Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

Конспект лекций по высшей математике

для студентов экономических специальностей
первого курса заочной формы обучения

Брест 2006

УДК 517.9

Настоящий конспект лекций предназначен для студентов первого курса экономического факультета заочной формы обучения. Конспект содержит необходимый материал по разделам курса высшей математики, которые изучаются студентами-заочниками на первом курсе. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, ведется на доступном, по возможности строгом языке.

Составители: А.В. Дворниченко, ст. преподаватель
С.Ф. Макарук, к.ф.-м.н.

Рецензент: Рогозин С. В., доцент кафедры теории функций
Белорусского государственного университета, к.ф.-м.н.

Общие методические указания

Настоящее пособие предназначено для студентов первого курса экономических специальностей заочной формы обучения. Оно представляет собой конспект лекций.

Данный конспект содержит необходимый материал по девяти темам курса высшей математики. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач. Пособие может служить базой для подготовки к семестровым экзаменам и зачетам по высшей математики на первом курсе.

Основной формой изучения курса высшей математики для студентов-заочников является самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, сборниками задач и упражнений, справочниками. Список основных и наиболее доступных из них приводится в конце пособия.

Изучение любого раздела курса следует начать с конспекта установочных лекций, соответствующих глав учебника, учебного пособия или руководства к решению задач, в которых имеется необходимая теория, приводятся расчетные формулы и решения задач по темам.

Надеемся, что данное пособие будет способствовать лучшему усвоению курса высшей математики.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассматриваемые вопросы:

1. Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей.
2. Матрицы и операции над матрицами. Обратная матрица.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений: формулы Крамера, матричный способ, метод Гаусса.

Вопросы для самостоятельного изучения:

1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
2. Линейная модель обмена (модель международной торговли).

Форма контроля – контрольная работа №1.

1. Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей.

Рассмотрим квадратную таблицу, то есть таблицу, у которой число строк равно числу столбцов, состоящую из четырех чисел или матрицу размерности 2×2:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $a_{ij}, \left(i=1,2;\ j=1,2\right)$ - элементы матрицы; i - номер строки, j - номер столбца, в котором стоит элемент. Элементы a_{11}, a_{22} образуют главную диагональ матрицы; элементы a_{12}, a_{21} образуют побочную диагональ матрицы.

Определение. *Определителем второго порядка* квадратной матрицы (1) называется число, которое вычисляется по правилу:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}, \qquad (2)$$

то есть определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагонали.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение. $\Delta A=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-4\cdot(-2)=3+8=11$.

Рассмотрим квадратную таблицу, состоящую из девяти чисел или матрицу размерности 3×3:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

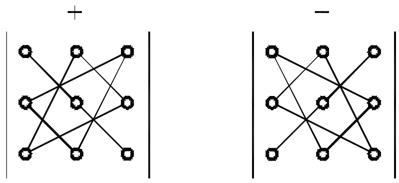
Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ матрицы; элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} образуют побочную диагональ матрицы.

Определение. *Определителем третьего порядка* квадратной матрицы (3) называется число, которое вычисляется по правилу:

$$\Delta B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-$$

$$-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}. \qquad (4)$$

Правило вычисления определителя третьего порядка называется *правилом треугольника*: изобразим схематически на рисунке произведения элементов определителя, которые берутся со знаком плюс и со знаком минус:



Пример. Вычислить определитель матрицы $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Решение.

$$\Delta B=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\cdot4\cdot1+0\cdot0\cdot1+2\cdot2\cdot1-1\cdot4\cdot1-0\cdot2\cdot1-0\cdot2\cdot3=12+4-4=12.$$

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, в котором стоит элемент.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число:

$$A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot M_{ij}, \qquad (5)$$

где M_{ij} - минор элемента a_{ij}.

Пример. Вычислить минор M_{21} и алгебраические дополнения A_{32}, A_{33} определителя $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

Решение. Минор M_{21} получаем из данного вычеркиванием второй строки и первого столбца, получаем:

$$M_{21}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2-0=2.$$

По определению $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot M_{32}=-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(6-0)=-6$;

$$A_{33}=\left(-1\right)^{3+3}\cdot M_{33}=1\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=12-0=12.$$

Теорема. *Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.*

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 5\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}$ разложением по элементам строки или столбца.

Решение. Разложим определитель по элементам первого столбца. Получим:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot A_{11} + (-1)\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11} - 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} + 0 =$$

$$= 2\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-9-10) + (-12-0) = -38-12 = -50.$$

Замечание. Для разложения определителя по элементам строки или столбца удобнее выбирать строку (столбец) с наибольшим количеством нулей.

Свойства определителей:

1. Величина определителя не изменится при замене его строк соответствующими столбцами (операция транспонирования). То есть свойства строк и столбцов в определителе равноправны. В дальнейшем будем говорить «ряд».
2. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.
3. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то определитель изменит знак на противоположный.
4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.
5. Общий множитель всех элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.
6. Определитель, содержащий два пропорциональных параллельных ряда, равен нулю.
7. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженного на одно и тоже произвольное число.

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, используя свойства определителя.

Решение. Используя свойство 7, умножим элементы первой строки определителя на (-4) и сложим с соответствующими элементами второй строки; далее умножим элементы первой строки определителя на (-7) и сложим с соответствующими элементами третьей строки, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}.$$

Общий множитель второй строки равен (-3), общий множитель третьей строки равен (-6) , по свойству 5 получим:

$$\Delta = -3\cdot(-6)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель имеет две одинаковые строки, значит $\Delta = 0$.

2. Матрицы и операции над матрицами. Обратная матрица.

Определение. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размерности m на n* $(m\times n)$. Обозначается большими латинскими буквами $A,B,C\ldots$; $A=\left\|a_{ij}\right\|, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов, то есть $m=n$, то матрица называется *квадратной*. Матрица, состоящая из нулей, называется *нулевой*. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, равны нулю, называется *диагональной*. Например: $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все элементы диагонали равны единице, называется *единичной* и обозначается E. Например: $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - единичная матрица размерности 3×3.

Определение. Матрица A^T называется *транспонированной* к матрице A, если строки матрицы A^T являются столбцами матрицы A.

Например: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, A^T=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Определение. *Треугольной* матрицей называется матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону главной диагонали равны нулю.

Например: $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 10 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Определение. Матрицы A,B называются *равными*, если равны их размерности и соответствующие элементы этих матриц.

Действия над матрицами.

1. **Сложение матриц.** Операция сложения матриц определяется для матриц одинаковой размерности. *Суммой матриц* A и B называется матрица $C=A+B$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Пример. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+1 & 3-1 & 5+0 \\ 2+1 & 4+0 & 6+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

2. **Умножение матрицы на число.** Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Пример. $2\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot5\\ 2\cdot2 & 2\cdot(-4) & 2\cdot6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6 & 10\\ 4 & -8 & 12\end{bmatrix}$.

3. **Произведение матриц.** Матрицы A и B называются *согласованными*, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Операция произведения матриц определяется только для согласованных матриц. Каждый элемент c_{ij} матрицы $C=A\cdot B$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -9\end{bmatrix}$. $A_{2\times2}\cdot B_{2\times3}=C_{2\times3}$.

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot(-9)\\ -3\cdot(-1)+4\cdot1 & -3\cdot0+4\cdot2 & -3\cdot3+4\cdot(-9)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1+2 & 4 & 3-18\\ 3+4 & 8 & -9-36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -15\\ 7 & 8 & -45\end{bmatrix}.$$

Произведение $B\cdot A$ не существует, так как матрицы не являются согласованными: число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Замечание. Из примера следует, что не всегда $A\cdot B=B\cdot A$. Если $A\cdot B=B\cdot A$, то матрицы A и B называются *коммутативными (перестановочными).*

Обратная матрица.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 3×3:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

Определение. Матрица A называется *невырожденной*, если определитель матрицы отличен от нуля, то есть $\Delta A\neq0$.

Определение. *Обратной матрицей* к матрице A называется невырожденная матрица A^{-1}, удовлетворяющая следующим равенствам: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Теорема. Для любой квадратной невырожденной матрицы существует обратная матрица.

Теорема. Для любой квадратной невырожденной матрицы A обратная ей матрица A^{-1}имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения к элементам $a_{ij}, i=\overline{1;3}, j=\overline{1;3}$.

Пример. Найти обратную матрицу к матрице $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A.

$$\Delta A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-3+0+2+2-0=1\neq 0,$$ следовательно, матрица A невырожденная. Значит, для нее существует обратная матрица.

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A. По определению $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

$$A_{11}=\left(-1\right)^{2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+1=1 \qquad A_{21}=\left(-1\right)^{3}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-\left(-1\right)=1 \qquad A_{31}=\left(-1\right)^{4}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{12}=\left(-1\right)^{3}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-\left(-2\right)=2 \qquad A_{22}=\left(-1\right)^{4}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2 \qquad A_{32}=\left(-1\right)^{5}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-\left(2-3\right)=1$$

$$A_{13}=\left(-1\right)^{4}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3-2=1 \qquad A_{23}=\left(-1\right)^{5}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-\left(-2\right)=2 \qquad A_{33}=\left(-1\right)^{6}\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2$$

Записываем обратную матрицу $A^{-1}=\dfrac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$.

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений: формулы Крамера, матричный способ, метод Гаусса.

Рассмотрим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3,\end{cases} \qquad (6)$$

где x,y,z - неизвестные (переменные); $b_i,\left(i=\overline{1,3}\right)$ - свободные члены; $a_{ij},\left(i=\overline{1;3},\ j=\overline{1;3}\right)$ - коэффициенты системы.

Определение. *Решением системы* (6) называется упорядоченная тройка чисел $\left(x,y,z\right)$, которая при подстановке превращает каждое уравнение системы в тождество. Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Введем обозначения:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$ - главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных; $\Delta_i, i=\overline{1,3}$ - определители, полученные из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

С помощью свойств определителя система (6) может быть приведена к эквивалентному виду

$$\begin{cases}\Delta\cdot x=\Delta_1,\\ \Delta\cdot y=\Delta_2,\\ \Delta\cdot z=\Delta_3.\end{cases}$$

Тогда верна следующая

Теорема. Если главный определитель системы отличен от нуля, то есть $\Delta \neq 0$, то система (6) имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ *- формулы Крамера.*

Замечание. 1. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из $\Delta_i \neq 0, i = \overline{1,3}$, то система (6) несовместна, то есть решений не имеет.

2. Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i = 0, i = \overline{1,3}$, то система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

Пример. Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9, \\ x + 3z = -2, \\ 3x - y + 5z = -4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 27 - 0 + 6 - 15 = 19.$$

Вычислим определитель Δ_1, полученный из Δ, заменой первого столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 36 - 0 + 27 + 30 = 19.$$

Вычислим определитель Δ_2, полученный из Δ, заменой второго столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 4 + 81 - 6 - 45 + 24 = 38.$$

Вычислим определитель Δ_3, полученный из Δ, заменой третьего столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 9 - 18 - 0 - 4 + 12 = -19.$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-19}{19} = -1.$$

Тройка чисел $(1, 2, -1)$ является решением исходной системы.

Матричный способ решения систем линейных алгебраических уравнений.

Введем обозначения:

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ - основная матрица системы, составленная из коэффициентов при переменных;

$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ - столбец свободных членов;

$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ - столбец неизвестных (переменных).

Систему (6) можно записать в матричном виде следующим образом: $AX=B$. Умножим полученное матричное уравнение на матрицу A^{-1} слева, получим:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow E\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B.$$

То есть для того чтобы решить систему линейных алгебраических уравнений, надо найти матрицу обратную к матрице A и умножить ее на столбец свободных членов B.

Значит, $X=A^{-1}\cdot B$ - формула нахождения решения системы (6) матричным способом.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2x-z=1, \\ -3x+y+z=2, \\ 2x-y=3 \end{cases}$ матричным способом.

Решение. В нашем случае

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице A была найдена выше: $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Тогда $X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2+3 \\ 2+4+3 \\ 1+4+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow x=6, y=9, z=11.$

Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Матрицу будем называть *ступенчатой*, если первый слева ненулевой элемент каждой строки, начиная со второй, находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Например, $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Количество ненулевых строк ступенчатой матрицы называется *рангом* матрицы и обозначается $r(A)$.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1. перестановка двух строк местами;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. удаление нулевой строки;
4. прибавление к строке другой строки, умноженной на произвольное ненулевое число.

Утверждение. Любую матрицу при помощи элементарных преобразований или методом прямоугольников можно привести к ступенчатому виду.

Рассмотрим систему из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$A/B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ - расширенная матрица системы.;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ - основная матрица системы.

Метод Гаусса позволяет решить вопрос о совместности произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема (Кронекера-Капелли). Система (7) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть $r(A) = r(A/B) = r$. Причем, если $r = n$, то есть числу неизвестных, то система имеет единственное решение; если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящее от $(n-r)$ параметров. Если $r(A) \neq r(A/B)$, то система решений не имеет.

Метод Гаусса состоит в следующем:

1. Расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду.
2. Решается вопрос о совместности системы и количестве решений.
3. Если система имеет единственное решение, то по ступенчатой матрице составляют систему равносильную исходной, находят неизвестные, начиная с последней.

4. Если система имеет бесконечное множество решений, то выбирают базисные переменные и свободные, и выражают базисные переменные через свободные и записывают общее решение системы.

Замечание. Число базисных переменных должно быть равно рангу расширенной матрицы. За базисные переменные принимают те, которые входят только в одно из уравнений ступенчатой матрицы и не входят в остальные. Оставшиеся переменные объявляются свободными (параметрами).

Примеры. Решить системы методом Гаусса:

1. $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 5x+6y+7z=4, \\ 9x-y=-18. \end{cases}$ $A/B = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 9 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right]$. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду методом прямоугольников.

Первый шаг. Первая строка матрицы A/B объявляется разрешающей, элемент $a_{11}=1$ первой строки объявляется разрешающим элементом. Первая строку матрицы A/B переписываем, ниже первой строки в первом столбце ставим нули. Остальные элементы пересчитываем по правилу прямоугольников.

Пересчитываем элемент $a_{22}=6$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6-10=-4$, полученный результат записываем в матрицу.

Пересчитываем элемент $a_{23}=7$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7-15=-8$, полученный результат записываем в матрицу.

Пересчитываем элемент $b_2=4$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4-20=-16$, полученный результат записываем в матрицу.

Пересчитываем элемент $a_{32}=-1$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -1-18=-19$, полученный результат записываем в матрицу.

Пересчитываем элемент $a_{33}=0$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = 0-27=-27$, полученный результат записываем в матрицу.

Пересчитываем элемент $b_3 = 4$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & -18 \end{vmatrix} = -18 - 36 = -54$, полученный результат записываем в матрицу.

Имеем:

$A/B \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -19 & -27 & -54 \end{array}\right]$. В полученной матрице умножим вторую строку на $\left(-\frac{1}{4}\right)$, а третью на (-1). Получим:

$$A/B \sim \vee \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 \\ 0 & 19 & 27 & 54 \end{array}\right].$$

Второй шаг. Вторая строка полученной матрицы A/B объявляется разрешающей, элемент $a_{22} = 1$ второй строки объявляется разрешающим элементом. Первая и вторая строки матрицы A/B переписываем, ниже второй строки во втором столбце ставим нули. Остальные элементы пересчитываем по правилу прямоугольников.

Пересчитываем элемент $a_{33} = 27$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 19 & 27 \end{vmatrix} = 27 - 38 = -11$, полученный результат записываем в матрицу.

Пересчитываем элемент $b_3 = 4$: от элемента поднимаемся на разрешающую строку, идем к разрешающему элементу, опускаемся на строку, в которой стоит элемент. Получили четыре числа. Из полученных чисел составляем определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 19 & 54 \end{vmatrix} = 54 - 76 = -22$, полученный результат записываем в матрицу.

Имеем:

$A/B \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right]$. Расширенную матрицу привели к ступенчатому виду. Число ненулевых строк расширенной матрицы равно трем, значит, $r(A/B) = 3$. Число ненулевых строк основной матрицы равно трем, значит, $r(A) = 3$. Следовательно, $r(A/B) = r(A) = 3$. По теореме Кронекера-Капелли система имеет единственное решение. По ступенчатой матрице записываем систему уравнений эквивалентную исходной:

$\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ y+2z=4, \\ -11z=-22. \end{cases}$ Из последнего уравнения находим $z=\frac{-22}{-11}=2$. Подставляем $z=2$ во второе уравнение системы и находим $y=4-2z=4-2\cdot 2=0$. Подставляем $z=2$ и $y=0$ в первое уравнение и находим $x=4-2y-3z=4-2\cdot 0-3\cdot 2=-2$.

Решением системы является тройка чисел $(-2;0;2)$.

2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=1. \end{cases}$ $A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right]$. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду методом прямоугольников.

$$A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 & 1 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -10 & -4 \end{array}\right].$$ Сложим вторую и третью строки, получим:

$$A/B\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right].$$ Число ненулевых строк расширенной матрицы равно трем, значит, $r(A/B)=3$. Число ненулевых строк основной матрицы равно двум, значит, $r(A)=2$. Следовательно, $r(A/B)\neq r(A)$. По теореме Кронекера-Капелли система решений не имеет.

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ x_2+x_3+x_4=3, \\ x_1+x_2=2. \end{cases}$ $A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду методом прямоугольников.

$$A/B=\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right].$$ Сложим вторую и третью строки, получим:

$$A/B\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$ Число ненулевых строк расширенной матрицы равно двум, значит, $r(A/B)=2$. Число ненулевых строк основной матрицы равно двум, значит, $r(A)=2$. Следовательно, $r(A/B)=r(A)=2<n=4$, где n - число неизвестных. По теореме Кронекера-Капелли система имеет бесконечное множество решений, зависящее от двух параметров ($n-r=4-2=2$). По ступенчатой матрице записываем систему уравнений эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

В качестве двух базисных переменных берем те переменные, определитель, составленный из коэффициентов при которых отличен от нуля. Определитель при переменных x_1 и x_2 имеет вид: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Значит x_1 и x_2 - базисные переменные, оставшиеся x_3 и x_4 - свободные (параметры). Положим $x_3 = a$, $x_4 = b$. Система принимает вид:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + a + b = 5, \\ \quad x_2 + a + b = 3. \end{cases}$ Выразим x_1 и x_2 через a и b. Из второго уравнения находим $x_2 = 3 - a - b$. Подставим $x_2 = 3 - a - b$ в первое уравнение и находим $x_1 = 5 - 2x_2 - a - b = 5 - 2(3 - a - b) - a - b = 5 - 6 + 2a + 2b - a - b = -1 + a + b$.

Решение системы имеет вид: $\left(-1 + a + b; 3 - a - b; a; b\right), a, b \in R$.

Определение. Если столбец свободных членов состоит из нулей, то система называется *однородной*.

Замечание. Однородные системы линейных алгебраических уравнений решаются методом Гаусса. Основная матрица системы приводится к ступенчатому виду. Если ранг основной матрицы системы меньше числа неизвестных, то есть $r(A) < n$, то однородная система имеет бесконечное множество решений, зависящее от $\left(n - r\right)$ параметров. В противном случае система имеет единственное нулевое решение.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ 2x - y - z = 0, \\ x + 4y - 5z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$

Решение. Приведем основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$. Сложим вторую и третью строки полученной матрицы.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$. Умножим четвертую строку на 3 и сложим со второй.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$ Число ненулевых строк основной матрицы системы равно двум, значит $r(A) = 2 < n = 3$, где n - число неизвестных. Следовательно исходная однородная система имеет бесконечное множество решений, зависящее от одного параметра $(n - r = 3 - 2 = 1)$. Составим по ступенчатой матрице систему, эквивалентную исходной, получим: $\begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ \quad y - z = 0. \end{cases}$

Определитель, составленный из коэффициентов при переменных x и y, имеет вид: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Значит, x и y - базисные переменные, а z - свободная. Положим $z = a$, тогда система принимает вид: $\begin{cases} x + y - 2a = 0, \\ \quad y - a = 0. \end{cases}$ Выразим из второго уравнения $y = a$. Подставим $y = a$ в первое уравнение и найдем $x = 2a - y = 2a - a = a$. Общее решение исходной системы имеет вид: $(a; a; a), a \in R.$

ТЕМА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассматриваемые вопросы:

1. Виды уравнений прямой на плоскости.
2. Взаимное расположение прямых на плоскости.

1. Виды уравнений прямой на плоскости.

Всякую линию на плоскости рассматривают как множество точек, обладающих одним и тем же свойством, общим для всех этих точек.

Определение. Уравнением линии на плоскости называется такое уравнение относительно двух переменных, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на данной линии, и не удовлетворяют координаты любой другой точки, не лежащей на линии.

Уравнение $F(x, y) = 0$ задает линию на плоскости; x и y - текущие координаты произвольной точки, лежащей на линии.

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец – в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если начало и конец вектора не указываются, то вектор обозначают строчной буквой латинского алфавита: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots$.

Виды уравнений прямой на плоскости.

1. **Общее уравнение:** на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно переменных x и y:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

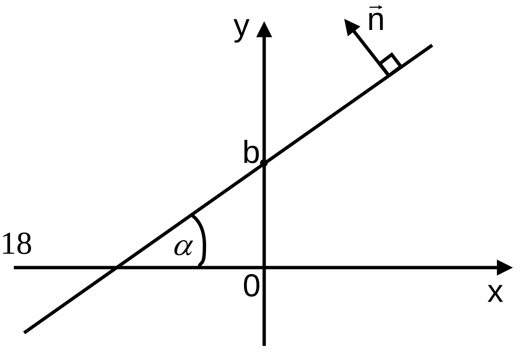


Рис. 2.1.

где A, B, C - некоторые действительные числа. Причем $A^2 + B^2 \neq 0$. Вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным* вектором прямой (рис. 2.1.).

2. **Уравнение прямой с угловым коэффициентом** k:

$$y = kx + b \qquad (2)$$

где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой; α - угол, который образует прямая с положительным направлением оси OX; b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

3. **Уравнение прямой по точке** $M_0(x_0, y_0)$ **и угловому коэффициенту** k:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (3)$$

где точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой.

4. **Уравнение прямой по двум точкам** $M_1(x_1, y_1)$ **и** $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (4)$$

5. **Каноническое уравнение прямой:**

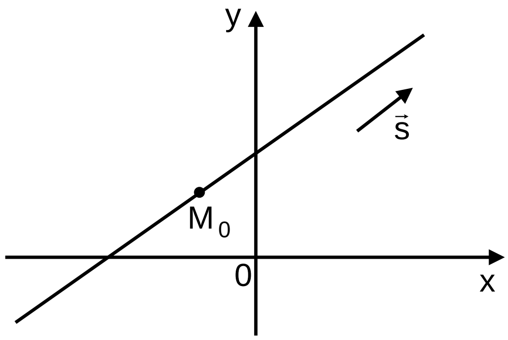


Рис. 2.2.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (5)$$

где вектор $\vec{s} = (m, n)$, параллельный прямой, называется *направляющим* вектором прямой; точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой (рис. 2.2).

6. **Уравнение прямой в отрезках:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6)$$

где a и b - отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях OX и OY, соответственно (рис. 2.3).

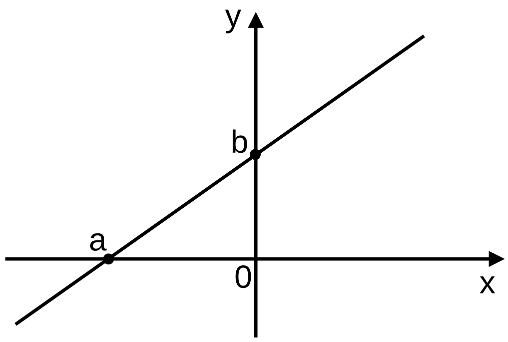


Рис. 2.3.

7. **Уравнение прямой по точке** $M_0(x_0, y_0)$ **и вектору нормали** $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (7)$$

Примеры. 1. Записать уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(2; 3)$, перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = (-1; 2)$. Найти угловой коэффициент полученной прямой.

Решение. Так как прямая перпендикулярна вектору $\vec{n}=(-1;2)$, значит, вектор $\vec{n}=(-1;2)$ является нормальным вектором прямой. Воспользуемся уравнением прямой по точке $M_0(x_0,y_0)$ и вектору нормали $\vec{n}=(A,B)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

В нашем случае будем иметь:

$-1(x-2)+2(y-3)=0$,

$-x+2+2y-6=0$,

$-x+2y-4=0-$ общее уравнение прямой.

Для того, чтобы найти угловой коэффициент прямой, выразим из полученного уравнения переменную y:

$$2y=x+4 \Rightarrow y=\frac{x+4}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2.$$

Тогда, коэффициент, стоящий перед переменной x, и будет искомым угловым коэффициентом: $k=\dfrac{1}{2}$.

2. Записать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(1;3)$ и $M_2(3;5)$.

Решение. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Получим:

$\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-3}{5-3} \Rightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{2} \Rightarrow x-1=y-3 \Rightarrow x-y+2=0$ - общее уравнение прямой M_1M_2.

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4;10)$, и отсекающей равные отрезки на осях координат.

Решение. Пусть a - отрезок, отсекаемый прямой на каждой из осей. Тогда, уравнение прямой в отрезках примет вид: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1 \Rightarrow x+y=a$.

С другой стороны, так как точка $M(-4;10)$ лежит на прямой, значит ее координаты удовлетворяют данному уравнению, то есть:

$-4+10=a \Rightarrow a=6$.

Таким образом, уравнение искомой прямой имеет вид: $x+y=6$.

2. **Взаимное расположение прямых на плоскости.**

Прямые на плоскости могут быть параллельны, перпендикулярны, могут пересекаться или совпадать.

Пусть обе прямые заданы общим уравнением:

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$,

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, тогда угол φ между прямыми находится по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых ($l_1 \perp l_2$): $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Условие параллельности прямых ($l_1 \| l_2$): $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие совпадения прямых: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Определение. Под *углом между прямыми* понимают один из смежных углов, образованных этими прямыми (рис. 2.4.).

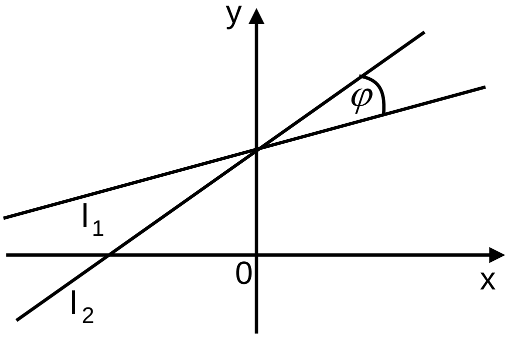


Рис. 2.4.

Пусть обе прямые заданы уравнением с угловым коэффициентом:

$$l_1 : y = k_1 x + b_1,$$
$$l_2 : y = k_2 x + b_2,$$

Угол φ между прямыми находится по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых ($l_1 \perp l_2$): $k_1 k_2 = -1$.

Условие параллельности прямых ($l_1 \| l_2$): $k_1 = k_2$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Примеры. 1. Дана прямая $l_1 : 2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой:

1) l_2, проходящей через точку $M(2;1)$, параллельно прямой l_1;

2) l_3, проходящей через точку $M(2;1)$, перпендикулярно прямой l_1.

Решение. 1) Найдем угловой коэффициент прямой l_1:

$$l_1 : 2x + 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3y = -2x - 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow k_{l_1} = -\frac{2}{3}.$$

Так как искомая прямая параллельна прямой l_1, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k_{l_1} = k_{l_2} = -\dfrac{2}{3}$ (условие параллельности прямых). Теперь для нахождения уравнения прямой l_2 воспользуемся уравнением по заданному угловому коэффициенту и точке:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В нашем случае имеем:

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow l_2 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}.$$

2) Так как прямые l_1 и l_3 перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно (-1), то есть $k_{l_1} \cdot k_{l_2} = -1 \Rightarrow k_{l_2} = -\dfrac{1}{k_{l_1}} = -\dfrac{1}{-\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$. Для

нахождения уравнения прямой l_3 воспользуемся снова уравнением прямой по заданному угловому коэффициенту и точке:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2)\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-3+1\Rightarrow l_3: y=\frac{3}{2}x-2.$$

2. Найти расстояние d от точки $A(2;-1)$ до прямой $4x+3y+10$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки до прямой:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

В нашем случае $A=4, B=3, C=10, x_0=2, y_0=-1$. Тогда искомое расстояние будет равно:

$$d=\frac{|4\cdot 2+3\cdot(-1)+10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|8-3+10|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3.$$

ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рассматриваемые вопросы:

1. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
2. Замечательные пределы.
3. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

1. Предел функции. Основные теоремы о пределах.

Если каждому элементу x из области D по определенному правилу ставится в соответствие некоторое число y из множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y=f(x)$. Область D называется *областью определения*, E - *область значения*, элемент $x\in D$ называется *аргументом*. Если паре чисел $(x; y=f(x))$ поставить в соответствие точку на координатной плоскости, то линия, соединяющая эти точки, называется *графиком функции* $y=f(x)$.

Определение. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a, если для значений аргумента близких к a, соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от b.

Строгое определение. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a, если для сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое, что если $|x-a|<\delta$, то $|f(x)-b|<\varepsilon$. То есть:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0\,\forall x: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Теорема. Функция может иметь только один предел в точке.

Замечание. Если при стремлении x к a, x принимает значения меньше a (больше a), и при этом $f(x)$ стремится к b, то говорят об односторонних пределах функции $f(x)$, соответственно, слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Очевидно, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то есть, если односторонние пределы существуют и равны между собой, то существует предел функции в точке.

В приводимых ниже теоремах, будем считать, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b_1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x)=b_2$.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to a}\big(u(x)\pm v(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}u(x)\pm\lim\limits_{x\to a}v(x)=b_1\pm b_2$.

Теорема 2. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x\to a}\big(u(x)\cdot v(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}v(x)=b_1\cdot b_2$.

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to a}\big(c\cdot u(x)\big)=c\lim\limits_{x\to a}u(x)=c\cdot b_1, c-const.$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to a}\big(u(x)\big)^n=\Big(\lim\limits_{x\to a}u(x)\Big)^n=b_1^n, \forall n\in N$.

Теорема 3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)}, \lim\limits_{x\to a}v(x)\neq 0$.

Замечание. Если при нахождении пределов суммы, произведения, частного, нарушаются условия теорем, то могут возникать неопределенности вида: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, $\left(1^{\infty}\right)$, для раскрытия которых требуются дополнительные алгебраические преобразования.

Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$. Для этого составим вспомогательную таблицу.

x	10	1000	1000000	…
$\dfrac{1}{x}$	0,1	0,001	0,000001	…

Как видно из таблицы, чем больше x, тем меньше значение дроби $\dfrac{1}{x}$, следовательно $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0}$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$. Для этого составим вспомогательную таблицу.

x	0,1	0,001	0,000001	…
$\dfrac{1}{x}$	10	1000	1000000	…

Как видно из таблицы, чем меньше x, тем больше значение дроби $\dfrac{1}{x}$, следовательно $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty}$.

Примеры. Вычислить пределы:

1). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+5}{3x^2+6x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ следует разделить числитель и знаменатель дроби на x в наибольшей степени из выражений числителя и знаменателя, в данном случае на x^2. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+5}{3x^2+6x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{4-0+0}{3+0-0}=\frac{4}{3}.$$

2). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2-4x+7}{3x^2-3x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2-4x+7}{3x^2-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\left(\frac{4}{0}\right)=\infty.$$

3). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x+5}{3x^5-x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^5. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+5}{3x^5-x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^5}+\frac{2x}{x^5}+\frac{5}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}-\frac{x}{x^5}-\frac{2}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}}{3-\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}}=\frac{0}{3}=0.$$

Вывод. Если при нахождении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, $Q_m(x)$ - многочлен степени m:

а) $n>m$, то предел равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$;

б) $n<m$, то предел равен нулю, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$;

в) $n=m$, то предел равен отношению коэффициентов при наибольших степенях.

2. Замечательные пределы.

Широко используются следующие два замечательных предела:

I. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1}$ - **первый замечательный предел.**

В более общем, виде первый замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to b}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=1,\ \lim_{x\to b}\alpha(x)=0.$$

Примеры. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$. Для того, чтобы применить первый замечательный предел в знаменателе должно стоять такое же выражение как под знаком синуса. Умножим числитель и знаменатель дроби на 5:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$. Умножим и разделим числитель дроби на $5x$, а знаменатель на $7x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 5x}{1\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x\cos 3x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}=\frac{3}{1}=3.$$

II. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e\approx 2,718...}$ **- второй замечательный предел.**

В более общем, виде второй замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\left(1^\infty\right)=e,\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\infty.$$

Примеры. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)$. Для того, чтобы применить второй замечательный предел, показатель должен быть обратным дроби $\left(-\frac{2}{x}\right)$. С учетом этого преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x-5}=\left(1^\infty\right)$. Прибавим и вычтем в скобках единицу:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x-5}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-3}-1\right)^{x-5}$. Приведем (-1) и дробь $\frac{x+1}{x-3}$ к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-3}-1\right)^{x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+3}{x-3}\right)^{x-5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{4}}\right]^{\frac{4}{x-3}\cdot(x-5)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-20}{x-3}}=e^{4}.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x-5}=e^{4}$.

3. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняются следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0, то есть точка x_0 принадлежит области определения функции, то есть существует значение функции $f(x)$ в точке x_0;
2) существует предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если эта функция в данной точке не является непрерывной, то есть если нарушено хотя бы одно из условий непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Классификация точек разрыва:

1. **Точка устранимого разрыва**. Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $y=f(x)$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но x_0 не принадлежит области определения функции $y=f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.
2. **Точка разрыва первого рода.** Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $y=f(x)$, если x_0 принадлежит области определения функции $y=f(x)$, но односторонние пределы не равны между собой: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
3. **Точка разрыва второго рода.** Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Отметим важное свойство элементарных функций. Элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причем, в точке a она непрерывна справа ($f(a+0)=f(a)$), а в точке b - слева ($f(b-0)=f(b)$).

Пример. Исследовать данную функцию на непрерывность:

$$f(x)=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+2, -1\le x<1, \\ 2x, x\ge 1. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;-1),(-1;1)$ и $(1;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=-1$ и $x_2=1$.

Исследуем функцию на непрерывность в точке $x_1=-1$. Для этого вычислим односторонние пределы и значение функции в этой точке:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}(x+4)=-1+4=3;$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}(x^2+2)=\left(-1\right)^2+2=3;$$

$$f(-1)=\left(x^2+2\right)\Big|_{x=-1}=\left(-1\right)^2+2=3.$$

Получили, что $f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1)$, следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1=-1$.

Для точки $x_2=1$:

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}(x^2+2)=1^2+2=3;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}2x=2\cdot1=2;$$

$$f(1)=2x\big|_{x=1}=2\cdot1=2.$$

Получили, что $f(1-0)\neq f(1+0)$, следовательно, функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x_2=1$. Точка $x_2=1$ - точка разрыва первого рода.

Иллюстрацию к примеру смотри на рис. 3.1.

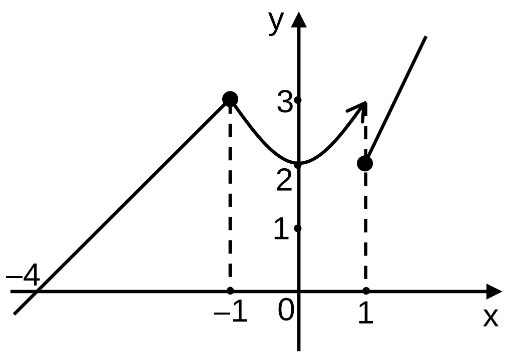


Рис. 3.1.

ТЕМА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассматриваемые вопросы:

1. Определение производной, ее геометрический и экономический смысл.
2. Основные правила дифференцирования. Таблица производных.

Вопросы для самостоятельного изучения:

1. Использование понятия производной в экономике.

Форма контроля – контрольная работа № 2.

1. Определение производной функции, ее геометрический и экономический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Придадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Производная обозначается одним из следующих символов: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$. Таким образом:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0, то есть $k = tg\alpha = f'(x_0)$. *Уравнение касательной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0,\ f(x_0))$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Экономический смысл производной: производная объема произведенной продукции $u'(t_0)$ по времени t есть производительность труда в момент времени t_0.

2. Основные правила дифференцирования. Таблица производных.

Если указанный предел (1) существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x, а операцию нахождения производной y' – *дифференцированием*.

Если C – постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

1. $(u \pm v) = u' \pm v'$;
2. $(Cu)' = Cu'$;
3. $(uv)' = u'v + v'u$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$. В частности: $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{1}{v^2} \cdot v'$.

Производная сложной функции. Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $y'_x = y'_u u'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

Производная обратной функции. Если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция, $x = g(y)$ и $g'(y) \neq 0$, то $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Таблица производных основных элементарных функций
(будем считать, что функция $u = u(x)$)

1. $C' = 0$, $C - const$;
2. $x' = 1$;
3. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u' \quad (\alpha \in R)$;
4. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a \cdot u'$;
5. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;
6. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}u'$;
7. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}u'$;
8. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;
9. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;
10. $\left(tg\ u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$;
11. $\left(ctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$;
12. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;
13. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$;
14. $\left(arctg\ u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$;
15. $\left(arcctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$.

Примеры. Найти производные данных функций:

1) $y = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x}$,

2) $y = e^{2x} \cdot \sin^3(7x+3)$,

3) $y = \dfrac{\ln^5 x}{tg 3x}$.

Решение.

1) $y = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x}$. Преобразуем функцию, получим:

$y = 6x^{-4} - 3x^{-1} + 3x^3 - x^{\frac{1}{2}}$. Тогда:

$$y' = 6\left(x^{-4}\right)' - 3\left(x^{-1}\right)' + 3\left(x^{3}\right)' - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 6\cdot(-4)x^{-4-1} - 3\cdot(-1)x^{-1-1} + 3\cdot 3x^{3-1} -$$

$$-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -24x^{-5} + 3x^{-2} + 9x^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{24}{x^5} + \frac{3}{x^2} + 9x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x}.$$

2) $y=e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)$. Для нахождения производной применим формулу производной произведения: $(uv)'=u'v+v'u$. Получим:

$$y'=\left(e^{2x}\right)'\cdot\sin^3(7x+3)+e^{2x}\cdot\left(\sin^3(7x+3)\right)'=$$

$$=e^{2x}(2x)'\cdot\sin^3(7x+3)+e^{2x}\cdot 3\sin^2(7x+3)\left(\sin(7x+3)\right)'=$$

$$=2e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)+e^{2x}\cdot 3\sin^2(7x+3)\cdot\cos(7x+3)(7x+3)'=$$

$$=2e^{2x}\cdot\sin^3(7x+3)+21e^{2x}\cdot\sin^2(7x+3)\cos(7x+3).$$

3) $y=\dfrac{\ln^5 x}{tg3x}$. Для нахождения производной применим формулу производной частного: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Получим:

$$y'=\frac{\left(\ln^5 x\right)'\cdot tg3x-(tg3x)'\cdot\ln^5 x}{tg^2 3x}=\frac{5\cdot\ln^4 x\cdot(\ln x)'\cdot tg3x}{tg^2 3x}-\frac{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(3x)'\cdot\ln^5 x}{tg^2 3x}=$$

$$=\frac{5\cdot\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}\cdot tg3x-\frac{3}{\cos^2 3x}\cdot\ln^5 x}{tg^2 3x}==\frac{\ln^4 x\cdot(5\sin 3x\cdot\cos 3x-3x\cdot\ln x)}{x\cdot tg^2 3x\cdot\cos^2 3x}=$$

$$=\frac{\ln^4 x\cdot(5\sin 6x-6x\cdot\ln x)}{2x\cdot\sin^2 3x}.$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если предел отношения производных существует.

Итак, если есть неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Примеры. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{(2x)'}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

ТЕМА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассматриваемые вопросы:

1. Возрастание, убывание функции. Экстремумы функции.
2. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции.
3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
4. Асимптоты графика функции.

1. Возрастание, убывание функции. Экстремумы функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на области D, если $\forall x_1 > x_2 \ \left(x_1, x_2 \in D\right)$ выполняется неравенство: $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$. (Рис. 5.1.)

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на области D, если $\forall x_1 > x_2 \ \left(x_1, x_2 \in D\right)$ выполняется неравенство: $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$. (Рис. 5.2.)

Теорема (достаточное условие возрастания (убывания) функции). Если функция

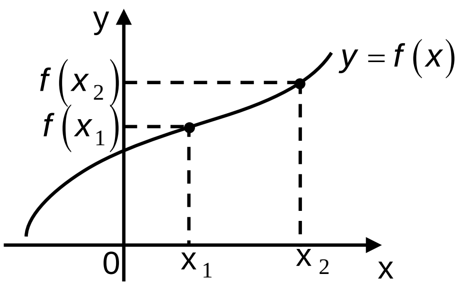


Рис. 5.1.

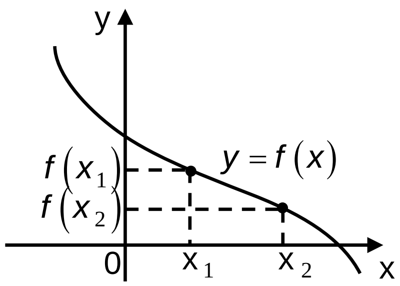


Рис. 5.2.

$y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'\left(x\right) > 0$ ($f'\left(x\right) < 0$), то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

Интервалы на которых функция возрастает или убывает называются интервалами монотонности функции.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение. Найдем производную функции $y' = 2x - 4$ и приравняем ее к нулю:

$y' = 0 : 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

На интервале $\left(-\infty; 2\right)$ производная $y' < 0$, следовательно, функция убывает на этом интервале; на интервале $\left(2; +\infty\right)$ производная $y' > 0$, следовательно, функция возрастает на этом интервале.

Определение. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* функции $y = f(x)$, если для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой *локального минимума* функции $y = f(x)$, если для любой точки x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство: $f(x_0) \leq f(x)$.

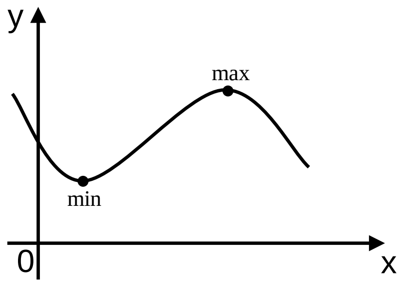


Рис. 5.3.

Значение функции в точке локального максимума (минимума) называется *максимумом (минимумом)* функции. Максимум и минимум функции называется *экстремумом функции*. (Рис. 5.3.)

2. **Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции.**

Теорема (необходимое условие существования экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Обратная теорема неверна, то есть если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что точка x_0 - точка экстремума.

Точки, в которых производная обращается в ноль или не существует, называются *критическими или стационарными*.

Теорема (достаточное условие существования экстремума). Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка x_0 - точка локального максимума; если производная меняет свой знак с минуса на плюс, то точка x_0 - точка локального минимума.

Правило исследования функции на экстремум.

1. Найти точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует, то есть найти критические точки.
2. Среди критических точек выбрать те, которые принадлежат области определения функции.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой из выбранных точек.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x\left(x-1\right)^3$.

Решение.

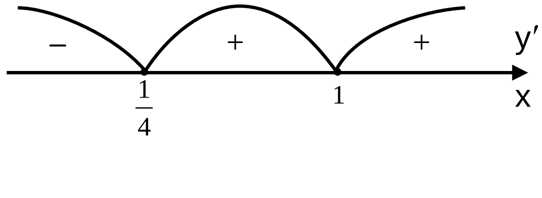
1. Найдем производную функции:

$$y' = \left(x\left(x-1\right)^3\right)' = \left(x-1\right)^3 + x\cdot 3\left(x-1\right)^2 = \left(x-1\right)^2\left(x-1+3x\right) = \left(x-1\right)^2\left(4x-1\right).$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0 : \left(x-1\right)^2\left(4x-1\right) = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{4}.$$

Областью определения функции является вся числовая прямая, значит обе критические точки принадлежат области определения. Методом интервалов исследуем знак первой производной слева и справа от каждой из критических точек.

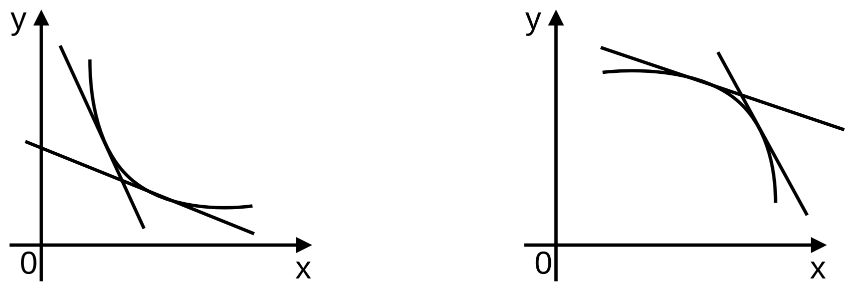


Следовательно, для $x\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$ $y'(x)<0$, значит, функция убывает на этом промежутке; для $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ - $y'(x)>0$, значит, функция возрастает на этом промежутке. По достаточному условию существования экстремума в точке $x=\frac{1}{4}$ функция имеет локальный минимум, так как при переходе через эту точку производная меняет свой знак с минуса на плюс. При этом $y_{\min}=y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)^3=-\frac{27}{256}$. Точка $x=1$ не является точкой экстремума.

3. **Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.**

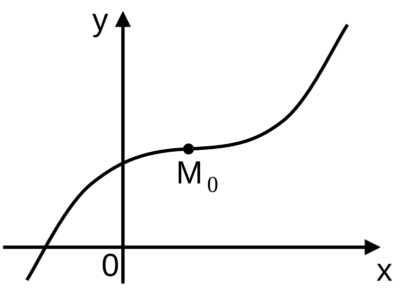
Определение. График функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вниз (или вогнутым)* на интервале $(a;b)$, если на этом интервале график расположен выше касательной к графику функции, проведенной в любой точке интервала $(a;b)$.

Определение. График функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вверх (или выпуклым)* на интервале $(a;b)$, если на этом интервале график расположен ниже касательной к графику функции, проведенной в любой точке интервала $(a;b)$.



Теорема. Если функция $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)>0$ для любого x из интервала $(a;b)$, то график функции на интервале $(a;b)$ вогнутый; если $f''(x)<0$ для любого x из интервала $(a;b)$, то график функции на интервале $(a;b)$ выпуклый.

Определение. Точка графика дифференцируемой функции называется *точкой перегиба* функции $y=f(x)$, если в ней характер выпуклости меняется на противоположный.



Теорема. Если для функции $y = f(x)$ вторая производная в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует, и при переходе через эту точку меняет свой знак на противоположный, то точка $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

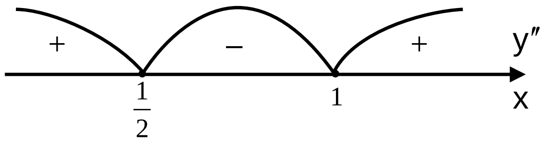
Пример. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = x\left(x-1\right)^3$.

Решение. Выше была найдена первая производная функции: $y' = \left(x-1\right)^2\left(4x-1\right)$. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\left(x-1\right)^2\left(4x-1\right)\right)' = 2\left(x-1\right)\left(4x-1\right) + 4\left(x-1\right)^2 = \left(x-1\right)\left(8x-2+4x-4\right) =$$
$$= \left(x-1\right)\left(12x-6\right).$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в нуль:

$y'' = 0 : \left(x-1\right)\left(12x-6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{2}$. Методом интервалов исследуем знак второй производной слева и справа от каждой из полученных точек.

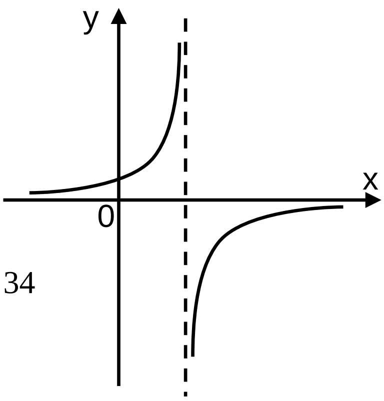


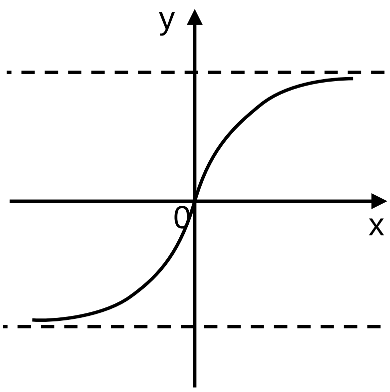
Следовательно, для $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1; +\infty\right)$ $y''(x) > 0$, и график функции вогнутый, а для $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$ $y''(x) < 0$, и график функции выпуклый. Таким образом, при переходе через точки $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{1}{2}$ меняется характер выпуклости. Следовательно, точки $M_1\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{16}\right)$ и $M_2\left(1;0\right)$ являются точками перегиба графика данной функции.

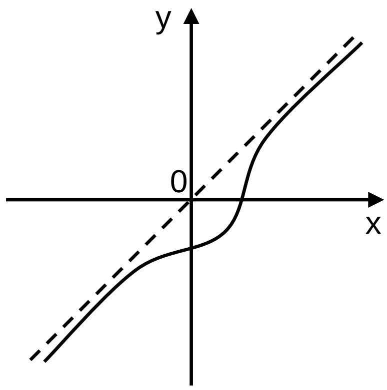
4. Асимптоты графика функции.

Определение. *Асимптотой графика функции* $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки графика этой функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности.







Замечание. Вертикальные асимптоты существуют в точках разрыва функции.

Пример. Найти вертикальные асимптоты функции $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Решение. Точками разрыва функции являются точки в которых знаменатель обращается в ноль, то есть $x_1=1$ и $x_2=-1$. Для точки $x_1=1$ имеем:

$$\lim_{x\to1-0}y=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty;\ \lim_{x\to1+0}y=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Для точки $x_2=-1$:

$$\lim_{x\to-1-0}y=\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty;\ \lim_{x\to-1+0}y=\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{x^2-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

Следовательно, прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами. (см. рис. 5.4.)

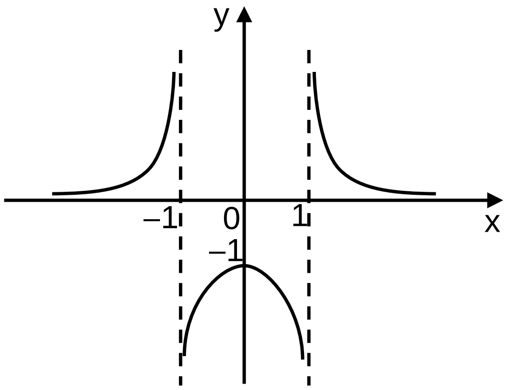


Рис. 5.4.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при x стремящемся к бесконечности, если $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0$. Если $k=0$, то асимптота $y=b$ называется *горизонтальной*.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел наклонную асимптоту $y=kx+b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то график функции наклонной асимптоты не имеет.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, вертикальных асимптот не имеет. Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$, если она существует. Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0.$$

Следовательно, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\frac{1}{x^2+1}$. (см. рис. 5.5.)

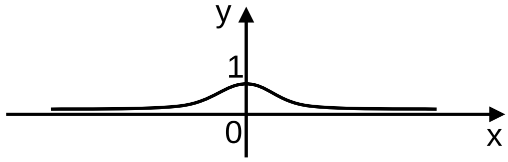


Рис. 5.5.

ТЕМА 6. ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Частные производные функции нескольких переменных. Полный дифференциал.
3. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных.
4. Экстремум функции нескольких переменных.
5. Метод наименьших квадратов.

Вопросы для самостоятельного изучения:

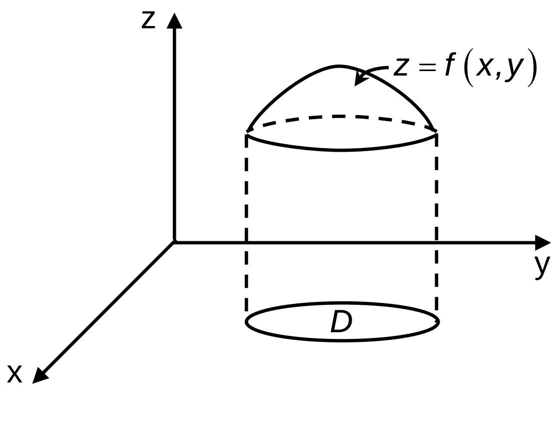
1. Функции нескольких переменных в экономической теории.

Форма контроля – контрольная работа № 3.

1. Понятие функции нескольких переменных.

Определение. Если каждой паре чисел $(x;y)\in D$ ставится в соответствие по определенному закону число $z\in R$, то говорят, что на множестве D задана *функция двух переменных* $z=f(x;y)$ с областью определения D. При этом x и y называют *независимыми переменными (аргументами)*; z *- зависимая переменная (функция)*.

Пример. Площадь прямоугольника со сторонами x и y является функцией двух переменных: $S(x;y)=x\cdot y$.



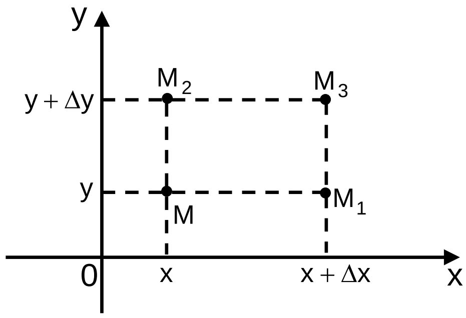
Функцию двух переменных $z=f(x;y)$ можно изобразить в трехмерном пространстве как множество точек $\Gamma=\left\{(x;y;z)\in R^3 \middle| z=f(x;y)\right\}$, которое является поверхностью в R^3. Проекцией поверхности на плоскость Oxy является область определения функции $z=f(x;y)$, то есть множество $D=D(f)$.

2. Частные производные функции нескольких переменных. Полный дифференциал.

Определение. Число A называется *пределом функции* $z=f(x;y)$ при $x\to x_0, y\to y_0$ (или $M(x;y)\to M_0(x_0;y_0)$), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для всех $x\neq x_0, y\neq y_0$ таких, что

$\rho\left(M;M_0\right)=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\delta$ выполняется неравенство: $\left|f(x;y)-A\right|<\varepsilon$. Обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=\lim\limits_{M\to M_0} f(x;y)=A$.

Замечание. Из определения предела следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому точка M стремится к точке M_0. Для функции двух переменных число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x\to x_0$ по двум направлениям: справа и слева.



Рассмотрим точку $M\left(x;y\right)$. Придадим переменной x приращение Δx, а переменной y - приращение Δy, и рассмотрим различные приращения функции:

- разность $f\left(M_1\right)-f\left(M\right)=f\left(x+\Delta x;y\right)-f\left(x;y\right)=\Delta_x z$ называется частным приращением функции $z=f\left(x;y\right)$ по переменной x;

- разность $f\left(M_2\right)-f\left(M\right)=f\left(x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)=\Delta_y z$ называется частным приращением функции $z=f\left(x;y\right)$ по переменной y;

- разность $f\left(M_3\right)-f\left(M\right)=f\left(x+\Delta x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)=\Delta z$ называется полным приращением функции $z=f\left(x;y\right)$.

Определение. Функция $z=f\left(x;y\right)$ называется *непрерывной в точке* $M_0\left(x_0;y_0\right)\in D(f)$, если $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$, то есть бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение. Функция $z=f\left(x;y\right)$ называется *непрерывной в точке* $M_0\left(x_0;y_0\right)\in D(f)$ *по переменной x (по переменной y),* если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta z_x=0$ ($\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta z_y=0$). Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то функция непрерывна в этой области.

Определение. Предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ функции $z=f\left(x;y\right)$ к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю произвольным образом, называется *частной производной функции $z=f\left(x;y\right)$ по переменной x*:

$$z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x;y\right)-f\left(x;y\right)}{\Delta x}.$$

Частная производная функции $z=f\left(x;y\right)$ по переменной y определяется аналогично:

$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной переменной при условии, что другая переменная остается постоянной. Значит, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для функции одной переменной, имеют место и для частных производных.

Пример. Найти частные производные функций:

1) $z=9x^2+8xy+3y^3-5x$. При вычислении частной производной по переменной x переменную y считаем постоянной величиной:

$$z'_x=9\left(x^2\right)'+8y\left(x\right)'+0-5\left(x\right)'=18x+8y-5.$$

При вычислении частной производной по переменной y переменную x считаем постоянной величиной:

$$z'_y=0+8x\left(y\right)'+3\left(y^3\right)'-0=8x+9y^2.$$

2) $z=x^3\sin\left(xy^2\right)$. При вычислении z'_x применяем формулу производной произведения:

$$z'_x=\left(x^3\right)'_x\sin\left(xy^2\right)+x^3\left(\sin\left(xy^2\right)\right)'_x=3x^2\sin\left(xy^2\right)+x^3\cos\left(xy^2\right)\left(xy^2\right)'_x=3x^2\sin\left(xy^2\right)+$$
$$+x^3y^2\cos\left(xy^2\right)$$

При вычислении z'_y переменную x считаем постоянной величиной, поэтому функция $z=x^3\sin\left(xy^2\right)$ есть произведение константы на $\sin\left(xy^2\right)$, значит:

$$z'_y=x^3\left(\sin\left(xy^2\right)\right)'_y=x^3\cos\left(xy^2\right)\left(xy^2\right)'_y=x^3\cdot 2xy\cos\left(xy^2\right)=2x^4y\cos\left(xy^2\right).$$

Полное приращение дифференцируемой в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ функции $z=f\left(x;y\right)$ можно представить в виде:

$$\Delta z=f\left(x+\Delta x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)=f_x'\left(x_0;y_0\right)\Delta x+f_y'\left(x_0;y_0\right)\Delta y+\alpha\left(\Delta x;\Delta y\right)\Delta x+$$
$$+\beta\left(\Delta x;\Delta y\right)\Delta y,$$

где α,β - бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$.

Определение. Если функция $z=f\left(x;y\right)$ дифференцируема в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$, то главная линейная относительно приращений аргументов часть ее полного приращения называется *полным дифференциалом функции* $z=f\left(x;y\right)$:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Приращения независимых переменных называются дифференциалами независимых переменных: $\Delta x=dx;\Delta y=dy$. Тогда

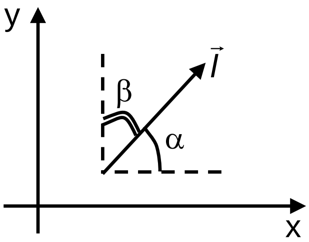
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=z'_xdx+z'_ydy.$$

Из определения следует, что $dz\approx\Delta z$, то есть при достаточно малых Δx и Δy полное приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

3. Производная по направлению и градиент функции нескольких переменных.

Определение. *Производной* z_l' *по направлению вектора* $\vec{l}$ функции двух переменных $z=f(x;y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к приращению вектора, при условии, что приращение вектора стремится к нулю, то есть:

$z_l'=\dfrac{\partial z}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta_l z}{\Delta l}=z_x'\cos\alpha+z_y'\cos\beta$, где $\cos\alpha,\cos\beta$ - направляющие косинусы вектора $\vec{l}$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$.



Пусть вектор $\vec{l}=(x;y)$, тогда направляющие косинусы находятся по формулам:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{l}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \cos\beta=\frac{y}{|\vec{l}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении вектора $\vec{l}$.

Пример. Вычислить значение производной функции $z=x^2y+3xy$ по направлению вектора $\vec{l}=(4;-3)$ в точке $M(1;1)$.

Решение. Найдем частые производные функции:

$z_x'=2xy+3y$, $z_x'(1;1)=2+3=5$;

$z_y'=x^2+3x$, $z_y'(1;1)=1+3=4$.

Далее найдем направляющие косинусы: $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{l}|}=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{4}{5}$; $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$.

Тогда производная по направлению будет равна: $z_l'=5\cdot\dfrac{4}{5}+4\cdot\dfrac{-3}{5}=\dfrac{8}{5}$. Так как производная по направлению больше нуля, значит, функция в данной точке в направлении данного вектора возрастает.

Определение. *Градиентом* функции $z=f(x;y)$ называется вектор с координатами $(z_x';z_y')$: $grad\,z=(z_x';z_y')$.

Градиент функции в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Пример. Найти градиент функции $z=(x-y)^2$ в точке $M(0;3)$.

Решение. Вычислим частные производные функции в точке $M(0;3)$:

$z_x'=2(x-y)$, $z_x'(M)=2(0-3)=-6$; $z_y'=-2(x-y)$, $z_y'(M)=-2(0-3)=6$.

Тогда $grad\,z(M)=(-6;6)$.

4. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f\left(x;y\right)$ имеет первые частные производные z'_x и z'_y в точке $M\left(x;y\right)$ и в каждой точке некоторой ее окрестности. Тогда частные производные от частных производных z'_x и z'_y называются *частными производными второго порядка (вторыми частными производными)* функции $z = f\left(x;y\right)$ в точке $M\left(x;y\right)$. Частные производные второго порядка обозначаются:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y.$$

Частные производные z''_{yx} и z''_{xy} называются *смешанными частными производными*. Если частные производные первого порядка непрерывны, то значение смешанной частной производной не зависит от порядка дифференцирования, то есть $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Пусть функция $M_0\left(x_0;y_0\right)$ определена в некоторой области D.

Определение. Точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $z = f\left(x;y\right)$, если существует окрестность точки $M_0\left(x_0;y_0\right)$, такая, что для всех точек из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f\left(x_0;y_0\right) \geq f\left(x;y\right)\ \left(f\left(x_0;y_0\right) \leq f\left(x;y\right)\right).$$

Локальный максимум и локальный минимум функции называется *экстремумом функции*. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь их вообще.

Теорема (необходимое условие существования локального экстремума). Пусть точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ является точкой экстремума дифференцируемой функции $z = f\left(x;y\right)$. Тогда частные производные функции $z = f\left(x;y\right)$ в этой точке обращаются в нуль $\left(z'_x\left(x_0;y_0\right) = 0; z'_y\left(x_0;y_0\right) = 0\right)$ или не существуют.

Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z = f\left(x;y\right)$ равны нулю или не существуют, называются *критическими (или стационарными*). Исследование их на экстремум проводят с помощью достаточных условий существования экстремума функции двух переменных.

Теорема (достаточное условие существования локального экстремума). Пусть функция $z = f\left(x;y\right)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $M_0\left(x_0;y_0\right)$, то есть $\begin{cases} z'_x\left(M_0\right) = 0, \\ z'_y\left(M_0\right) = 0. \end{cases}$ Введем обозначения: $\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}$, тогда, если:

1) $\Delta\left(M_0\right) > 0$, то точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ является точкой локального экстремума, причем если:

а) $z''_{xx}\left(M_0\right) > 0$, то точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ - точка локального минимума;

б) $z''_{xx}\left(M_0\right) < 0$, то точка $M_0\left(x_0;y_0\right)$ - точка локального максимума;

2) $\Delta\left(M_0\right) < 0$, то в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ экстремума нет;

3) $\Delta\left(M_0\right) = 0$, то необходимы дополнительные исследования.

Схема исследования функции $z = f\left(x;y\right)$ на локальный экстремум:

1. Найти частные производные первого порядка z'_x и z'_y.

2. Решить систему $\begin{cases} z'_x(M_0)=0, \\ z'_y(M_0)=0. \end{cases}$ и найти критические точки.

3. Найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в каждой из критических точек. С помощью достаточного условия существования экстремума сделать вывод о наличии экстремумов в критических точках.

4. Найти экстремумы функции.

Пример. Найти экстремум функции $z=\frac{3}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-5x-y+2$.

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$z'_x=3x+2y-5; z'_y=2x-y-1$.

Находим стационарные точки, используя необходимое условие:

$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y-5=0, \\ 2x-y-1=0. \end{cases}$ Решая систему, получаем $x=1, y=1$, следовательно, $M_0(1;1)$ - стационарная точка.

Находим частные производные второго порядка:

$z''_{xx}=3, z''_{xy}=z''_{yx}=2, z''_{yy}=-1$.

Значения производных не зависят от x и y, поэтому вычислять их значения в стационарной точке не надо. Вычисляем определитель

$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3-4=-7<0$, следовательно, в точке $M_0(1;1)$ функция экстремума не имеет.

5. Метод наименьших квадратов.

В экономической практике часто требуется представить наблюдаемые (измеренные) данные в виде функциональной зависимости. При этом предполагается, что вид функциональной зависимости известен (например, в результате ранее проведенных исследований), и требуется определить только параметры этой зависимости.

Пусть в ходе исследования (например, покупательского спроса) получена следующая таблица, где x - аргумент (цена товара), а y - функция (количество товара):

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Требуется по этим табличным данным получить функциональную зависимость. Для оценки функциональной зависимости представим данные таблицы в виде точек на плоскости.

Исходя из графика можно предполагать, что эта функциональная зависимость либо линейная: $y=ax+b$ (линия 1); либо квадратичная: $y=ax^2+bx+c$ (линия 2) (см. рис. 6.1.)

Метод наименьших квадратов предусматривает нахождение параметров a,b (a,b,c) этих зависимостей при условии, что сумма квадратов отклонений практических данных от теоретических минимальна:

для линейной зависимости

$$\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2\to\min;$$

для квадратичной зависимости

$$\Phi(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^{\;2}+bx_i+c-y_i\right)^2\to\min.$$

Тогда из условий $\Phi'_a=0,\Phi'_b=0$ получаем формулы для определения коэффициентов линейной зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

Из условий $\Phi'_a=0,\Phi'_b=0,\ \Phi'_c=0$ получаем формулы для определения коэффициентов квадратичной зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+nc=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases}$$

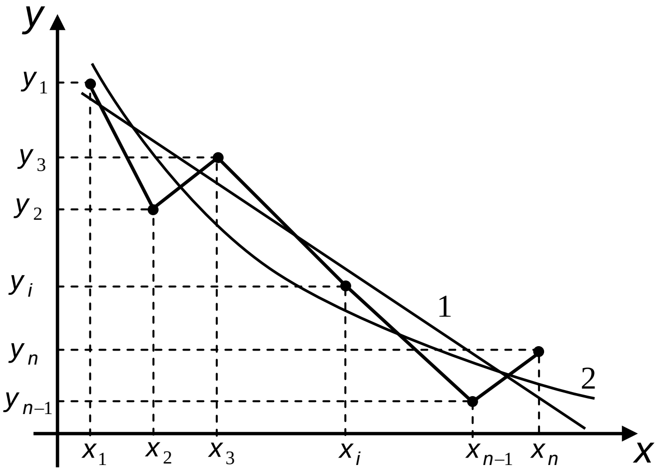


Рис. 6.1.

ТЕМА 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассматриваемые вопросы:

1. Первообразная и неопределенный интеграл.
2. Определенный интеграл.

Вопросы для самостоятельного изучения:

1. Экономический смысл определенного интеграла.
2. Использование понятия определенного интеграла в экономике.

Форма контроля – контрольная работа № 3.

1. **Первообразная и неопределенный интеграл**

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого x из интервала $(a;b)$ выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример. Функция $F(x)=\dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x)=x^2$, так как $F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=\dfrac{3x^2}{3}=x^2=f(x)$.

Теорема. Любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

Определение. Бесконечное множество первообразных, вида $F(x)+C$, где C - константа, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой множество кривых, каждая из которых получается путем параллельного переноса одной из них вдоль оси OY.

Операция нахождения неопределенного интеграла функции $f(x)$ называется *интегрированием.*

Свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.
3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной: $\int dF(x)=F(x)+C, C-const$.
4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int a\,f(x)dx=a\int f(x)dx, a-const$.
5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен сумме интегралов от слагаемых: $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.
6. **Инвариантность формул интегрирования:** результат интегрирования не изменится если переменную интегрирования заменить дифференцируемой функцией этой переменной, то есть, если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u)dx=F(u)+C$, где $u=u(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

(буква u может обозначать как независимую переменную, так и функцию от независимой переменной $u = u(x)$)

1. $\int 0dx = C, C - const$.
2. $\int du = u + C, C - const$.
3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1, C - const$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, C - const$.
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1, C - const$.
6. $\int e^u du = e^u + C, C - const$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C, C - const$.
8. $\int \cos u du = \sin u + C, C - const$.
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C, C - const$.
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C, C - const$.
11. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0, C - const$.
12. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C,\ a \neq 0, C - const$.
13. $\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C, C - const$.
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0, C - const$.
15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C, C - const$.
16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C,\ a \neq 0, C - const$.
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C,\ a \neq 0, C - const$.

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или подынтегрального выражения) и применения свойств неопределенного интеграла сводится к одному или нескольким табличным называется *непосредственным интегрированием*.

При сведении данного интеграла к табличному, используют следующие преобразования дифференциала (операция «поднесение под знак дифференциала»):

1. $du = d(u+a), a - const$.

5. $\sin u du = -d(\cos u)$.

2. $du=\frac{1}{a}d(au), a\neq 0, a-const$.

3. $udu=\frac{1}{2}d(u^2)$.

4. $\cos u du=d(\sin u)$.

6. $\frac{du}{u}=d(\ln u)$.

7. $e^u du=d\left(e^u\right)$

8. $f'(u)du=d\left(f\left(u\right)\right)$

Пример. Вычислить интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x+3}=\left[dx=d(x+3)\right]=\int\frac{d\left(x+3\right)}{x+3}=\ln\left|x+3\right|+C$.

2) $\int\left(2x+1\right)^{17}dx=\left[dx=\frac{1}{2}d(2x+1)\right]=\frac{1}{2}\int\left(2x+1\right)^{17}d(2x+1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x+1\right)^{17+1}}{17+1}+C=\frac{\left(2x+1\right)^{18}}{36}+C$.

3) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\left[\frac{1}{x}dx=d(\ln x)\right]=\int\ln^2 x\,d(\ln x)=\frac{\ln^{2+1}x}{2+1}+C=\frac{\ln^3 x}{3}+C$.

4) $\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2^2-\left(3x\right)^2}}dx=\left[dx=\frac{1}{3}d(3x)\right]=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{2^2-\left(3x\right)^2}}d\left(3x\right)=$

$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$.

Метод замены переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки) описывается следующей формулой: $\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$, где $x=\varphi(t)$ - функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Пример. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{x-3}dx$

Решение. $\int x\sqrt{x-3}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x-3}=t,\\ x=t^2+3, dx=d\left(t^2+3\right)=\left(t^2+3\right)'dt=2tdt\end{bmatrix}=$

$=\int\left(t^2+3\right)t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4+3t^2\right)dt=2\cdot\frac{t^5}{5}+2\cdot 3\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C$.

Теперь вернемся к старой переменной:

$\int x\sqrt{x-3}dx=\frac{2}{5}\left(x-3\right)^{\frac{5}{2}}+\left(x-3\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда $d\left(uv\right)=udv+vdu$. Интегрируя обе части данного равенства, получим:

$\int d\left(uv\right)=\int udv+\int vdu$, то есть $uv=\int udv+\int vdu$.

Из данного равенства следует, что

$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$ - **формула интегрирования по частям.**

Приведем некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям:

I Для вычисления интегралов вида $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $k \in R$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, следует положить $u = P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям.

II Для вычисления интегралов вида $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arc}\,tgxdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arc}\,ctgxdx$ за u следует принять функцию, являющуюся множителем при многочлене $P_n(x)$, $dv = P_n(x)dx$ и применить формулу интегрирования по частям.

III Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx,$ $\int e^{ax}\sin bxdx,$ $a,b \in R$, $\int \cos(\ln x)dx,$ $\int \sin(\ln x)dx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Примеры. Вычислить интегралы

1) $\int xe^{3x}dx$; 2) $\int x^2 \ln xdx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_1(x) = x$ и экспоненты e^{3x} (интеграл типа I), значит за u принимаем $P_1(x) = x$:

$$\int xe^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = x'dx = dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot x - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot x - \frac{1}{9}e^{3x} + c.$$

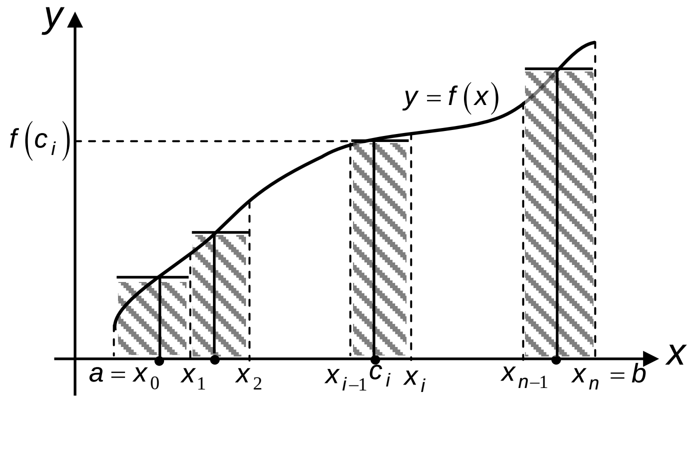
2) Подынтегральная функция представляет собой произведение многочлена $P_2(x) = x^2$ и логарифма $\ln x$ (интеграл типа II), значит за u принимаем $\ln x$:

$$\int x^2 \ln xdx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2dx & v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

2. Определенный интеграл

Пусть требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b, y = 0$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией*.



Поступаем следующим образом:

1. разобьем отрезок $[a;b]$ на n отрезков:
   $[a = x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots [x_{n-1}; x_n = b]$;
2. в каждом отрезке выберем точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i \in \overline{1,n}$;
3. найдем площади прямоугольников с основанием $[x_{i-1}; x_i]$ и высотой $f(c_i)$:

$S_i = \Delta x_i \cdot f(c_i)$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Тогда площадь криволинейной трапеции будет приближенно равна сумме площадей построенных прямоугольников: $S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(c_i)$. Полученная сумма называется интегральной суммой. Пусть $\lambda = \max_i \Delta x_i$ - длина наибольшего частичного отрезка. Тогда площадь криволинейной трапеции будет тем точнее, чем меньше λ, и чем больше число отрезков разбиения, то есть n.

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$ и $n \to \infty$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и от выбора точек c_i, то это предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается:

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$, a - нижний предел интегрирования; b - верхний предел интегрирования; $[a;b]$ - отрезок интегрирования.

Из определения следует, что определенный интеграл зависит от пределов интегрирования a и b, от подынтегральной функции $f(x)$ и не зависит от переменной интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Теорема (необходимое условие интегрируемости функции). *Если существует интеграл* $\int_a^b f(x)dx$*, то функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке интегрирования* $[a;b]$.

Теорема (достаточное условие интегрируемости функции). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$*, то она интегрируема на этом отрезке.*

Свойства определенного интеграла (будем предполагать, что рассматриваемые ниже функции интегрируемы на отрезке $[a;b]$):

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Если подынтегральная функция $f(x) \equiv 1$, тогда $\int_a^b dx = b - a$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, c - const$.

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

6. Если существует $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, тогда существует $\int_a^b f(x)dx$, причем для любых a,b,c выполняется равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

7. Если $f(x) \geq 0$ для любого x из отрезка $[a;b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0, a < b$.

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ - любая первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$, тогда определенный интеграл от $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной на этом отрезке, то есть*:

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$ **- формула Ньютона-Лейбница.**

Примеры. Вычислить определенные интегралы: 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, 2) $\int_0^1 \left(6x^2 + 3\right)dx$.

*Решение.*1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos 0 - (-\cos\frac{\pi}{2}) = -1 - 0 = -1.$

2) $\int_0^1 \left(6x^2 + 3\right)dx = \left(2x^3 + 3x\right)\Big|_0^1 = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 - \left(2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0\right) = 5.$

Пусть для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ сделана подстановка (замена переменной) $x = \varphi(t)$. Если:

1. производная $x' = \varphi'(t)$ функции $x = \varphi(t)$ непрерывна для любого t из отрезка $[\alpha, \beta]$;

2. множеством значений функции $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ является отрезок $[a;b]$;

3. $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$,

тогда:

$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$ - **формула замены переменной в определенном интеграле.**

Пример. Вычислит определенный интеграл $\int\limits_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Сделаем замену переменной, пусть $\sqrt{x}=t$, тогда $x=t^2$ и $dx=d\left(t^2\right)=\left(t^2\right)'dt=2tdt$. В отличие от неопределенного интеграла в определенном надо пересчитать пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=\sqrt{0}=0$; если $x=9$, то $t=\sqrt{9}=3$. Тогда

$$\int\limits_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\limits_0^3 \frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_0^3 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\int\limits_0^3\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int\limits_0^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\left(t+\ln|t+1|\right)\Big|_0^3=2\left(3+\ln 4-(0+\ln 1)\right)=6+2\ln 4.$$

Теорема. *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a;b]$, *то имеет место формула*:

$\boxed{\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu}$ - **формула интегрирования по частям для определенного интеграла.**

Экономический смысл определенного интеграла. Пусть функция $z=f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени, тогда объем продукции u, произведенной за промежуток времени $[0;T]$ будет равен: $u=\int\limits_0^T f(t)dt$.

ТЕМА 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваемые вопросы:

1. Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися коэффициентами.
2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися коэффициентами.

Определение. Соотношение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0 \qquad (1),$$

связывающее переменную x, неизвестную функцию $y=f(x)$ и ее производные, называется *дифференциальным уравнением*. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной входящей в уравнение. *Решением дифференциального уравнения* называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Простейшее дифференциальное уравнение может иметь вид $y'=g(x)$, и его решением будет являться функция $y=\int g(x)dx+c, c-const$.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется соотношение вида

$$F\left(x, y, y'\right)=0 \text{ или } y'=f(x, y) \qquad (2).$$

Теорема (Коши: о существовании и единственности решения дифференциального уравнения). *Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная f_y' непрерывны в некоторой области D плоскости OXY, содержащей точку $\left(x_0; y_0\right)$, то найдется интервал $\left(x_0-\delta; x_0+\delta\right), \delta>0$, на котором существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию*

$$y\left(x_0\right)=y_0 \qquad (3).$$

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего условию (3) называется *задачей Коши,* а условие (3) называется *начальным условием*.

Определение. Функция $y=y\left(x,c\right), c-const$ называется *общим решением* дифференциального уравнения (2), если:

1. она является решением дифференциального уравнения (2) для любого значения произвольной постоянной c;
2. существует единственное значение $c=c_0$, такое, что $y=y\left(x,c_0\right)$ удовлетворяет начальному условию $y\left(x_0\right)=y_0$.

Определение. *Частным решением* дифференциального уравнения (2) называется решение, которое получено из общего при конкретном значении произвольной постоянной.

Часто общее решение дифференциального уравнения можно получить только в неявном виде $\Phi\left(x,y,c\right)=0$, тогда решение называют *общим интегралом* дифференциального уравнения (2).

Пример. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y'=2\sqrt{y}$ является функция $y=\left(x+c\right)^2, c\in R$; а частным, например $y=\left(x+2\right)^2$.

Определение. Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \qquad (4),$$

где $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$ - некоторые заданные функции, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

Если $N_1(y)\neq 0, M_2(x)\neq 0$, тогда разделив почленно уравнение (4) на выражение $N_1(y)\cdot M_2(x)$, получим:

$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$ - дифференциальное уравнение с разделенными переменными (при dx стоит функция, которая зависит только от x; при dy стоит функция, которая зависит только от y).

Перенесем одно из слагаемых в правую часть и проинтегрируем полученное равенство:

$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy+C$, где $C-const$. Полученное равенство называется **общим интегралом дифференциального уравнения (4).**

Пример. Решить дифференциальное уравнение $ydx-xdy=0$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Для того чтобы разделить переменные, разделим уравнение почленно на $x\cdot y$, получим:

$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$. Перенесем одно из слагаемых в правую часть и проинтегрируем:

$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|y|=\ln|x|+c, c\in R$ - общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

2. **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y'+p(x)y=f(x) \qquad (5),$$

где $p(x), f(x)$ - заданные функции, линейное относительно неизвестной функции и ее производной называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае - *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Рассмотрим **метод подстановки (метод Бернулли)** решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. Будем искать решение уравнения (5) в виде произведения двух функций: $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. Одну из этих функций можно выбрать произвольной, другая должна быть определена так, чтобы их произведение удовлетворяло линейному уравнению.

Подставим $y(x)=u(x)\cdot v(x)$ в уравнение (5), для этого вычислим $y'=u'\cdot v+v'\cdot u$. Тогда уравнение (5) принимает вид:

$u'\cdot v+v'\cdot u+p(x)uv=f(x)$.

В левой части сгруппируем второе и третье слагаемое и вынесем общий множитель за скобку:

$u'\cdot v+u\left(v'+p(x)v\right)=f(x)$.

Выберем одну из функций, например v, так чтобы уравнение имело простой вид, положим уравнение в скобке равным нулю, тогда уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = f(x). \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы $v' + p(x)v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x)v = 0, v' = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Big| \cdot dx \Rightarrow dv + p(x)vdx = 0 \Big| : v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Проинтегрируем уравнение:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx + C \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx + C \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx + C}, C \in R.$$

В качестве $v(x)$ возьмем любое частное решение, отличное от нуля, например, $v = e^{-\int p(x)dx}$. Подставив это выражение во второе уравнение системы, получим:

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Big| \cdot dx \Rightarrow du = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int du = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \Rightarrow u = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C, C \in R.$$

Так как $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, то $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C\right), C \in R$ - **общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.**

Пример. Решить уравнение $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Решение будем искать в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$. Подставим y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u' \cdot v + v' \cdot u - vu \cdot tgx = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow u' \cdot v + u\left(v' - v \cdot tgx\right) = \frac{1}{\cos x}.$$

Выражение в скобке приравниваем к нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v' - v \cdot tgx = 0, \\ u' \cdot v = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы:

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot tgx \Big| \cdot dx$$

$$dv = v \cdot tgxdx \Big| : v$$

$$\frac{dv}{v} = tgxdx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \ln|v| = -\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x}$$

Подставляем v во второе уравнение системы, получим:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow u' = 1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int du = \int dx \Rightarrow u = x + C, C \in R.$$

Следовательно, общим решением системы является функция $y = u \cdot v = (x + C) \cdot \frac{1}{\cos x}, C \in R$.

3. **Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Определение. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (6),$$

где $p, q \in R$, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Решение уравнения (6) будем искать в виде $y = e^{kx}, k \in R$. Подставим $y = e^{kx}$ в уравнение (6), для этого найдем y', y'': $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Получим:

$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$.

Так как $e^{kx} \neq 0$, то $k^2 + pk + q = 0$.

Квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется *характеристическим уравнением* уравнения (6). При его решении возможны три случая:

1. Дискриминант квадратного уравнения больше нуля, тогда квадратное уравнение имеет два различных действительных корня: k_1, k_2. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}, c_1, c_2 \in R$.
2. Дискриминант квадратного уравнения равен нулю, тогда квадратное уравнение имеет два равных корня: $k_1 = k_2 = k$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид: $y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}, c_1, c_2 \in R$.
3. Дискриминант квадратного уравнения меньше нуля, тогда квадратное уравнение имеет два комплексных корня: $k_1 = a + bi, k_2 = a - bi, i = \sqrt{-1}$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид: $y = e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right), c_1, c_2 \in R$.

Примеры. Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$. Найдем его корни: $D = 25 - 24 = 1, k_1 = \frac{5-1}{2} = 2, k_2 = \frac{5+1}{2} = 3$. Квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, значит, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in R$.

2) $y'' - 4y' + 4y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$. Найдем его корни: $D = 16 - 16 = 0, k_1 = k_2 = \frac{4}{2} = 2$. Квадратное уравнение имеет два равных действительных корня, значит, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, c_1, c_2 \in R$.

3) $y'' - 2y' + 5y = 0$. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$. Найдем его корни: $D = 4 - 20 = -16, \sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4\sqrt{-1} = 4i,\quad k_1 = \dfrac{2-4i}{2} = 1 - 2i$, $k_2 = \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$. Квадратное уравнение имеет два комплексных корня, где $a = 1, b = 2$, значит, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right), c_1, c_2 \in R$.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{7}$$

Теорема (о структуре общего решения уравнения (7)). *Общее решение уравнения (7) есть сумма общего решения соответствующего ему однородного* $\overline{y}$ *и частного решения* y_**:* $y = \overline{y} + y_*$.

Пусть правая часть уравнения (7) имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{8}$$

где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены степени n и m, соответственно, с действительными коэффициентами; $\alpha, \beta \in R$. Тогда уравнение (7) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.* Частное решение y_* такого уравнения находится методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим частные случаи функции (8):

1. $f(x) = P_n(x), \alpha = 0, \beta = 0$. Тогда частное решение y_* уравнения (7) будем искать в виде:

$$y_*(x) = \begin{cases} R_n(x), \textit{если нуль не является корнем характеристического уравнения}; \\ xR_n(x), \textit{если нуль является корнем характеристического уравнения кратности } 1; \\ x^2 R_n(x), \textit{если нуль является корнем характеристического уравнения кратности } 2, \end{cases}$$

где $R_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$ многочлен степени n, коэффициенты которого $A_i, i = \overline{0; n}$ подлежат определению. Подставляя y_*', y_*'' в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему из $(n+1)$ уравнения с $(n+1)$ неизвестным для определения коэффициентов $A_i, i = \overline{0; n}$.

2. $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),\ \beta = 0$. Тогда частное решение y_* уравнения (7) будем искать в виде:

$$y_*(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} R_n(x), \textit{если } \alpha \textit{ не является корнем характеристического уравнения}; \\ xe^{\alpha x} R_n(x), \textit{если } \alpha \textit{ является корнем характеристического уравнения кратности } 1; \\ x^2 e^{\alpha x} R_n(x), \textit{если } \alpha \textit{ является корнем характеристического уравнения кратности } 2. \end{cases}$$

3. $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$. Тогда частное решение y_* уравнения (7) будем искать в виде:

$$y_*(x)=\begin{cases} e^{\alpha x}\left(R_\nu(x)\cos\beta x+S_\nu(x)\sin\beta x\right), \text{если } \alpha\pm i\beta \text{ не являются корнями характеристического уравнения;}\\ xe^{\alpha x}\left(R_\nu(x)\cos\beta x+S_\nu(x)\sin\beta x\right), \text{если } \alpha\pm i\beta \text{ являются корнями характеристического уравнения,}\end{cases}$$

где $\nu=\max\{m,n\}$, коэффициенты многочленов $R_\nu(x), S_\nu(x)$ подлежат определению.

Примеры. 1) Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+5y'-6y=x$.

Решение. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y=\overline{y}+y_*$. Для того чтобы найти $\overline{y}$, надо решить однородное уравнение, соответствующее исходному.

$\overline{y}$: $y''+5y'-6y=0$. Найдем корни характеристического уравнения $k^2+5k-6=0$. $D=25+24=49, k_1=\dfrac{-5-7}{2}=-6, k_2=\dfrac{-5+7}{2}=1$. Квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, значит, общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид $\overline{y}=c_1e^{-6x}+c_2e^x, c_1,c_2\in R$.

Найдем частное решение исходного дифференциального уравнения y_*. В нашем случае $f(x)=x$ - многочлен первой степени, и нуль не является корнем характеристического уравнения, значит, y_* будем искать в виде $y_*=Ax+B$, где коэффициенты A,B подлежат определению. Для определения коэффициентов A,B найдем $y_*'=A, y_*''=0$ и подставим в уравнение $y''+5y'-6y=x$. Имеем:

$0+5A-6(Ax+B)=x$ или $-6Ax-6B+5A=x$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x & \begin{cases} -6A=1;\\ -6B+5A=0.\end{cases}\\ x^0 & \end{array}$$

Получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными, решая которую найдем $A=-\dfrac{1}{6}, B=-\dfrac{5}{36}$. Тогда $y_*=-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{5}{36}$.

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=\overline{y}+y_*=c_1e^{-6x}+c_2e^x-\frac{1}{6}x-\frac{5}{36}, c_1,c_2\in R.$$

2) Найти общий вид частного решения дифференциального уравнения $y''-2y'+y=xe^x$.

Решение. $y=\overline{y}+y_*$.

$\overline{y}: k^2-2k+1=0,$

$k_1=k_2=1\Rightarrow \overline{y}=c_1e^x+c_2xe^x, c_1,c_2\in R$

$y_*: f(x)=xe^x, \alpha=1$ - корень характеристического уравнения кратности два, значит, частное решение будем искать в виде: $y_*=x^2e^x\left(Ax+B\right)$, где коэффициенты A,B подлежат определению.

3) Найти общий вид частного решения дифференциального уравнения $y''+y=\sin x$.

Решение. $y=\overline{y}+y_*$.

$\overline{y}: k^2+1=0,$

$$k^2=-1, k_1=i, k_2=-i \Rightarrow \overline{y}=c_1\cos x+c_2\sin x, c_1, c_2 \in R$$

$y_*: f(x)=\sin x,\ \alpha \pm i\beta=\pm i$ - являются корнями характеристического уравнения, значит, частное решение будем искать в виде: $y_*=x\left(A\cos x+B\sin x\right)$, где коэффициенты A, B подлежат определению.

ТЕМА 9. РЯДЫ.

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие о числовом ряде и его сходимости.
2. Признаки сходимости положительных рядов.
3. Абсолютная и условная сходимость знакочередующихся рядов.
4. Степенной ряд, область сходимости степенного ряда.

1. **Понятие о числовом ряде и его сходимости.**

Определение. *Числовым рядом (рядом)* называется выражение вида

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ - действительные числа, образующие последовательность, которые называются *членами ряда*; a_n - *общий член ряда (* n *-ый)*.

Ряд (1) считается заданным, если известен общий член ряда a_n, выраженный как функция его номера n: $a_n=f(n)$.

Определение. Сумма первых n членов ряда (1) называется n*- ой частичной суммой ряда*, обозначается: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Определение. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ряда (1), то ряд (1) называется *сходящимся*, а S называется *суммой ряда*. Если предел не существует или равен бесконечности, то ряд (1) называется *расходящимся.*

Примеры. 1) Для ряда $0+0+\ldots=\sum\limits_{i=1}^{\infty}0$ общий член $a_n=0$, $S_n=0$. Тогда $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$, значит, исходный ряд сходится и его сумма $S=0$.

2) Для ряда $1+1+\ldots=\sum\limits_{i=1}^{\infty}1$ общий член $a_n=1$, $S_n=n$. Тогда $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$, значит, исходный ряд расходится.

Эталонные ряды.

1. **Ряд геометрической прогрессии.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots\to\begin{cases} сходится, если |q|<1, S=\dfrac{a}{1-q}; \\ расходится, если |q|\geq 1. \end{cases}$$

2. **Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле).**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots\to\begin{cases}\text{сходится, если } p>1;\\ \text{расходится, если } p\le 1.\end{cases}$$

Теорема (необходимый признак сходимости). *Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$ или равен бесконечности, то ряд (1) расходится.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+5} = 3 \ne 0$.

Замечание. Из того, что общий член ряда стремится к нулю нельзя сделать вывод о сходимости ряда. Существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. **Признаки сходимости положительных рядов.**

Ряд с неотрицательными членами называется *положительным.*

Теорема (признак сравнения). *Пусть даны два положительных ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. *Если, начиная с некоторого номера* n_0, *для всех* $n \ge n_0$ *выполняется неравенство* $u_n \le v_n$, *то:*

1. *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *тоже сходится;*
2. *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *тоже расходится.*

Теорема (предельный признак сравнения). *Пусть даны два положительных ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. *Если существует конечный отличный от нуля предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A \ne 0 \ne \infty$, *то ряды ведет себя одинаково, то есть сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема (признак Даламбера). *Пусть для положительного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, если* $q<1$;
2. *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, если* $q>1$;
3. *если* $q=1$, *то признак Даламбера ответ на вопрос о сходимости ряда не дает.*

Теорема (признак Коши). *Пусть для положительного ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, если* $q<1$*;*
2. *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, если* $q>1$*;*
3. *если* $q=1$*, то признак Коши ответ на вопрос о сходимости ряда не дает.*

Примеры. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{7n+1}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^4+5}$.

Решение. 1) Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ на сходимость применим признак Даламбера: $a_n = \frac{3^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1} = \frac{3\cdot 3^n}{n+1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3\cdot 3^n}{n+1} : \frac{3^n}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3\cdot 3^n}{n+1} \cdot \frac{n}{3^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3 > 1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ расходится.

2) Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{7n+1}\right)^n$ на сходимость применим признак Коши: $a_n = \left(\frac{2n}{7n+1}\right)^n$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{7n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{7n+1} = \frac{2}{7} < 1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{7n+1}\right)^n$ сходится.

3) Для исследования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^4+5}$ на сходимость применим предельный признак сравнения.

Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - это обобщенный гармонический ряд, для которого $p = 2 > 1$.

Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^4+5}$ со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^4+5}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\cdot n^2}{2n^4+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2}{2n^4+5}=\frac{1}{2}\neq 0\neq\infty,$$

следовательно, оба ряда ведут себя одинаково, то есть сходятся.

3. Абсолютная и условная сходимость знакочередующихся рядов.

Определение. Ряды, содержащие как положительные так и отрицательные члены называются *знакопеременными*.

Определение. Ряд вида

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n\geq 0, n=1,2,\ldots \qquad (2)$$

называется *знакочередующимся*.

Признак Лейбница (достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда). *Если члены знакочередующегося ряда (2) удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq\ldots>0$*, то есть последовательность абсолютных величин членов ряда не возрастает;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$*,*

то ряд (2) сходится, а его сумма не превосходит первого члена, то есть $S\leq a_1$.

Определение. Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов. Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Теорема. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$*, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Примеры. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n\left(n^2+1\right)}$.

Решение. 1) Исследуем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$ на абсолютную сходимость.

Для этого составим ряд из абсолютных величин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$. Сравним полученный ряд с расходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (обобщенный гармонический ряд, $p=\frac{1}{2}$):

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}:\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0\neq\infty$, значит, ряды ведут себя одинаково, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ расходится.

Исследуем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$ на условную сходимость. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) очевидно, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0 : 1 > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}} > \ldots$. Чтобы убедится, что последовательность a_n убывающая для любого n, составим непрерывную функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ и найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)' = \left((2x-1)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}} < 0\, npu\, x \geq 1.$$

Значит, функция $f(x)$ убывающая для $x \geq 1$, а последовательность $a_n = f(n)$ - убывающая для любого натурального n. Первое условие признака Лейбница выполнено.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$.

Условия признака Лейбница выполняются, значит, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$ сходится условно.

2) Исследуем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n^2+1)}$ на абсолютную сходимость.

Для этого составим ряд из абсолютных величин: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n^2+1)}$. Сравним полученный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (обобщенный гармонический ряд, $p = 2$):

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n^2+1)} : \frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+1} = 2 \neq 0 \neq \infty$, значит, ряды ведут себя одинаково, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n^2+1)}$ сходится. Следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n^2+1)}$ сходится абсолютно.

4. **Степенной ряд, область сходимости степенного ряда.**

Определение. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (3)$$

где $a_n, n = 0,1,2\ldots$; x_0, x - действительные числа, членами которого являются степенные функции, называется *степенным рядом* по степеням $(x - x_0)$, а числа $a_n, n = 0,1,2\ldots$ - *коэффициентами степенного ряда*.

Если переменной x придать определенное значение $x = x'$, то получим числовой ряд, который может сходится или расходится.

Определение. Если ряд (3) сходится при $x = x'$, то x' называется *точкой сходимости* степенного ряда. Множество всех точек сходимости степенного ряда называется *областью сходимости*.

При $x_0 = 0$ степенной ряд (3) принимает вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4).$$

Так как ряд (3) заменой $x - x_0 = X$ сводится к ряду (4), то в дальнейшем будем рассматривать степенной ряд (4).

Замечание. Степенной ряд (4) всегда сходится при $x = 0$.

Теорема (Абеля). *Если степенной ряд (4) сходится при $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$, то есть для всех $x \in \left(-|x_1|;|x_1|\right)$.*

Следствие. Если степенной ряд (4) расходится при $x = x_2$, то он расходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_2|$, то есть для всех $x \in \left(-\infty;-|x_2|\right) \cup \left(|x_2|;+\infty\right)$.

Вывод. Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд (4) сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд будет сходится для любого $x \in (-R;R)$ и расходится для любого $x \in (-\infty;-R) \cup (R;+\infty)$. При $x = \pm R$ степенной ряд (4) может как сходится так и расходится.

Определение. Неотрицательное число R, такое что степенной ряд (4) сходится в интервале $(-R;R)$ и расходится при $|x| > R$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда (4), а интервал $(-R;R)$ называется *интервалом сходимости*.

Если ряд (4) сходится только при $x = 0$, то радиус сходимости $R = 0$; если ряд (4) сходится для любого действительного x, то радиус сходимости $R = \infty$.

Замечание. При $x = \pm R$ сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Применяя признаки Даламбера и Коши к степенному ряду (4), можно получить следующие формулы для нахождения радиуса сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (5)$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (6)$$

Замечание. 1. Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет вид: $|x - x_0| < R$, то есть $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$.

2. Если задан неполный степенной ряд, то есть ряд содержит не все степени x, то интервал сходимости находится без определения радиуса сходимости R, а с помощью применения достаточных признаков сходимости для абсолютных величин данного ряда.

Примеры. Найти области сходимости степенных рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$; 2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Решение. 1. Для заданного степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$ коэффициент $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}, x_0=-2$. Найдем радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2}{n}=2,$$

тогда интервал сходимости имеет вид: $-2|x+2|<2\Rightarrow -2<x+2<2\Rightarrow -4<x<0$, то есть исходный ряд сходится абсолютно для $x\in(-4;0)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, то есть при $x=-4$ и $x=0$.

1) $x=-4$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n}$. Полученный ряд сходится условно по признаку Лейбница.

2) $x=0$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(0+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n}$. Полученный ряд расходится, так как это гармонический ряд.

Значит, областью сходимости исходного ряда является промежуток: $x\in[-4;0)$.

2. Данный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ является неполным степенным рядом. Составим ряд из модулей и применим признак Даламбера.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|x^{2n-1}\right|}{2n-1},\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\left|x^{2(n+1)-1}\right|}{\left|x^{2n-1}\right|\left(2(n+1)-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\left|x^{2n+1}\right|}{\left|x^{2n-1}\right|(2n+1)}=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2.$$

Если $x^2<1$, то есть $x\in(-1;1)$, то исходный ряд сходится абсолютно.

Если $x^2>1$, то есть $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то исходный ряд расходится.

При $x=1$ и $x=-1$ необходимы дополнительные исследования.

1) $x=1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1^{2n-1}}{2n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$. Полученный ряд сходится по признаку Лейбница.

2) $x=-1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1-1}\cdot(-1)^{2n}}{2n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$. Полученный ряд сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ является отрезок: $-1 \le x \le 1$.

Рекомендуемая литература

1. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера.- М.:ЮНИТИ, 1998. – 472 с.
2. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричкова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: ТетраСистемс, 1999. – 640 с.
3. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2000. – 396 с.
4. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФА –М, 1997. – 464 с.
5. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФА –М, 2001. -575 с.
6. Руководство к решению задач по высшей математике / Под ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1989. Ч. 1. – 350 с.; Ч.2. -1990. – 400 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Дворниченко Александр Валерьевич
Макарук Светлана Федоровна

Конспект лекций по высшей математике

для студентов экономических специальностей
первого курса заочной формы обучения

Редактор: Т.В. Строкач
Ответственный за выпуск: С.Ф. Макарук
Корректор: Е.В. Никитчик

Подписано в печать ___.___.___ г. Формат 60x84/16. Бумага писчая № 1.
Усл. п. л. __.___. Уч. изд. л. __.__. Заказ № ____. Тираж ____ экз.

Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017. Брест, ул. Московская, 267.