{R} , \mathbf{X} – диагональные матрицы соответственно активных и реактивных сопротивлений ветвей, \mathbf{P} , \mathbf{Q} – вектор-столбцы потоков соответственно активных и реактивных мощностей в ветвях, $\mathbf{K}^{(\operatorname{Re})}$, $\mathbf{K}^{(\operatorname{Im})}$ – векторы правых частей последних уравнений соответственно, обусловленные наличием трансформаций в контурах и равные нулю, если трансформации отсутствуют.

Аналогично уравнения первого закона Кирхгофа в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_y \\ \mathbf{Q}_y \end{bmatrix},$$

где \mathbf{M} – матрица соединений схемы размера $(n-1) \times m$, \mathbf{O} – нулевая матрица размера $(n-1) \times m$, \mathbf{P}_y , \mathbf{Q}_y – векторы соответственно активных и реактивных мощностей в узлах.

Полное уравнение потокораспределения в сети с использованием коэффициентов распределения можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = C_{нагр} \begin{bmatrix} P_y \\ Q_y \end{bmatrix} + C_{mp} \begin{bmatrix} k^{(Re)} \\ k^{(Im)} \end{bmatrix},$$

где $C_{нагр} = D^{-1} \begin{bmatrix} M^* & O \\ O^* & M \end{bmatrix}$; $C_{mp} = D^{-1} \begin{bmatrix} RN & XN \\ XN & -RT \end{bmatrix}$ –

матрицы коэффициентов распределения соответственно для нагрузочных и уравнительных потоков в ветвях, а D – матрица коэффициентов напряжений.

В матричной форме выражение для потока полной мощности в начале линии может быть записано следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{S}_n &= (G - jB) \text{diag } \hat{U}_n [\hat{U}_n - \text{diag}(k' + jk'') \dot{U}_k] + \\ &+ j(G - jB) \text{diag } \hat{U}_n \text{diag}(k' + jk'') \text{diag } \dot{U}_k M^* \delta, \end{aligned}$$

где G, B – диагональные матрицы активных и реактивных проводимостей,

$\text{diag } U_n, \text{diag } \dot{U}_k, \text{diag}(k' + jk'') = \text{diag } k$ – диагональные матрицы модулей напряжений в начале и конце звеньев и коэффициентов трансформации,

$\dot{S}_n, \hat{U}_n, \dot{U}_k$ – столбцовые матрицы мощностей в начале звеньев и модули напряжений в начале и конце, δ – столбец фазовых напряжений узлов относительно балансирующего, M – действительная часть комплексной матрицы инцидентий схемы (не учитывающая коэффициенты трансформации).

Тогда получим выражения для потока мощности в начале каждой линии:

$$\begin{aligned} P_n &= G \text{diag } \hat{U}_n (\hat{U}_n - \text{diag } k \dot{U}_k) - B \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } k'' \dot{U}_k - \\ &- (G \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } k'' - B \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } k') \dot{U}_k M^* \delta; \\ Q_n &= G \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } k'' \dot{U}_k + B \text{diag } \hat{U}_n (\hat{U}_n - \text{diag } k \dot{U}_k) - \\ &- (G \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } k' - B \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } k'') \dot{U}_k M^* \delta. \end{aligned}$$

С учетом коэффициентов трансформации уравнение потока полной мощности для каждой ветви получит вид:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= P_{ik} - jQ_{ik} = \dot{U}_{ik} (\hat{U}_{in} - \dot{U}_{ik} k'_i) (g_i - jb_i) - \dot{U}_{ik}^2 k''_i (b_i + jg_i) + \hat{U}_{in} \dot{U}_{ik} (b_i + jg_i) \delta_i = \\ &= (g_i - jb_i) \dot{U}_{ik} (\hat{U}_{in} - \dot{U}_{ik} k'_i) - j(g_i - jb_i) \dot{U}_{ik}^2 k''_i + j(g_i - jb_i) \hat{U}_{in} \dot{U}_{ik} \delta_i = \\ &= (g_i - jb_i) \dot{U}_{ik} (\hat{U}_{in} - \dot{U}_{ik} k'_i - j\dot{U}_{ik}) + j(g_i - jb_i) \hat{U}_{in} \dot{U}_{ik} \delta_i. \end{aligned}$$

Соответственно в матричной форме выражения для потоков полной, активной и реактивной мощностей в конце каждой линии определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{S}_k &= (G - jB) \text{diag } \dot{U}_k [\hat{U}_n - \text{diag}(k' + jk'') \dot{U}_k] + j(G - jB) \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } \dot{U}_k M^* \delta. \\ P_k &= G \text{diag } \dot{U}_k (\hat{U}_n - \text{diag } k \dot{U}_k) - B \text{diag } \dot{U}_k \text{diag } k'' \dot{U}_k + B \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } \dot{U}_k M^* \delta; \\ Q_k &= G \text{diag } \dot{U}_k \text{diag } k'' \dot{U}_k + B \text{diag } \dot{U}_k (\hat{U}_n - \text{diag } k \dot{U}_k) - G \text{diag } \hat{U}_n \text{diag } \dot{U}_k M^* \delta. \end{aligned}$$

Как показали практические расчеты, распространенное убеждение в том, что приближенный отдельный расчет потоков активных и реактивных мощностей в сети при приложении к независимым узлам задающих мощностей соответствующего рода в качестве необходимого допущения требует однородности сети, неверно [2].

Полученные уравнения позволяют выполнить многовариантные расчеты потокораспределения в сложно-замкнутой сети электроэнергетической системы любой сложности, неоднородной структуры и с учетом комплексных коэффициентов трансформации.

Список цитированных источников

1. Холмский, В.Г. Расчет и оптимизация режимов электрических сетей / В.Г. Холмский. – М.: Высшая школа, 1975. – 280 с.
2. Гурский, С.К. Алгоритмизация задач управления режимами сложных систем в электроэнергетике / С.К. Гурский. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 368 с.
3. Pelissier, Rene. Les reseaux d'energie electrique. Dunod. Paris, – 1975. – 568 с.

УДК 532.546:536.421

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С ДВУМЯ ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ МЕТОДОМ ЛОВЛИ ФРОНТА В УЗЕЛ СЕТКИ**Рахматуллина Л.Р.***Башкирский государственный университет, г. Стерлитамак (Россия)**Научный руководитель: Хасанов М.К., к.ф.-м.н, доцент*

Рассмотрим одномерную задачу об образовании газогидрата в полубесконечном пористом пласте. Пусть пористый пласт (занимающий полупространство $x > 0$) в начальный момент времени насыщен газом и водой, давление и температура которых в исходном состоянии соответствуют термодинамическим условиям существования их в свободном состоянии. Положим, что через границу пласта ($x=0$) закачивается газ, причем его давление и температура соответствуют условиям образования газогидрата и поддерживаются на этой границе постоянными. При постановке данной задачи будем полагать, что в результате закачки газа образуется три характерные области: ближняя, где поры заполнены газом и гидратом, промежуточная, в которой газ, вода и гидрат находятся в равновесии, и дальняя, которая заполнена газом и водой. В промежуточной зоне происходит образование гидрата. Соответственно возникают две подвижные поверхности: между дальней и промежуточной областями, где начинается переход воды в гидрат, и между ближней и промежуточной областями, на которой заканчивается процесс гидратообразования.

Система основных уравнений, представляющая собой законы сохранения масс, энергии, закон Дарси и уравнение состояния газа, при допущениях о несжимаемости и неподвижности скелета пористой среды, гидрата и воды, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_g m S_g + \rho_h m S_h G) + \operatorname{div}(\rho_g m S_g \vec{v}_g) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_l S_l + m(1-G)\rho_h S_h) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \rho_g c_g m S_g \vec{v}_g \operatorname{grad} T &= \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_h S_h L_h), \\ m S_g \vec{v}_g &= -\frac{k_g}{\mu_g} \operatorname{grad} p, \quad p = \rho_g R_g T, \end{aligned}$$

где m – пористость; G – массовая концентрация газа в гидрате; ρ_j и S_j ($j = sk, h, l, g$) – истинные плотности и насыщенности пор j -й фазы; \vec{v}_g , k_g , c_g и μ_g – соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость и динамическая вязкость газовой фазы; p – давление; T – температура; L_h – удельная теплота гидратообразования; ρc и λ – удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности системы; индексы sk, h, l и g относятся к параметрам скелета, гидрата, воды и газа соответственно.

При образовании газогидрата в пористом пласте возникают зоны, в которых газ, вода и гидрат могут находиться в различных состояниях. На поверхностях разрыва между этими зонами, где терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла, выполняются соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла:

$$\begin{aligned} [m(S_h \rho_h (1-G) + S_l \rho_l) \vec{D}_{(s)}] &= 0, & [m(\rho_g S_g (\vec{v}_g - \vec{D}_{(s)}) - \rho_h S_h G \vec{D}_{(s)})] &= 0, \\ [\lambda \text{ grad } T] &= [m \rho_h L_h S_h \vec{D}_{(s)}]. \end{aligned}$$

Здесь $[\psi]$ – скачок параметра ψ на границе между зонами; $\vec{D}_{(s)}$ – скорость движения этой границы. Температура и давление на этих границах полагаются непрерывными.

В трехфазной области, где одновременно присутствуют газ, вода и гидрат, и происходит процесс образования газогидрата, принимается условие равновесия фаз:

$$T = T_0 + T_* \ln \left(\frac{P}{P_{s0}} \right),$$

где T_0 – исходная температура системы, P_{s0} – равновесное давление, соответствующее исходной температуре, T_* – эмпирический параметр, зависящий от вида газогидрата.

Рассмотренная постановка задачи относится к классу нелинейных задач математической физики. Поскольку данные задачи определены в областях с неизвестными подвижными границами фазовых переходов, то для их решения используется метод ловли фронтов в узлы пространственной сетки. Введем равномерную пространственную сетку с шагом h . Алгоритм решения заключается в том, что неизвестный временной шаг выбирается таким образом, чтобы ближний фронт фазового перехода $x = X_{(n)}$ перемещался по координате x ровно на один шаг. При этом положение дальней подвижной поверхности $x = X_{(n)}$ также будем относить к некоторому узлу пространственной сетки, которое будет определяться уже в ходе решения задачи. Построенную систему нелинейных алгебраических уравнений целесообразно на каждом временном слое решать методом простых итераций.

В результате анализа решений установлено, что процесс перехода воды в состав гидрата происходит в три этапа. На первом этапе, когда влияние правой границы несущественно, в общем случае образуется три области, а именно: ближняя, где в порах присутствуют газ и гидрат, промежуточная, насыщенная газом, гидратом и водой, а также дальняя область, содержащая газ и воду. На втором этапе промежуточная область вырождается во фронтальную поверхность. Третий, самый протяженный по времени этап характеризуется образованием гидрата только лишь на фронтальной поверхности. При этом в зависимости от значения давления на границе пористой среды и температуры нагнетаемого газа могут реализовываться решения с «висячим» на некотором сечении или выносящимся за пределы пористой среды скачками гидратонасыщенности.

УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Савчук О.В.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Мирская Е.И., к.ф.-м.н., доцент

Исследование статистических оценок спектральных плотностей является одной из классических задач анализа временных рядов. Это связано с широким применением анализа временных рядов к анализу данных, которые возникают в физике, технике, тео-

рии распознавания образов, экономике. Часто данные являются многомерными. Такая ситуация особенно характерна для экономических данных.

В данной работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности многомерного временного ряда исследована статистика вида

$$\tilde{f}_{ab}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^T W_{ab}(\lambda - \frac{2\pi s}{T}) \hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda), \quad (1)$$

где $W_{ab}(x), x \in R, a, b = \overline{1, r}, \lambda \in \Pi = [-\pi; \pi]$ – спектральные окна, а статистика $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$ задана соотношением

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_{ab}(\lambda, l), \quad (2)$$

где

$$I_{ab}(\lambda, l) = \frac{1}{2\pi \sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(p) h_b^N(p)} H_a(\lambda, l) \overline{H_b(\lambda, l)},$$

$l = \overline{1, L}, a, b = \overline{1, r}, \lambda \in \Pi$, модифицированная периодограмма на l -м интервале разбиения, а $H_a(\lambda, l)$ задано выражением

$$H_a(\lambda, l) = \sum_{p=0}^{N-1} h_a^N(t) X_a(t + (l-1)(N-K)) e^{-i\lambda(t+(l-1)(N-K))},$$

$l = \overline{1, L}, a = \overline{1, r}, \lambda \in \Pi, t \in Z$.

Оценка взаимной спектральной плотности, заданная соотношением (1), построена по T последовательным, полученным через равные промежутки времени, наблюдениям за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}, t \in Z$ с $MX(t) = 0$, с неизвестной матрицей спектральных плотностей $f(\lambda) = \{f_{ab}(\lambda), a, b = \overline{1, r}\}, \lambda \in \Pi = [-\pi; \pi]$, а также неизвестной ковариационной матрицей $R(\tau) = \{R_{ab}(\tau), a, b = \overline{1, r}\}, \tau \in Z$.

Статистика (2) исследована в работах [1], [2]. Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация предложенной статистики. Исследовано их асимптотическое поведение.

В данной работе вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация оценки, заданной соотношением (1).

Исследовано асимптотическое поведение первых двух моментов оценки. Показано, что при некоторых ограничениях на окна просмотра данных, спектральные окна и взаимную спектральную плотность $f_{ab}(x), a, b = \overline{1, r}$, для оценки $\tilde{f}_{ab}(\lambda), \lambda \in \Pi$, заданной выражением (1), справедливы соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\tilde{f}_{ab}(\lambda) = f_{ab}(\lambda), \quad (3)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\tilde{f}_{ab}(\lambda) = 0, \quad (4)$$

$\lambda \in \Pi, a, b = \overline{1, r}$.

Откуда следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (D\tilde{f}_{ab}(\lambda) + (M\tilde{f}_{ab}(\lambda) - f_{ab}(\lambda))^2) = 0.$$

Таким образом, показано, что статистика $\tilde{f}_{ab}(\lambda), \lambda \in \Pi, a, b = \overline{1, r}$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности.

С помощью математического пакета Matlab для конкретного временного ряда был проведен сравнительный анализ дисперсии оценки, заданной соотношением (1) для различной степени пересечения интервалов разбиения.

Показано, что дисперсия оценки (1) уменьшается при увеличении числа интервалов разбиения исходной последовательности наблюдений. Наиболее эффективным является использование окон просмотра данных Хэмминга и Рисса.

Таким образом, в работе в качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности многомерного временного ряда использована статистика, построенная путем осреднения модифицированных периодограмм по пересекающимся интервалам наблюдений.

Показано, что предложенная оценка является асимптотически несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой взаимной спектральной плотности процесса.

Список цитированных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.
2. Труш, Н.Н. Статистические свойства оценок спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Н.Н. Труш, Е.И. Мирская // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования: сб. науч. ст. – Минск. – 1991. – С. 180-185.

УДК 512.542

A_4 -СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ С НЕБОЛЬШИМИ ИНДЕКСАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Серая С.А.

*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Трофимук А.А., к.ф.-м.н.*

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Одним из наиболее перспективных направлений теории конечных групп является направление, связанное с исследованием инвариантов разрешимых групп, у которых на индексы максимальных подгрупп накладываются определенные ограничения.

В 1954 году Б. Хупперт [2] доказал, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы её максимальных подгрупп являются простыми числами. Легко проверить, что нильпотентная длина такой группы не превышает 2.

Ф. Холл [3] в 1958 году установил разрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел.

Исследование групп, у которых индексы максимальных подгрупп примарны и не делятся на кубы простых чисел, проведено в работах В.С. Монахова и Е.Е. Грибовской [4]. В частности, установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина таких групп не превышает 4.

Строение разрешимых групп, индексы максимальных подгрупп которых равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, получено в работах В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [5]. В частности, доказано, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, нильпотентная длина таких групп не превышает 4.

Напомним, что группа называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Из теоремы Гуральника следует, что если индекс любой максимальной подгруппы группы G примарен, то группа G либо разрешима, либо $G/S(G)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(G)$ – разрешимый радикал группы G . Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная знакопеременной группе A_4 , то любая A_4 -свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп примарны, является разрешимой.

В ряде работ авторов данного материала было показано, что в A_4 -свободной группе, индексы максимальных подгрупп которой являются простыми числами или квадратами простых чисел, нильпотентная длина группы G и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3. Кроме этого, в A_4 -свободной группе, индексы максимальных подгрупп которой равны простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

В работе [6] исследовались A_4 -свободные группы G с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 8. В частности, было установлено, что в таких группах производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3.

В работе [7] было показано, что в A_4 -свободной группе G с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 27, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3.

Поэтому естественно продолжить изучение A_4 -свободных групп G с небольшими индексами максимальных подгрупп. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G – A_4 -свободная группа, у которой индексы максимальных подгрупп равны простым числам, квадратам простых чисел либо p^3 , где $p = \{5, 11, 17\}$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Для простых чисел $p = \{7, 13\}$ понижение оценки производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ не происходит.

Список цитированных источников

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
2. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert – Math. Zeitschr. – 1954. – V. 60. – P. 409–434.
3. Холл, М. Теория групп / М. Холл – М.: ИЛ. – 1962. – 468 с.
4. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Трофимук, А.А. Конечные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / А.А. Трофимук // Вестник Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина. Серия естественных наук. – 2009. – №2(33). – С. 25–31.
7. Трофимук, А.А. A_4 -свободные группы с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или 27 / А.А. Трофимук, И.Н. Фенчук // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы V Международной научно-практической Интернет-конференции, Мозырь, 26–29 марта 2013 г. / УО МГПУ им. И.П. Шамякина. – Мозырь, 2013. – С. 204–205.

УДК 519.872

О ПРИМЕНЕНИИ НМ-СЕТИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ БАНКОВСКОЙ СФЕРЫ

Стефанович О.И.

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, г. Гродно
Научный руководитель: Матальцкий М.А., д.ф.-м.н., профессор*

Рассмотрим НМ (Howard - Matalytski)-сеть [1], состоящую из n систем обслуживания (СМО) S_1, S_2, \dots, S_n , в которых обслуживаются заявки двух типов. СМО S_i является системой с двумя очередями и m_{ic} линиями обслуживания для заявок типа c , $c = 1, 2$, в которых отдельно обслуживаются заявки 1-го и 2-го типов, т.е. функционирование СМО S_i можно рассматривать как параллельное функционирование двух отдельных подсистем S_{i1} и S_{i2} , $i = \overline{1, n}$. Под состоянием сети будем понимать вектор

$$k(t) = (k, t) = (k_{11}, k_{12}; k_{21}, k_{22}; \dots; k_{n1}, k_{n2}, t),$$

где k_{ic} – число заявок типа c в подсистеме S_{ic} в момент времени t , $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$.

Пусть λ_{ic} – интенсивность поступления заявок типа c извне в подсистему S_{ic} , $\mu_{ic}(k_{ic})$ – интенсивность обслуживания заявок типа c в каждой из m_{ic} линий подсистемы S_{ic} , $p_{i0}^{(c)}$ – вероятность ухода заявок типа c из сети после обслуживания в системе S_i , $p_{ij}^{(c)}$ – вероятность

перехода заявки типа c из системы S_i в систему S_j $\sum_{j=0}^n p_{ij}^{(c)} = 1$, $i = \overline{1, n}$, $c = 1, 2$,

$i \neq j$. Система S_0 при этом соответствует внешней среде. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней СМО некоторый случайный доход и соответственно доход первой СМО уменьшается на эту величину. Обозначим через $V_i(t)$ доход системы S_i в момент времени t , $V_i(t_0) = v_{i0}$.

Описанная НМ – сеть может служить моделью перевозки денежной наличности между условным центральным банком (ЦБ) и периферийными банками (ПБ) города. Количество перевозок денежной наличности, а также количество перевозимой наличности являются случайными величинами. За каждую перевозку ЦБ получает от ПБ определенную сумму, которая определяется в процентах от суммы перевозимой наличности. Система S_i , $i = \overline{1, n}$ соответствует i -му банку, подсистема S_{i1} – это отдел банка, который занимается обработкой денег 1-го типа (например, бел. рублей), подсистема S_{i2} – отдел, который занимается обработкой денег 2-го типа (например, валюты).

Опишем также, что означают другие параметры сети:

v_{i0} – резерв банка S_i , $i = \overline{1, n}$;

r_{0i}^c – количество денег типа c , поступивших извне в банк S_i за одну перевозку, $c = 1, 2$;

$R_{i0}^{(1)}$, $R_{i0}^{(2)}$ – соответственно количество денег 1-го и 2-го типов, перевозимых из банка S_i в другие банки, не входящие в нашу банковскую сеть, за одну перевозку $i = \overline{1, n}$;

$r_{ji}^{(1)}$, $r_{ji}^{(2)}$ – соответственно количество денег 1-го и 2-го типов, перевозимых из банка S_j в банк S_i за одну перевозку;

$R_i^{(1)}, R_i^{(2)}$ – плата ПБ S_i ЦБ за перевозку денег 1-го и 2-го типов соответственно;

$r_i^{(1)}, r_i^{(2)}$ – величины увеличения дохода банка S_i за счет процентов от суммы перевозимой наличности, $i = \overline{1, n}$.

Как только банк установил сумму резервов, для обслуживания клиентов банка, эти деньги выпадают из оборота. Поэтому банк заинтересован в том, чтобы суммы резервов были минимальными. Но если в начале дня установить малые резервы, а затем увеличивать их при необходимости, то за каждое увеличение резерва надо платить. Поэтому важной задачей является нахождение оптимальных резервов банков.

Было получено выражение для ожидаемого дохода системы S_i :

$$v_i(t) = M\{V_i(t)\} = v_{i0} + \sum_{c=1}^2 v_{ic}(t) =$$

$$= v_{i0} + \sum_{c=1}^2 \left[(c_i^{(c)} + \lambda_{ic} a_{0i}^{(c)})t + \sum_{j=1}^n \mu_{jc} a_{ji}^{(c)} p_{ji}^{(c)} \int_0^t \min(N_{jc}(s), m_{jc}) ds - \right.$$

$$\left. - \mu_{ic} \int_0^t \min(N_{ic}(s), m_{ic}) ds \sum_{j=0}^n (b_{ij}^{(c)} + b_i^{(c)}) p_{ij}^{(c)} \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $N_{ic}(s)$ – среднее число заявок типа c в подсистеме S_{ic} системы S_i . Величины $N_{ic}(s)$, могут быть найдены с помощью метода, рекуррентного по моментам времени.

$M\{r_{0i}^{(c)}\} = a_{0i}^{(c)}, \quad M\{R_{i0}^{(c)}\} = b_{i0}^{(c)}, \quad M\{r_{ji}^{(c)}\} = a_{ji}^{(c)}, \quad M\{R_{ij}^{(c)}\} = b_{ij}^{(c)}, \quad M\{R_i^{(c)}\} = b_i^{(c)},$
 $M\{r_i^{(c)}\} = c_i^{(c)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad c = 1, 2$, здесь M – знак математического ожидания.

Рассмотрим частный случай, когда $m_{ic} = 1$ и пусть подсистемы S_{ic} функционируют в условиях высокой нагрузки, т.е. $\forall t \quad k_{ic}(t) > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad c = 1, 2$. В этом случае $\min(N_{ic}(s), 1) = 1$ и, как следует из (1), ожидаемый доход системы S_i равен:

$$v_i(t) = v_{i0} + g_i t,$$

где

$$g_i = \sum_{c=1}^2 (c_i^{(c)} + \lambda_{ic} a_{0i}^{(c)} - \mu_{ic} b_i^{(c)}) + \sum_{j=1}^n \mu_{jc} a_{ji}^{(c)} p_{ji}^{(c)} - \mu_{ic} \sum_{j=0}^n b_{ij}^{(c)} p_{ij}^{(c)},$$

v_{i0} – ожидаемый доход системы S_i в начальный момент времени (резерв банка S_i), $i = \overline{1, n}$.

Отсюда следует, что если $g_i \geq 0$, то для того, чтобы

$$v_i(t) \geq 0, \quad (2)$$

нам достаточно взять $v_{i0} = v_{i0}^* = 0$; если же $g_i < 0$, то для того, чтобы выполнялось неравенство (2) на отрезке времени $[0, T]$, мы должны положить $v_{i0} = v_{i0}^* = |g_i| T$.

Ещё одной важной практической задачей является следующая. Разобьём интервал $[0; T]$ точками $t_k: 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$. Предположим, что если мы меняем значение v_{i0} в момент времени t_k , то мы платим плату $g_i(t_k)$, т.е. доход системы S_i уменьшается на эту величину. Предположим также, что на интервалах времени $[0; t_1), [t_1; t_2), \dots, [t_{k-1}; t_k), \dots, [t_m; T)$ меняются параметры нашей сети $\lambda_{ic}, \mu_{ic}, p_{ij}^{(c)}$ и мы получаем последовательность $g_i^{(1)}, g_i^{(2)}, \dots, g_i^{(m)}$. Задача тогда принимает вид ($t_0 = 0; t_m = T$):

$$\sum_{k=1}^n \left[|g_i^{(k)}| (t_k - t_{k-1}) + g_i(t_k) \right] \rightarrow \min_{n, t_1, t_2, \dots, t_{m-1}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $g_i^{(k)}$ – величина дохода системы S_i при изменении параметров сети $\lambda_{ic}, \mu_{ic}, P_{ij}^{(c)}$ на интервале времени $[t_{k-1}, t_k)$, $i = \overline{1, n}$.

Если t_1, t_2, \dots, t_{m-1} – целые числа, то задача (3) является задачей целочисленной оптимизации. Для решения данной задачи применялся метод полного перебора, разработана программа для её решения. Она находит сумму произведений величины резерва на время отвлечения этого резерва, а затем эта сумма минимизируется. Результаты, полученные при помощи программы, могут быть использованы для анализа и принятия управленческих решений.

Список цитированных источников

1. Маталыцкий, М.А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применение: монограмма / М.А. Маталыцкий, О.М. Тихоненко, Е.В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.

УДК 681.3.06

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

Сухоцкий Р.П.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Лебедь С.Ф., к.ф.-м.н., доцент*

В работе рассмотрено понятие производящей функции и ее приложения.

Определение. Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется сумма

степенного ряда $f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Приложения производящей функции.

• **Комбинаторика.**

Постановка задачи о расстановке черных и белых шаров: Сколькими различными способами можно расположить в линию чёрные и белые шары, общее количество которых равно n ?

Решение: В этой задаче есть один параметр – число шаров n . Решением считается формула, позволяющая получить ответ для любого заданного n (в данном случае $n \geq 0$). Этот ответ будем обозначать символом a_n .

Обозначим белый шар символом \circ , а чёрный – \bullet . Нулевое количество шаров будем обозначать o . Получим решение для небольшого значения параметра. Например: $n = 2 : \circ\circ, \circ\bullet, \bullet\circ, \bullet\bullet \Rightarrow a_2 = 4$; $n = 1 : \circ, \bullet \Rightarrow a_1 = 2$. Единственный способ не располагать в линию ничего – это **ничего не делать**, причём ничего не делать **можно одним способом**.

В случае $n = 3$ можно взять самый левый шар белым и закончить комбинацию $\circ \dots$ **четырьмя способами**, а можно взять его чёрным, закончив комбинацию $\bullet \dots$ **также четырьмя способами**. Значит, $a_3 = 2a_2$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $a_n = 2a_{n-1}$ (для $n \geq 1$), это означает, что $a_n = 2^n$.

Решим данную задачу с помощью производящей функции. Для этого «просуммируем» все возможные комбинации (включая пустую) следующим образом:

$$A = \emptyset + \circ + \bullet + \circ\circ + \bullet\circ + \circ\bullet + \bullet\bullet + \circ\circ\circ + \circ\circ\bullet + \circ\bullet\circ + \bullet\circ\circ + \bullet\bullet\bullet + \dots$$

Проведя с «рядом» A ряд арифметических манипуляций, получим $A = \emptyset \emptyset \circ - \bullet$, т.е.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} (\circ + \bullet)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \circ^k \bullet^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k t^n.$$

Так как в нашей задаче неважно, какой шар на каком месте стоит, важно, что их общее количество равно n , то можно заменить оба символа \circ и \bullet одной буквой t . Значит,

$$a_n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

• Теория вероятностей.

1. Постановка задачи. Вероятность перегорания первой, второй, третьей и четвертой ламп равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы равна 0,2; двух ламп – 0,4; трех – 0,6; четырех – 0,8. Определить вероятность выхода прибора из строя.

Решение. Традиционно такого рода задачи решаются при помощи формулы полной вероятности. Применение понятия производящей функции существенно сокращает вычисления. Одна из простейших производящих функций в теории вероятностей связана с событиями с двумя исходами (бросание монеты, устройство работает или нет, и т.д.): $q + p = 1$. Для n независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли) производящей функцией будет $f(t) = (q + pt)^n$.

По условию задачи имеем: $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$, $q_1 = 0.9$; $q_2 = 0.8$; $q_3 = 0.7$; $q_4 = 0.6$. Тогда производящая функция равна:

$$f(t) = 0.3024 + 0.4404t + 0.2144t^2 + 0.0404t^3 + 0.0024t^4,$$

где коэффициенты при t^k – вероятности отказа k -й лампы. Применяя формулу полной вероятности, находим вероятность выхода прибора из строя:

$$P = 0.4404 \cdot 0.2 + 0.2144 \cdot 0.4 + 0.0404 \cdot 0.6 + 0.0024 \cdot 0.8 = 0.2.$$

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Нахождение числовых характеристик ДСВ с целыми неотрицательными значениями удобно производить с помощью производящих функций.

Пусть задан ряд распределения ДСВ X .

X_i	0	1	2	...	k	...
P_i	P_0	P_1	P_2	...	P_k	...

Производящей функцией для ДСВ X называется функция вида:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k,$$

где t – произвольный параметр, $0 < t \leq 1$, p_k – вероятности закона распределения ДСВ X .

Дифференцируя по t производящую функцию и положив в ней $t = 1$, получим:

$$f'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M(X), \text{ то есть математическое ожидание } M(X) = f'(1).$$

Рассуждая аналогично, получим, что дисперсия ДСВ X вычисляется по формуле:

$$D(X) = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2.$$

Постановка задачи. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X . Ряд распределения СВ X :

X_i	0	1	2	3
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Решение. Составим производящую функцию для нашей СВ X :

$$f(t) = 0.1 + 0.2t + 0.3t^2 + 0.4t^3, \text{ тогда:}$$

$$M(X) = f'(1) = 2 \text{ и } D(X) = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = 1.$$

• **Применение производящей функции для нахождения суммы ряда.**

Постановка задачи. Найти сумму ряда: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$.

Решение. Введем в рассмотрение четыре числовых последовательности $a_k = 1, b_k = ka_k, c_k = kb_k$ и $d_k = \sum_{i=1}^k i^2$, а так же их производящие функции $f_a(t), f_b(t), f_c(t), f_d(t)$.

Искомой суммой будет число d_k – общий член последовательности $\{d_k\}$. Для его определения надо найти $f_d(t)$.

$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot t^k = \frac{1}{1-t}, f'_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^{k-1}, t f'_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k = f_b(t).$$

Аналогично получим $f_c(t) = t \cdot f'_b(t) = t(t \cdot f'_a(t))' = t \cdot f'_f(t) + t^2 \cdot f''_a(t)$.

Утверждение. Если $a_n = \sum_{i=0}^n b_i, n = 0, 1, 2, \dots$, то $f_a(t) = \frac{1}{1-t} f_b(t)$.

Тогда $f_d(t) = \frac{1}{1-t} f_c(t)$. Т.к. $f_a(t) = \frac{1}{1-t}$ разложим полученное выражение в ряд:

$$f_d(t) = \frac{1}{1-t} (t f'_a(t) + t^2 f''_a(t)) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^4}. \text{ Т.к. } \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k \cdot t^k, \text{ то } \frac{1}{(1-t)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k \cdot t^k.$$

Следовательно,

$$f_d(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t)^4} = t \cdot \frac{1}{(1-t)^4} + t^2 \cdot \frac{1}{(1-t)^4} = t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k \cdot t^k + t^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k \cdot t^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^k \cdot t^{k+2}.$$

Откуда

$$d_k = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-2} = C_{k+2}^3 + C_{k+1}^3 = \frac{(k+2)!}{(k-1)!3!} + \frac{(k+1)!}{(k-2)!3!} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Значит,
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Список цитированных источников:

1. Шапорев, С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.: ил.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

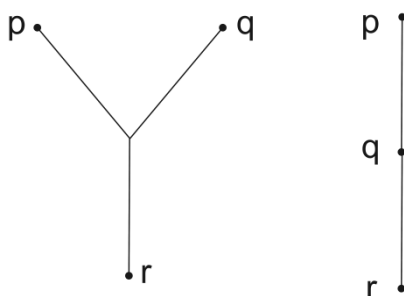


Рисунок 1

Если следовать этому алгоритму, получится следующий вывод (2) в фитчевской нотации, соответствующий доказательству (1):

1.	$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	доп. 1
2.	$\exists xP(x)$	доп. 2
3.	$P(a)$	доп. 3
4.	$P(a) \vee Q(a)$	$\vee^+, 3$
5.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists^+, 4$
6.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists^-, 5, -3$
7.	$\exists xQ(x)$	доп. 4
8.	$Q(b)$	доп. 5
9.	$P(b) \vee Q(b)$	$\vee^+, 8$
10.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists^+, 9$
11.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\exists^-, 10, -5$
12.	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\vee^-, -2, -4$
13.	$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \supset \exists x(P(x) \vee Q(x))$	$\supset^+, -1$

Крайняя верхняя левая формула вывода (1) – $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$. По п. 1 алгоритма берём её в качестве первого допущения. Сколько посылок в фигуре заключения, которую мы рассматриваем? Если эта формула является единственной посылкой, то по п. 2 алгоритма переходим к заключению данной фигуры, если больше, то по п. 3 переходим к другим посылкам. В нашем случае имеется 3 посылки. Но прежде, чем переходить непосредственно к самим посылкам, нам нужно преобразовать две ветви, корнями которых являются две оставшиеся посылки данной фигуры заключения. Переходим ко второй ветви и применяем к ней ту же последовательность действий. Находим её крайнюю верхнюю левую формулу: $\exists xP(x)$. Берём её в качестве второго допущения и рассматриваем фигуру заключения, в которую входит эта формула, выясняем, является ли она однопосылочной фигурой (в этом случае применяем п. 2 алгоритма), либо имеет большее количество посылок (тогда применяем п. 3 алгоритма). Следуя этой схеме, мы строим первые 11 строк доказательства. После того, как доказательство построено до 11-й строки включительно, мы трансформировали все ветви, укоренённые в посылках изначальной фигуры заключения, и теперь мы можем записать заключение этой фигуры. После этого применяем п. 2 алгоритма, поскольку заключение входит в нижнюю фигуру заключения в качестве единственной посылки, а после этого – п.4. На этом построение фитчевскую формы натурального вывода по его древовидной форме представления завершено.

УДК 519.652+517.548.5

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Худяков А.П.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Янович Л.А., д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент НАН

При решении многих практических задач обычно используются интерполяционные формулы невысоких порядков. Это относится как к случаю интерполяции скалярных функций, так и к задаче операторного интерполирования и вызвано в значительной степени тем, что при увеличении порядка интерполяционных формул значительно усложняется их общий вид, что приводит соответственно к более сложной структуре получаемых на их основе алгоритмов. Многие вопросы теории интерполирования операторов изложены в монографиях [1, 2].

Данная статья посвящена задаче построения и исследования алгебраических интерполяционных многочленов невысокого порядка для операторов, заданных на множестве функциональных матриц.

Случай двух узлов. Рассмотрим пространство $C^m[T]$ квадратных матриц $A(t) = [a_{ij}(t)]$, для которых производная $A^{(m)}(t) = [a_{ij}^{(m)}(t)]$ порядка m непрерывна на отрезке $[a, b]$ и матричный многочлен первой степени вида

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^n A(t_j)C_j + \sum_{k=0}^m \int A^{(k)}(s)P_k(t, s)ds, \quad (1)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $C_j = C_j(t)$ ($j = \overline{0, n}$), $P_k(t, s)$ ($k = \overline{0, m}$) – заданные матрицы той же размерности, что и матрица $A(t)$. Пусть $F(A)$ – заданная на $C^m[T]$ функция матричного аргумента A . Имеет место следующая

Теорема 1. Для формулы

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau, \quad (2)$$

где $A_0 = A_0(t)$, $A_1 = A_1(t)$ – узлы интерполирования,

$$\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i), \quad (3)$$

$$H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A_1(t_i) + A_0(t_i), \quad (4)$$

выполняются условия $L_1(A_i) = F(A_i)$ ($i = 0, 1$), и она точна для матричных многочленов вида (1).

Случай данной формулы при $n = 0$ рассмотрен в [1].

Случай трех узлов. Построим аналогичную формулу второго порядка. Рассмотрим матричные многочлены первой и второй степени вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1(A) = B + \sum_{j_1, j_2=0}^n \tilde{N}_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} + \\ + \sum_{k=0}^m \int P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(A) = \tilde{P}_1(A) + \sum_{j=0}^n C_{3,j} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] C_{4,j} [A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})] C_{5,j} + \\ + \sum_{k=0}^m \int P_{k,3}(t, s) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] P_{k,4}(t, s) [A^{(k)}(s_3) - A^{(k)}(s_4)] P_{k,5}(t, s) ds, \end{aligned} \quad (6)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – те же фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $B = B(\hat{t})$, $\tilde{N}_{j_1 j_2} = \tilde{N}_{j_1 j_2}(t)$, $D_{j_1 j_2} = D_{j_1 j_2}(t)$, $\tilde{N}_{i,j} = \tilde{N}_{i,j}(t)$ ($i = 3, 4, 5$), $(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0, n})$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t, s_1, s_2)$, $Q_k(t, s_1, s_2)$, $P_{k,i}(t, s)$ ($i = 3, 4, 5$), $(k = \overline{0, m})$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, $ds = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$. Заметим, что формула (2) инвариантна также относительно многочленов вида (5).

Пусть $F(A)$ – функция от матриц, где $A \in C^m[a, b]$. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} l_{21}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_1(t_i)] [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times \\ \times \left([F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)] + [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)] \right), \quad l_{22}(A) = \\ = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \tau \delta^2 F \left[\sigma_{1i}^{01}(\cdot) + \tau (A_1(\cdot) - \sigma_{1i}^{01}(\cdot)) + \tau \delta (A_2(\cdot) - \sigma_{1i}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot) \right] d\tau ds, \end{aligned}$$

где $\sigma_{1i}^{01}(t) = \sigma_{1i}(t)$, $\sigma_{1i}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$, $\sigma_{1i}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$, $H_{i0}(t) = H_i(t)$, $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$, а функции $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$, как и раньше, задаются формулами (3), (4). Имеет место

Теорема 2. Если существуют матрицы $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$ ($i = \overline{0, n}$), то для формулы

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A),$$

где $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{0, 2}$) – узлы интерполирования, $L_1(A)$ – многочлен, определенный формулой (2), выполняются условия $L_2(A_i) = F(A_i)$ ($i = \overline{0, 2}$), и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (6).

Пример. Рассмотрим интерполяционную формулу (2) в случае узлов

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{bmatrix} -t^3 + \alpha & t^2 + \beta \\ t^2 + \gamma & -t + \delta \end{bmatrix}$$

для функции $F(A) = e^{A(t)}$, заданной на множестве матриц вида

$$A(t) = \theta A_0(t) + (1 - \theta) A_1(t), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные числа.

Проводя необходимые преобразования и учитывая перестановочность соответствующих матриц, при $A(t) = \theta A_0(t) + (1 - \theta)A_1(t)$ будем иметь

$$L_1(A) = e^{A_0(t)} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)][A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}] + \frac{1}{n+1} \times \\ \times \sum_{i=0}^n \alpha_i(t)(A(t) - A(t_i) + A_0(t_i) - A_0(t))e^{\sigma_{1i}(t)} = A(t)B(t) + \sum_{i=0}^n A(t_i)B_i(t) + C(t),$$

где

$$\alpha_i(t) = \frac{1 - e^{t_i + t_i^3 - t - t^3}}{t + t^3 - t_i - t_i^3}, \quad B(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \alpha_i(t) e^{\sigma_{1i}(t)}, \\ B_i(t) = \frac{1}{n+1} \left([A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}] - \alpha_i(t) e^{\sigma_{1i}(t)} \right), \quad C(t) = e^{A_0(t)} - \\ - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left(A_0(t_i) [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [e^{\sigma_{1i}(t)} - e^{A_0(t)}] + \alpha_i(t) (A_0(t) - A_0(t_i)) e^{\sigma_{1i}(t)} \right).$$

Ряд других интерполяционных формул для функций от матриц получен также в [2–3].

Список цитированных источников

1. Makarov, V.L. Methods of Operator Interpolation / V.L. Makarov, V.V. Khlobystov, L.A. Yanovich. – К.: Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
2. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
3. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

УДК 517.3

О ПРОИЗВОДНОЙ ПО АДАМАРУ

Царук А.И.

*Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Дацьк В.Т., старший преподаватель*

Пусть $\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f$ и $D_{a+}^{\alpha} g$ – дробные интегралы и производные Адамара порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси:

$$(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{u} \right)^{\alpha-1} f(u) \frac{du}{u}, \quad (1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} g)(x) = \delta^n (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g)(x), \quad \delta = x \frac{d}{dx}, \quad n = [\alpha] + 1, \quad (2)$$

[1, §18.3]

Исследуем важные свойства, которые в дальнейшем можно применять для изучения проблемы существования и единственности решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения порядка $\alpha > 0$:

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f[x, y(x)] \quad (n-1 < \alpha \leq n) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, \quad b_k \in R \quad (k = 1, 2, \dots, n = [\alpha]). \quad (5)$$

Здесь $(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+)$ означает предел в правосторонней окрестности $(a, a+\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) точки a :

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+0} (D_{a+}^{\alpha-k} y)(x) \quad (1 \leq k \leq n), \quad (6)$$

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+0} (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \quad (\alpha \neq n), \quad (D_{a+}^0 y)(a+) = y(a) \quad (\alpha = n). \quad (7)$$

Для $n \in N = \{1, 2, \dots\}$ обозначим через $AC_{\delta}^n[a, b]$ пространство функций $g(x)$, имеющих $\delta = xD$ ($D = \frac{d}{dx}$) производные до порядка $n-1$ на $[a, b]$, причём $\delta^{n-1}[g(x)]$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$:

$$AC_{\delta}^n[a, b] = \left\{ g : [a, b] \rightarrow C : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC[a, b], \delta = x \frac{d}{dx} \right\}, \quad (8)$$

где $AC[a, b] = \left\{ h(x) : h(x) = C + \int_a^x \psi(t) dt, \quad \psi(t) \in L(a, b) \right\}. \quad (9)$

Справедлива теорема:

Теорема 1. Пространство $AC_{\delta}^n[a, b]$ состоит из тех и только тех функций $g(x)$, которые могут быть представлены в виде:

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left(\ln \frac{x}{a} \right)^k, \quad (10)$$

где

$$\varphi(t) \in L(a, b), \quad \varphi(t) = g_{n-1}^{\downarrow}(t), \quad g_k(x) = \delta^k [g(x)], \quad C_k = \frac{g_k(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Рассмотрим класс $X_c^p(a, b)$ $c \in R, 1 \leq p \leq \infty$, состоящий из комплекснозначных суммируемых по Лебегу функций f на $[a, b]$, для которых $\|f\|_{X_c^p} < \infty$, где

$$\|f\|_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty, c \in R). \quad (11)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b < \infty, c \in R$. Тогда оператор $\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}$ ограниченно действует в $X_c^p(a, b)$ и

$$\|\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f\|_{X_c^p} \leq K \|f\|_{X_c^p}, \quad (12)$$

где $K = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha}. \quad (13)$

Следующие три утверждения доказаны в [1].

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b, c \in R$. Тогда для $f \in X_c^p(a, b)$ имеет место полугрупповое свойство:

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{\beta} f = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f. \quad (14)$$

Лемма 2. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, 1 \leq p \leq \infty, 0 < a < b, c \in R$. Тогда для $f \in X_c^p(a, b)$ справедливо

$$D_{a+}^{\beta} \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f. \quad (15)$$

Теорема 3. Пусть $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1, g(x) \in AC_\delta^n[a, b]$. тогда дробная производная Адамара $D_{a+}^\alpha g$ существует почти всюду на $[a, b]$ и может быть представлена в виде

$$(D_{a+}^\alpha g)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} g_{n-1}^\delta(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{k-\alpha}, \quad (16)$$

где $g_k(a) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$ определяются из условия (10).

Для $\alpha > 0, \beta > 0$ справедлива формула [3, 1.5 (1)]:

$$\int_a^x \left(\ln \frac{x}{u}\right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{u}{a}\right)^{\beta-1} \frac{du}{u} = \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (17)$$

Справедлива так же следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $D_{a+}^\alpha \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 1 + [\alpha]$.

Доказательство.

С использованием формулы (17) получим:

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} &= \delta^n \left(\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} \right)(x) = \delta^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} \left(\ln \frac{u}{a}\right)^{\alpha-k} \frac{du}{u} \right) = \\ &= \delta^n \left(\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k} \right) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)} \delta^n \left(\left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k} \right) = \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)} \delta^{n-1} \left(x \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k} \right) = \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(n-k+1)} (n-k) \delta^{n-2} \left(x \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k-1} \right). \end{aligned}$$

Через $n-k$ шагов получим:

$$D_{a+}^\alpha \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k-1)}{\Gamma(n-k-1)} (n-k)(n-k-1)\dots(n-k-(n-k-2)) \delta^k \left(x \frac{d}{dx} \ln \frac{x}{a} \right) = 0.$$

Лемма доказана.

Определение 1. Через $\mathfrak{I}_{a+}^\alpha (X_0^1), \alpha > 0$ обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним интегралом порядка α от суммируемой функции $t\varphi(t)$:

$$f = \mathfrak{I}_{a+}^\alpha t\varphi, \quad t\varphi \in X_0^1(a, b).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Для того, чтобы $f(t) \in \mathfrak{I}_{a+}^\alpha (X_0^1), \alpha > 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-\alpha} \stackrel{def}{=} \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f \in AC_\delta^n[a, b], \quad n = [\alpha] + 1, \quad (18)$$

и

$$\left(\delta^k f_{n-\alpha}\right)(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (19)$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $f = \mathfrak{I}_{a+}^\alpha t\varphi, \quad t\varphi \in X_0^1[a, b]$. Тогда, в силу полугруппового свойства (14), $\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^\alpha t\varphi = \mathfrak{I}_{a+}^n t\varphi$. Значит,

$$\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) dt.$$

Поэтому, по теореме 1, $f_{n-\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f \in AC_{\delta}^n[a, b]$, $n = [\alpha] + 1$ и справедливо (19).

Достаточность.

При выполнении условий (18) и (19) $\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^n t\varphi$ $t\varphi \in X_0^1(a, b)$. В силу полугруппового свойства (14) $\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^n t\varphi = \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi$. Тогда $\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} (f - \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi) = 0$. Поэтому $f = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi$.

Теорема доказана.

Определение 2. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция $f(x) \in X_0^1(a, b)$ имеет суммируемую дробную производную $D_{a+}^{\alpha} f$, если $\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f \in AC_{\delta}^n[a, b]$, $n = [\alpha] + 1$.

Теорема 5. Пусть $\alpha > 0$. Тогда равенство

$$D_{a+}^{\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} \varphi = \varphi \tag{20}$$

выполняется для любой функции $\varphi(x) \in X_0^1(a, b)$, а равенство

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) \tag{21}$$

для функции

$$f(x) \in \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} (X_0^1). \tag{22}$$

Если вместо (22) предположить, что $f(x) \in X_0^1(a, b)$ и имеет суммируемую производную в смысле определения 2, то

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha - k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}, \tag{23}$$

где $n = [\alpha] + 1$, $f_{n-\alpha}(x) = \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f$.

Доказательство.

Равенство (20) доказано в [1].

Докажем равенство (21).

Пусть $f(x) \in \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} (X_0^1)$, $f(x) = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi(t)$, $t\varphi \in X_0^1(a, b)$. Тогда, с использованием равенства (20), получим:

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi = f(x),$$

а значит, равенство (21) доказано.

Пусть теперь $f(x) \in X_0^1(a, b)$ и имеет суммируемую производную в смысле определения 2, то есть, $\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f \in AC_{\delta}^n[a, b]$. По теореме 1:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^k f_{n-\alpha})(a)}{k!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^k = \\ &= \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} t\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^k f_{n-\alpha})(a)}{k!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^k. \end{aligned} \tag{24}$$

С использованием формулы (17) получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{u}\right)^{n-\alpha-1} \left(\ln \frac{u}{a}\right)^{\alpha-k-1} \frac{du}{u} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k-1} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} = \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k-1} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{(n-k-1)!}, \end{aligned}$$

и тогда

$$\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{(n-k-1)!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{(n-k-1)!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^k f_{n-\alpha})(a)}{k!} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^k.
\end{aligned}$$

Теперь равенство (24) с учётом полугруппового свойства (14) запишется в виде:

$$\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} t\varphi + \mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Значит,

$$\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} \left(f - \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1} \right) = 0.$$

Поэтому

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi = f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}. \quad (25)$$

Тогда с использованием равенства (20), получим:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f &= \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} \left(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1} \right) = \\
&= \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi + \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1} = \\
&= \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.
\end{aligned}$$

Согласно лемме 3, $D_{a+}^{\alpha} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, 1 + [\alpha]$. Поэтому $\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} t\varphi$,

и тогда из равенства (25) заключаем, что

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^{n-k-1} f_{n-\alpha})(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha-k-1}.$$

Теорема доказана.

Список цитированных источников

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск, 1987.

УДК 330.4

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Шахно М.И.

*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г.Брест
Научный руководитель: Климашевская И.Н., к.ф.-м.н., доцент*

Дифференциальное исчисление – широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций. Использование абстрактных

математических рассуждений при исследовании различного рода экономических систем позволяет осуществлять их глубокий анализ и делать далеко идущие выводы относительно поведения экономических переменных, а также давать обоснованные рекомендации по оптимальному управлению экономикой.

Для демонстрации эффективности применения методов дифференциального исчисления в рамках экономической сферы рассмотрим типичную задачу об оптимальной партии товара. Пусть фирма потребляет некоторый товар с годовым объёмом потребления A . Фирма закупает товар n раз в году через равные промежутки времени $T = 1/n$ равными партиями объёмом $I_0 = A/n$. На временном промежутке между двумя покупками товар расходуется полностью и равномерно с постоянной скоростью i . Если обозначить через $I(t)$ запас товара в момент t , то соотношение примет вид:

$$I(t) = I \cdot (t + m \cdot T) \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right), \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (1)$$

поскольку на любом временном промежутке между двумя покупками функция запаса $I(t)$ ведёт себя одинаково.

На промежутке $[0, T)$ функция имеет вид:

$$I(t) = I_0 - i \cdot t, \quad \text{где } t \in [0, T). \quad (2)$$

Скорость её изменения определяет производная $I'(t) = -i$. В начальный момент времени (момент закупки) запас товара равен объёму покупки $I(0) = I_0$.

Фирма несёт убытки, связанные с хранением товара и оформлением заказов. Заметим, что запас товара $I(t)$ предполагается изменяющимся непрерывно. Как следствие среднегодовое значение запаса товара равно $I_{cp} = I_0 / 2$. Исходя из этого, получим, что годовой расход за хранение составляет:

$$c \cdot I_{cp} = \frac{c \cdot I_0}{2}, \quad (3)$$

где c – стоимость хранения одной единицы товара в течение года. Обозначим через b расходы за оформление одной покупки, тогда годовые расходы за оформление покупок составят $n \cdot b$. Суммарные годовые расходы фирмы, связанные с данным товаром, равны:

$$G = \frac{c \cdot I_0}{2} + n \cdot b. \quad (4)$$

Функцию расходов с учётом $I_0 = A/n$ можно переписать в виде:

$$G = \frac{c \cdot I_0}{2} + \frac{A \cdot b}{I_0}, \quad \text{где } 0 < I_0 \leq A. \quad (*) \quad (5)$$

Заметим, что I_0 – дискретная величина, поскольку все её возможные значения имеют вид A/n , где A – константа, n – натуральное число. Наряду с дискретной функцией расходов (*) рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{c \cdot x}{2} + \frac{A \cdot b}{x}, \quad \text{где } 0 < x \leq A, \quad (6)$$

задаваемую той же формулой, что и G , но с областью определения $(0, A]$. Исследуем поведение $g(x)$ на $(0, A]$, используя дифференциальные методы. Найдём интервалы монотонности, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение для $g(x)$. Вычислим производную и её корни.

$$g'(x) = \frac{c}{2} - \frac{A \cdot b}{x^2}, \quad (7)$$

$$\frac{c}{2} - \frac{A \cdot b}{x^2} = 0. \quad (8)$$

Производная имеет на $(0, A]$ единственный корень $x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot b}{c}}$. Установив промежутки монотонности, замечаем, что в точке x_0 функция имеет минимум. Очевидно, что значение $g(x_0)$ является наименьшим значением $g(x)$ на $(0, A]$. Вернёмся к функции расходов $G(I_0)$. График функции $g(x)$ изображает непрерывная кривая, график дискретной функции расходов $G(I_0)$ представляет собой набор точек на этой кривой. Если при некотором $n \in N$ $x_0 = \frac{A}{n}$, то $I_0 = x_0$ – оптимальный объём покупки, минимизирующий годовые расходы фирмы. Если же при любом $n \in N$ $x_0 \neq \frac{A}{n}$, найдём m такое, что

$$\frac{A}{m+1} < x_0 < \frac{A}{m}. \quad (9)$$

Такое m всегда найдётся, так как $x_0 < A$, последовательность $\left\{ \frac{A}{n} \right\}$ убывает и $\frac{A}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $g(x)$ убывает на $(0, x_0]$ и $G(I_0) = g(I_0)$ для любого $I_0 = \frac{A}{n}$, то $G \cdot \left(\frac{A}{k} \right) > G \cdot \left(\frac{A}{m+1} \right)$, когда $k > m+1$. Из возрастания $g(x)$ на $[x_0, A]$ следует, что $G \cdot \left(\frac{A}{m} \right) < G \cdot \left(\frac{A}{k} \right)$, когда $k < m$. Таким образом,

$$\min_{I_0 \in (0, A]} G(I_0) = \min \left\{ G \cdot \left(\frac{A}{m+1} \right), G \cdot \left(\frac{A}{m} \right) \right\} \quad (10)$$

Для функции расходов минимальные расходы фирма имеет, когда

$$I_0 = \frac{A}{3}, n = 3. \quad (11)$$

УДК 519.6, 517.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Швычкина Е.Н.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

В работе [1] рассматривается дифференциальное уравнение Шази с шестью особыми точками вида

$$w'''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w' w'' + A_k (w')^3 + c_k w'}{w - a_k} + E w', \quad (1)$$

коэффициенты которого a_k , $(k = \overline{1, 6})$ являются постоянными величинами и симметричны относительно начала координат, представлено в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений третьего порядка. А именно:

$$\begin{cases} w'' = f_1(z, w)w'^2 + f_2(z, w)v + f_3(w), \\ v' = -2f_1(z, w)w'v, \end{cases} \quad (2)$$

где $f_i (i = \overline{1,3})$ функции по z и w .

Там же рассмотрен метод нахождения функций, являющихся коэффициентами иско- мой системы (2) [1]. В СКА *Mathematica* написан программный модуль

$$\text{constrSystemChazy}[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6], \quad (3)$$

который находит явный вид коэффициентов системы (2) для нелинейного дифферен- циального уравнения третьего порядка (1).

Выберем, например, в качестве значений $a_k, (k = \overline{1,6})$ соответственно величины

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = -\frac{1}{2}, \quad a_5 = -\frac{1}{4}, \quad a_6 = -1.$$

В результате действия модуля (3) получим следующую систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} w'' = & \frac{1 + 12w^2 + (1 + w)(1 + 4w)(5 + 8w)}{2w + 8w^3 + (1 + w)^2(1 + 4w)^2} w'^2 + v(w - 1) \left(w - \frac{1}{2} \right) \left(w - \frac{1}{4} \right) \times \\ & \times \left(w + \frac{1}{4} \right) \left(w + \frac{1}{2} \right) (w + 1) - (10c_1(2w - 1)(1 + 2w + 16w^2 + (7 + 47w + 88w^2 + \\ & + 48w^3)) + (w - 1)(-c_2(16(1 + w + 13w^2) + 3(31 + 207w + 384w^2 + 208w^3)) + \\ & + (2w - 1)(19(-1 - 3w + 14w^2 + 48w^3 + 32w^4) + e(21 + 143w + 274w^2 + 152w^3) + \\ & + e(3 + 9w + 38w^2))) \left(19((1 + 5w + 4w^2)^2 + 2(w + 4w^3)) \right)^{-1}, \\ v' = & -2 \frac{1 + 12w^2 + (1 + w)(1 + 4w)(5 + 8w)}{2w + 8w^3 + (1 + w)^2(1 + 4w)^2} w'v. \end{aligned} \quad (4)$$

где c_1, c_2, e – коэффициенты уравнения (1). Решим систему (4). Интегрируя второе ра- венство системы (4), найдем, что

$$v = \frac{C_1}{1 + 12w + 33w^2 + 48w^3 + 16w^4}.$$

Подставим найденную функцию $v(z)$ в первое уравнение системы (4), которое после замены вида

$$(w'(z))^2 = y(w), \quad w''(z) = \frac{1}{2} y'(w)$$

преобразуется в линейное дифференциальное уравнение первого порядка относитель- но функции $y(w)$. После интегрирования полученного уравнения и возвращения к ис- ходной функции $w(z)$ запишем уравнение вида

$$w'^2 = \frac{6}{19} + C_2 + \left(\frac{52}{19} - \frac{C_1}{32} + 12C_2 \right) w + 33C_2 w^2 + \left(8 - \frac{C_1}{8} + 48C_2 \right) w^3 + 16C_2 w^4, \quad (5)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Общий интеграл последнего уравнения примет вид

$$\begin{aligned}
& - \left(2(r_1 - r_4) F \left[\operatorname{Arc\,sin} \left[\sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(w - r_1)}{(r_1 - r_4)(w - r_2)}} \right], \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)} \right] \frac{r_1 - r_2}{(r_1 - r_4)(w - r_2)} \times \right. \\
& \times \left. \sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(w - r_1)(w - r_3)(w - r_4)}{(r_1 - r_3)(w - r_2)}} \right) \cdot (32(6 + 19C_2) + (1664 - 19C_1 + 7296C_2)w + \\
& + 20064C_2w^2 - 76(C_1 - 64(6C_2 + 1))w^3 + 9728C_2w^4)^{-1/2} = \\
& = (r_4 - r_2)(r_1 - r_2) \left(\pm \frac{z}{4\sqrt{38}} + C_3 \right),
\end{aligned} \quad (6)$$

где $F[\phi | m]$ – неполный эллиптический интеграл первого рода [4], а именно:

$$F[\phi | m] = \int_0^\phi (1 - m \sin^2(\theta))^{-1/2} d\theta, \text{ где } -\pi/2 < \phi < \pi/2,$$

и

$$\begin{aligned}
r_i = & \operatorname{Root}[192 + 608C_2 + (1664 - 19C_1 + 7296C_2)\#1 + 20064C_2\#1^2 + \\
& + (4864 - 76C_1 + 29184C_2)\#1^3 + 9728C_2\#1^4, i] \quad (i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

В системе *Mathematica* [2, 3] выражение *Root* – объект является точным, однако неявным выражением для корней полиномиального уравнения вида

$$192 + 608C_1 + (1664 - 19C_1 + 7296C_2)z + 20064C_2z^2 + (484 - 76C_1 + 29184C_2)z^3 + 9728C_2z^4 = 0$$

Приведем здесь графическую визуализацию решения (6) при начальных условиях $w(1) = 3$, $w'(1) = 3$, $w''(1) = 3$. Найдем значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 , а именно:

$$C_1 = \frac{674560}{10773}, C_2 = \frac{10}{10773}, C_3 \approx -0,0413 - 2,2999 \times 10^{-17}i.$$

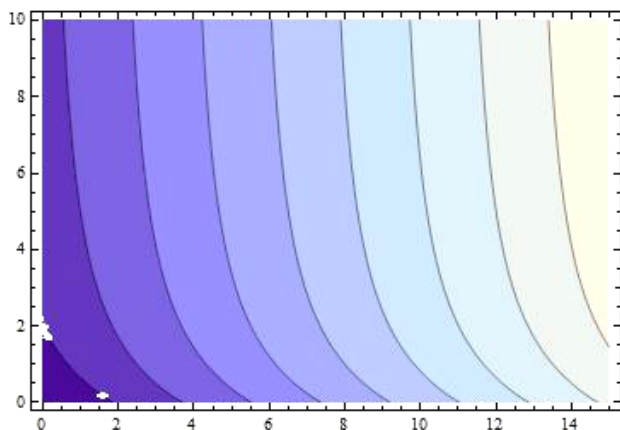


Рисунок 1

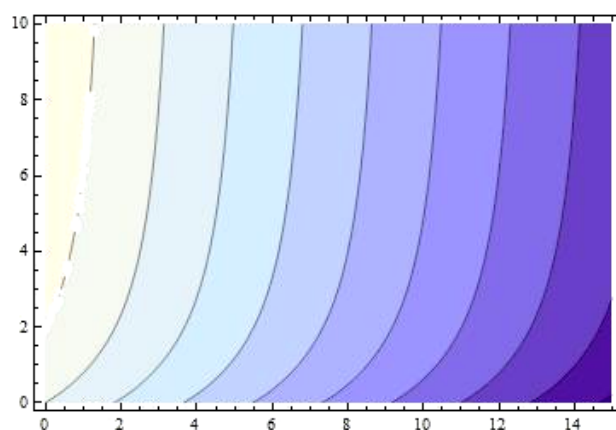


Рисунок 2

На рисунках 1 и 2 изображены графики двух ветвей общего интеграла (6).

Список цитированных источников

1. Швычкина, Е.Н. О построении системы, эквивалентной дифференциальному уравнению Шази с шестью особыми точками / Е.Н. Швычкина // Вестник Брестского университета. Серия естеств. наук. – 2010. – №2. – С. 142–148.
2. Wolfram Web Resources / ed. S. Wolfram [Electronic resource]. – Champaign, 2013. – Mode of access: www.wolfram.com – Date of access: 1.06.2013.
3. Trott, M. The *Mathematica* GuideBook for symbolics. – New York: SpringerVerlag, 2006. – 1453 p.
4. Янке, Э. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 344 с.

УДК 517.98

ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОБОБЩЕННЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Шнак Д.С.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно
 Научный руководитель: Вувуникян Ю.М., д.ф.-м.н., профессор

Пусть $a \in R$. Через $\mathcal{E}^a(R^n)$ обозначается совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций φ на пространстве R^n , удовлетворяющих условию: $\forall \alpha \in Z_+^n \exists C > 0: |\varphi^{(\alpha)}(t)| \leq C e^{-a|t|}$, $\forall t \in R_+^n$, где $|t| = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ [1, с.180].

Отметим, что $\mathcal{E}^a(R^n)$ – векторное подпространство векторного пространства $C^\infty(R^n)$ – пространства всех бесконечно дифференцируемых функций на пространстве R^n .

Рассмотрим тензорное произведение $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ функций $\varphi_1 \in \mathcal{E}^a(R^{n_1})$ и $\varphi_2 \in \mathcal{E}^a(R^{n_2})$

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(t, s) = \varphi_1(t)\varphi_2(s), \quad (1)$$

где $t = (t_1, t_2, \dots, t_{n_1}) \in R^{n_1}$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n_2}) \in R^{n_2}$.

Как показано в [1, с.183], тензорное произведение $(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \in \mathcal{E}^a(R^{n_1+n_2})$.

Объединив пространства $\mathcal{E}^a(R^n)$ с условием $a < c$ ($a, c \in R$), получаем векторное пространство $\mathcal{E}_c(R^n) = \bigcup_{a < c} \mathcal{E}^a(R^n)$.

Пусть $c \in R$. Тогда обобщенной функцией экспоненциального роста на R^n степени c называется любой нелинейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{E}_c(R^n)$ [1, с.189].

Совокупность всех обобщенных функций экспоненциального роста степени c образует сопряженное пространство $\mathcal{E}'_c(R^n)$ к пространству $\mathcal{E}_c(R^n)$.

В пространстве $\mathcal{E}'_c(R^n)$ как в сопряженном пространстве определены операции сложения и умножения на число, т.е.

1) если $f_1, f_2 \in \mathcal{E}'_c$, то сумма $f_1 + f_2$ определяется с помощью равенства $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$, $(t \in \mathcal{E}_c)$;

2) если α – число и $f \in \mathcal{E}'_c$, то произведение αf определяется с помощью равенства $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $(t \in \mathcal{E}_c)$.

Определим понятия носителя, тензорного произведения и свёртки для обобщенных функций экспоненциального роста степени c .

Определение. Носителем обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_c(R^n)$ экспоненциального роста степени c называется наименьшее замкнутое подмножество, на котором функция f обращается в нуль.

Определение. Тензорное произведение обобщенных функций $f_1 \in \mathcal{E}'_{c_1}(R^{n_1})$ и $f_2 \in \mathcal{E}'_{c_2}(R^{n_2})$ экспоненциального роста степеней c_1 и c_2 называется функция $(f_1 \otimes f_2) \in \mathcal{E}'_{c_1+c_2}(R^{n_1+n_2})$, определяемая равенством

$$(f_1 \otimes f_2)(\varphi) = \langle f_1(t), \langle f_2(s), \varphi(t, s) \rangle \rangle = \langle f_2(t), \langle f_1(s), \varphi(t, s) \rangle \rangle, \quad (2)$$

где $\varphi \in \mathcal{E}_c(R^{n_1+n_2})$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_{n_1}) \in R^{n_1}$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n_2}) \in R^{n_2}$.

Определение. Пусть функция $f_1 \in \mathcal{E}_c(R^n)$ является финитной обобщенной функцией, т.е. f_1 имеет компактный носитель, а функция $f_2 \in \mathcal{E}_c(R^n)$ имеет произвольный носитель. Тогда функция $f_1 * f_2$ называется свёрткой обобщенных функций и определяется следующим равенством

$$(f_1 * f_2)(\varphi) = \langle f_1(t)f_2(s), \varphi(t+s) \rangle, \quad (3)$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ [2].

Отметим, что носитель обобщенной функции называется компактным, если он представляет собой ограниченное множество.

Обозначим через $\mathcal{E}'_{c+}(R^n) = \{f \in \mathcal{E}'_c(R^n)\}$.

Заметим, что пространство $\mathcal{E}'_{c+}(R^n)$ является свёрточной алгеброй.

Преобразованием Лапласа обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'_{c+}(R^n)$ называется функция \tilde{f} , определяемая на множестве $\Pi_c^n = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in C^n \mid \operatorname{Re} \lambda_j > c, (j=1, 2, \dots, n)\}$ равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f(t), e^{-\lambda t} \rangle \quad (\lambda \in \Pi_c^n), \quad (4)$$

где $\lambda t = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_n t_n$. [1]

Приведем примеры преобразований Лапласа от некоторых функций.

Пример 1. Пусть $f = \theta$ – функция Хевисайда. Тогда имеем:

$$\tilde{\theta}(\lambda) = \langle \theta(t), e^{-\lambda t} \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 2. Пусть $f = \delta$ – дельта-функция. Тогда имеем:

$$\tilde{\delta}(\lambda) = \langle \delta(t), e^{-\lambda t} \rangle = e^{-\lambda t} \Big|_{t=0} = 1.$$

Пусть A – полиномиальный эволюционный оператор степени n вида

$$Ax = \sum_{m=1}^n S_m (a_m * x^{\otimes m}) \quad (x \in X), \quad (5)$$

где a_m – импульсная характеристика порядка m , ($a_m \in \mathcal{E}'_{c+}(R^n)$).

Применяя обобщенное преобразование Лапласа к импульсной характеристике a_m порядка m , получаем спектральную характеристику \tilde{a}_m порядка m эволюционного оператора A .

Рассмотрим композицию полиномиальных эволюционных операторов A и B , где соответственно $Bx = \sum_{p=1}^l S_p (b_p * x^{\otimes p}) \quad (x \in X)$.

Сформулируем основную теорему о спектральных характеристиках композиции полиномиальных эволюционных операторов.

Теорема. Пусть A – полиномиальный эволюционный оператор степени n , заданный спектральными характеристиками \tilde{a}_m , B – полиномиальный эволюционный оператор степени l , заданный спектральными характеристиками \tilde{b}_p . Тогда спектральная характеристика \tilde{f}_m оператора композиции $F = B \circ A$ будет определяться по формуле:

$$\tilde{f}_n(\lambda) = \sum_{p=1}^{nl} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_p=m} \tilde{b}_p \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1} + \lambda_{m_1+2} + \dots + \lambda_{m_1+m_2}, \dots, \right. \\ \left. \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+1} + \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+2} + \dots + \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_p} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \tilde{a}_{m_1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1}) \tilde{a}_{m_2}(\lambda_{m_1+1}, \lambda_{m_1+2}, \dots, \lambda_{m_1+m_2}) \times \dots \times \\ & \times \tilde{a}_{m_p}(\lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+1}, \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_{p-1}+2}, \dots, \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_p}), \\ & \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1+m_2+\dots+m_p}) \in \Pi_c^m \end{aligned}$$

Список цитированных источников

1. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.
Шубин, М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2003. – 303 с.

УДК 517.925+

**О ПОСТРОЕНИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИНИ И РИККАТИ**

Ярошук Ю.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Чичурин А.В., д.ф.-м.н., доцент

Рассмотрим уравнение Чини (Chini) [1], которое является обобщением канонических форм дифференциальных уравнений Абеля и Риккати. Это уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ay^s - bx^k, \tag{1}$$

где a, b, s, k – постоянные. Различные значения параметров, при которых уравнение (1) интегрируется в квадратурах, приведены в [1]. Там же показано, что с помощью замены:

$$x = (w'_x)^{\frac{1}{k}}; y = \lambda \left(\frac{w}{z}\right)^{\frac{1}{s}}; \lambda = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{s}}$$

уравнение (1) сводится к обобщенному уравнению Эмдена-Фаулера, которое может быть исследовано, например, с помощью метода дискретно-группового анализа [2]. Аналитическое решение уравнения Чини может быть найдено для некоторых наборов значений параметров с помощью системы Mathematica 9.0. Например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 5y^4 - bx^{\frac{4}{3}},$$

вводя команду `DSolve[y'[x] == 5y^4 - bx^{\frac{4}{3}}, y[x], x]`, находим общее решение в неявной форме

$$\begin{aligned} & \text{Solve}[-15 \text{RootSum}[-15 + \frac{53}{4}(\frac{1}{b})^3 \frac{1}{4} \#1 - 15 \#14 \&, \text{Log}[-\#1 + \frac{51}{4} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{b} \frac{1}{4} y(x)/ \\ & /(\frac{53}{4} \frac{1}{b})^3 \frac{1}{4} - 60 \#13) \&] == C[1] + (\frac{51}{4} x \text{Log}[x]) / (\frac{x^{\frac{3}{4}}}{b}) \frac{3}{4}, y[x]], \end{aligned}$$

где `RootSum[f,form]` представляет собой сумму вида `form[x]` для всех x , удовлетворяющих полиномиальному уравнению $f[x] = 0$. На рис. 1 приведём графики частных решений, соответствующие значениям $C[1] = -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4$.

Рассмотрим уравнение Риккати, которое всегда может быть преобразовано в линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Если это линейное уравнение может быть решено с помощью элементарных или специальных функций, то решение уравнения Риккати может быть так же найдено.

Приведём пример интегрирования уравнения Риккати с помощью специальной функции

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \sin^3(\lambda x) + \lambda \sin(\lambda x) y^2(x), \quad (2)$$

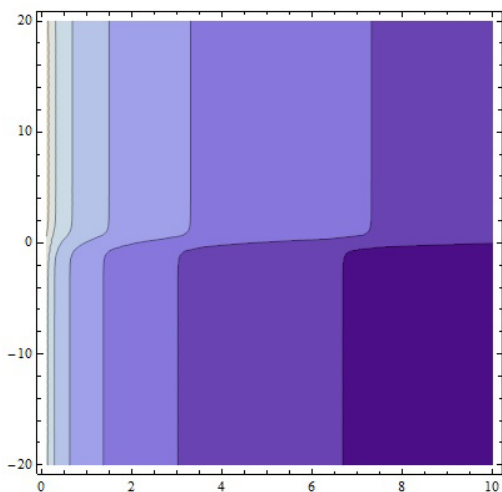


Рисунок 1

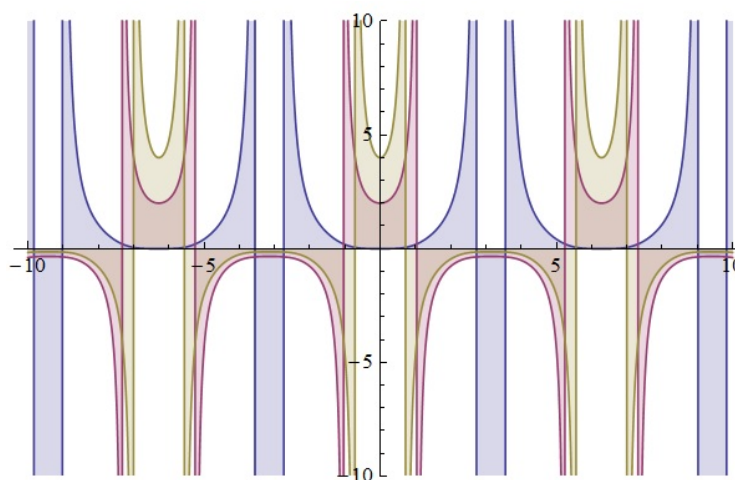


Рисунок 2

где λ – параметр. Очевидно, что частным решением уравнения (2) является функция $y(x) = -\cos(\lambda x)$.

Тогда замена

$$y(x) = z(x) - \cos(\lambda x) \quad (3)$$

приводит уравнение (2) к уравнению Бернулли

$$\lambda \sin(2x\lambda) z(x) + z'(x) = \lambda \sin(\lambda x) z^2(x),$$

общее решение которого может быть записано в виде

$$z = \frac{2de^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[2x\lambda]}}{(2e - d\sqrt{\pi} \operatorname{Erfi}[1] + d\sqrt{\pi} \cos[x\lambda] \operatorname{Erfi}\left[\frac{1}{\sqrt{\sec^2[x\lambda]}}\right] \sqrt{\sec^2[x\lambda]})}, \quad (4)$$

где Erfi – специальная функция, определяемая как мнимая часть функции ошибок, а параметр d определяется из начального условия $z(0) = d$. Подставляя (4) в (3), находим общее решение уравнения (2). Приведём графики нескольких частных решений при $d = 1, 3, 5$ (рис. 2). Для анимации решений уравнения (2) в зависимости от значений параметра λ и начального значения d воспользуемся командой

```
Manipulate[Plot[Evaluate[(z[x] - Cos[xλ])/sol/.{λ -> parametr, d -> z0}], {x, -10, 10},
PlotRange -> {-10, 10}, Filling -> Axis], {parametr, 1, 5}, {z0, 0, 1, 5}]
```

Список цитированных источников

3. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

4. Зайцев, В.Ф. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Зайцев, А.В. Флегонтов. – Л.: ЛИИАН, 1991.

5. Wolfram [Электронный ресурс]. – 2013. – Режим доступа: <http://www.wolfram.com/learningcenter/tutorialcollection/DifferentialEquationSolvingWithDSolve/>

СОДЕРЖАНИЕ

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ РОБОТОТЕХНИКИ

Воробьев С.Ю., Хорольский Д.Б., Мишнев Г.В., Русак В.А. Применение интеллектуальных технологий видеонаблюдения для повышения безопасности жителей городов.....	3
Каршакевич Е.А. Особенности проектирования информационных систем медицинского назначения	5
Кожух В.С. Полуавтоматическое движение дистанционно управляемого мобильного робота	7
Кочурко В.А. Подход к вопросу компьютерного зрения в реальном времени	9
Савицкий А.Ю. Методика динамической инициализации шага обучения в алгоритме Back Propagation Error	11
Степин Ю.Г., Гайдаш О.В., Заман И.Э. Использование метода колонии муравьев для решения задач нахождения путей с заданными свойствами	14
Шах А.В. Использование контурного анализа для распознавания изображений	16
Шепелевич М.А. Определение параметров функций принадлежности для идентификации объектов на изображениях интегральных микросхем	17

ИННОВАЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ UNIX-ПОДОБНЫХ СИСТЕМ И МОБИЛЬНЫХ ПЛАТФОРМ. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Дивинец А.А. Анализ связности оболочек в случайном размещении сферических частиц	20
Лапич С.В. Численное моделирование нестационарного теплового режима синтетических алмазных терморезисторов.....	21
Максимук С.В. Расширение функциональных возможностей системы моделирования	23
Никонюк А.Н. Костюк Д.А. Средства сжатия окон для экономии площади дисплея устройств, работающих под управлением графической оболочки GNOME	25
Прокопенко Д.В. Особенности деформирования грунтового основания сваи сложной конфигурации.....	28
Родченко Т.В. Разработка автоматической торговой системы «FOREX-MACD++»	30
Рыщук А.С. К оценке характеристик эффективности имитационных моделей.....	32
Стрибук А.М., Лапич С.В. Об одном способе защиты РЛС от пассивных помех	34
Суша О.Н. Моделирование поведения режущего инструмента в пакете ANSYS.....	36
Торгонская С.В. Сравнительный анализ эффективности вертикального и пакетного в ертикального армирования малопрочных грунтовых оснований плитных фундаментов	39

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТКАХ

Басин В.И. Интернет проекты для программистов и дизайнеров	41
Бердыев Р.А. Применение Excel для автоматизации расчета подоходного налога для законодательства Туркменистана	43
Бойко И.Н. Разработка логической модели данных подсистемы поддержки пользователей ИТ-сервисов	46
Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В., Мороз Е.А. FORTRAN – программа численного решения двумерных краевых задач теории упругости и термоупругости методом граничных интегральных уравнений.....	48
Евменькова А.П., Евменьков М.А. Гибкая методология разработки программного обеспечения в образовании	51

Евменьева А.П., Евменьев М.А. Альтернативный способ определения местоположения объекта с помощью технологии Wi-Fi	53
Кандора Д.С., Лашкевич Е.М., Позняк Е.В. Информационно-справочный гематологический ресурс на облачной платформе	54
Козеко Е.Л. Генерация плоских кубических графов	57
Латий О.О. Базовые операции МКЭ для расчета механических вставок кровеносных сосудов.....	59
Леончук К.И., Тузик И.В. Программное средство для разделительной декомпозиции частично заданных булевых функций.....	61
Мелешук Д.В. Создание интерфейса для автоматизации документооборота транспортной компании	63
Мельничук О.А. Методологические аспекты учета спецодежды	65
Мороз В.К., Мороз А.В. Применение информационных технологий для определения расхода топлива в энергосистеме	68
Петручик Е.Е., Рамская Л.К. Автоматизированная счёт-фактура для отпуска канцелярских товаров	69
Сапаров Д.С. Программные средства автоматизации бухгалтерского учета в республике Туркменистан.	72
Семионов А.А. Модификация алгоритма сжатия информации RLE	75
Стельмашук Н.П., Гучко И.М. Автоматизация учета поступления готовой продукции на склад на примере швейного производства	76
Степаненко И.С. Реализация механизма планирования для офсетной типографии.....	79
Степанюк Н.Н. Восстановление псевдоаттрактора в фазовом пространстве по временному ряду... ..	82
Сурмач А.И. Состоятельные оценки спектральных плотностей и их приложения	83
Фёдоров А.В. Алгоритм Флойда при выборе оптимальной трассы автомобильной дороги.....	86
Ширай Д.С. Анализ периодической и шумоподобной составляющих вибрационных сигналов	88
Шитько А.М. Разработка мультимедийного сервера для видеотрансляции.....	90

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Антоник И.А., Гладкий И.И., Липовцев А.П., Каримова Т.И. О числовых характеристиках некоторых дискретных законов распределения.....	92
Астафьева А.В. Об одном приложении метода перевала	94
Бруцкий В.Р., Мокин А.А. Численный анализ прямого опорного метода для минимизации выпуклых функций.....	96
Бусько Н.В. Применение состоятельных оценок спектральных плотностей для анализа эргодических стационарных случайных процессов	99
Викторович Л.В. Случай приближенно заданного оператора в неявном методе решения операторных уравнений.....	101
Гиль Д.В. Сходимость метода итераций неявного типа решения некорректных задач с приближённо заданным оператором.....	103
Гловацкая А.А. Исследование взаимодействия двух конкурирующих популяций	104
Гринько Е.П., Головач А.Г. О методах решения некоторых диофантовых уравнений (при подготовке школьников к олимпиадам)	106
Даудов Д.Д. О сложности тьюринговых вычислений в одном классе.....	108
Деращиц Н.А., Матысик О.В. Сходимость в энергетической норме гильбертова пространства неявного метода итераций решения операторных уравнений I рода	109
Дунец А.Ю. Математическое моделирование в прогнозировании валового регионального продукта с помощью НМ-сетей.....	110

Желткович А.Е., Лазарук А.В., Лавринюк Е.Ю., Бышко А.Г. О решении задачи определения скорости и траектории материальной точки при свободном её падении в гравитационном поле Земли.....	113
Жук А.И. О приближении неавтономных систем дифференциальных уравнений в алгебре новых обобщенных функций	117
Завадский А.Ф. Условия алгеброидности особых точек решений систем с доминирующими членами.	120
Зубей Е.В. Пространство Минковского. Постановка задачи и метод исследования	122
Капура Д.П. Рекуррентные методы при исследовании стохастических моделей систем документооборота	123
Кароли М.К. Встречный поиск кратчайших маршрутов на сетях с предопределенными решениями.....	125
Карпук И.А. Приложения конформного отображения	128
Каштелян А.Н., Юхимук Т.Ю. Извлечение квадратного корня из квадратной матрицы второго порядка.....	131
Кравченко С.И. Расчет эквидистантного профиля полюсных наконечников для магнитно-абразивной обработки лопаток газотурбинного двигателя.....	133
Мацулевич Е.И. Исследование устойчивости положения равновесия системы электрических зарядов методами дифференциального исчисления.....	136
Митьковец А.А., Савчик П.А. Генерация sudoku и оценка количества решаемых sudoku	138
Мокроусова Е.А. Автомодельное решение краевой задачи о фазовых переходах.....	140
Мурашко В.И. О формации конечных групп с P -субнормальными циклическими примарными подгруппами.	142
Навічкова Д.А. Абагульненае гіпергеаметрычнае раўнанне ў алгебры матрычных паслядоўнасцей	144
Наумовец С.Н., Матысик О.В. Сходимость явного итерационного метода при приближённой правой части	146
Радоман Н.В. Математическая модель потокораспределения с учетом трансформаций и неоднородности сети	147
Рахматуллина Л.Р. Численное решение задачи Стефана с двумя подвижными границами методом ловли фронта в узел сетки.....	150
Савчук О.В. Исследование состоятельности оценки взаимной спектральной плотности многомерного временного ряда	151
Серая С.А. A_4 -свободные группы с небольшими индексами максимальных подгрупп.....	153
Стефанович О.И. О применении НМ-сети при решении некоторых задач банковской сферы	155
Сухоцкий Р.П. Приложения производящей функции	157
Филипповский В.А. Алгоритм перевода натурального вывода из древовидной формы представления в фитчевскую форму.....	160
Худяков А.П. Алгебраические интерполяционные многочлены первого и второго порядков для операторов, заданных на множестве функциональных матриц	162
Царук А.И. О производной по Адамару	164
Шахно М.И. Решение экономических задач методами дифференциального исчисления.....	168
Швычкина Е.Н. Решение дифференциальной системы эквивалентной нелинейному уравнению с шестью особыми точками	170
Шпак Д.С. Теорема о композиции полиномиальных эволюционных операторов с обобщенными спектральными характеристиками	173
Ярошук Ю.Н. О построении и визуализации решений дифференциальных уравнений Чини и Риккати.....	175

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Сборник материалов VIII Республиканской научной конференции
молодых ученых и студентов
21–23 ноября 2013 года

Ответственный за выпуск: **Махнист Л.П.**

Редактор: **Боровикова Е.Л.**

Компьютерная вёрстка: **Кармаш Е.Л.**

Корректор: **Никитчик Е.В.**

ISBN 978-985-493-266-8



Лицензия № 02330/0549435 от 08.04.2009 г.

Подписано к печати 15.11.2013 г.

Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага «Снегурочка».

Гарнитура «Arial Narrow». Усл. п. л. 10,46. Уч.-изд. л. 11,25.

Тираж 70 экз. Заказ № 1201.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет»
224017, Брест, ул. Московская, 267.