**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

**по курсу *«Математика»***

для студентов факультета
электронно-информационных систем

## *Интегральное исчисление функции одной переменной*

II семестр

Брест 2016

**УДК 517.3 (076)**

Настоящие рекомендации содержат задачи и упражнения из раздела «Интегральное исчисление функции одной переменной». Представлены краткие теоретические сведения по темам и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ. Рекомендации составлены в соответствии с действующей программой для студентов первого курса факультета электронно-информационных систем.

**Составители:** **Жук А.И.**, к.ф.-м.н.
**Каримова Т.И.**, доцент, к.ф.-м.н.
**Лебедь С.Ф.**, доцент, к.ф.-м.н.
**Гладкий И.И.**, доцент
**Рубанов В.С.**, доцент, к.ф.-м.н.

**Рецензент:** **Мирская Е.И.**, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## *1. Комплексные числа. Различные формы их записи. Действия над комплексными числами*

*Комплексным числом* называется упорядоченная пара $(a, b)$ действительных чисел.

*Алгебраическая форма* записи комплексного числа имеет вид $z = a + i \cdot b$ $(z = a + b \cdot i)$, где $a, b$ – действительные числа, $i$ - мнимая единица, для которой $i \cdot i = i^2 = -1$. Число $a$ называется действительной частью комплексного числа и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа $z$.

*Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел*, заданных в алгебраической форме, выполняются по правилам сложения, вычитания и умножения двучленов вида $a + bi$, учитывая, что $i^2 = -1$. *Деление* выполняется по формуле $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$, где $\bar{z}_2 = a_2 - i\,b_2$ – комплексное число, *сопряженное* числу $z_2 = a_2 + i\,b_2$.

Геометрически комплексное число $z = a + i \cdot b$ изображается точкой $M\,(a, b)$ на координатной плоскости.

*Тригонометрическая форма* записи комплексного числа $z = a + i \cdot b$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль числа $z$, $\varphi = \arg z$ – его аргумент, который определяется величиной угла между положительным направлением оси $Ox$ и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет ведется по часовой стрелке. Величина угла определяется по формулам $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi \le \varphi < \pi)$.

Пусть заданы числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Действия над комплексными числами в тригонометрической форме* определяются формулами:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right); \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right);$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \ n \in \mathbb{N};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \ k = \overline{0, n-1}.$$

*Показательная форма* записи комплексного числа имеет вид $z = r\,e^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – формула Эйлера.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

$z^n = r^n\, e^{in\varphi}$; $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\exp\left(i\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$.

## *Задания для аудиторной работы*

**1.** Найти значение выражения $\dfrac{(z_1+z_3)\cdot\bar{z}_2}{z_3}$, если $z_1=3+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1-2i$.

**2.** Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если: 1) $z=(2-i)^2\cdot(3+4i)$; 2) $z=i^8+\dfrac{5+i}{1-3i}$.

**3.** Вычислить:

1) $\dfrac{1+2i}{3-i}+(1-i)^2$; 2) $\dfrac{2+3i}{4-2i}+\dfrac{1-3i}{2i}$; 3) $i^2+i^3+i^4+i^5$.

**4.** Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме:

1) $z=2+2i$; 2) $z=-1+i\sqrt{3}$; 3) $z=-5i$; 4) $z=2$;

5) $z=1-i$; 6) $z=-3-2i$; 7) $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$.

**5.** Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|z|=2$; 2) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$; 3) $0\le \operatorname{Im} z<1{,}5$;

4) $\operatorname{Re} z>1$; 5) $|z|\le 1$; $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$.

**6.** Упростить выражения:

1) $\dfrac{i\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}}$; 2) $\dfrac{1}{\cos\dfrac{4\pi}{3}-i\sin\dfrac{4\pi}{3}}$; 3) $\dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}}{\cos\dfrac{13\pi}{12}-i\sin\dfrac{13\pi}{12}}$.

**7.** Вычислить:

1) $(-1+i)^{20}$; 2) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}$; 3) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4}+(1+i)^2(\sqrt{3}-i)$.

**8.** Вычислить: $\sqrt[3]{-1+i}$.

**9.** Решить уравнения: 1) $z^5+32=0$; 2) $z^8-1=0$.

## *Задания для индивидуальной работы*

**10.** Найти значение выражения

1) $(z_1+2z_2)z_3$, если $z_1=2+3i$, $z_2=3+2i$, $z_3=5-2i$;

2) $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, если $z_1=4+5i$, $z_2=1+i$, $z_3=7-9i$;

3) $\dfrac{z_1+2\bar{z}_2}{z_3}$, если $z_1=2+3i$, $z_2=3+2i$, $z_3=5-2i$;

4) $\dfrac{(\bar{z}_1+z_3)z_2}{z_3}$, если $z_1=3+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1-2i$;

5) $\dfrac{(z_1+2z_3)}{\overline{z}_2}$, если $z_1=2+3i,\ z_2=5+2i,\quad z_3=3-2i$;

6) $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{\overline{z}_2}$, если $z_1=4+5i,\ z_2=3-4i,\quad z_3=2+3i$.

**11.** Вычислить, представив результат в алгебраической форме:

1) $(1-2i)(2+i)^2+5i$;

2) $(2i-i^2)+(1+3i)^3$;

3) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$;

4) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$;

5) $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$;

6) $\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$;

7) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{11}+1}\right)^2$;

8) $\dfrac{(1+i)^8-1}{(1-i)^8+1}$.

**12.** Вычислить:

1) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{100}$;

2) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}+i^{54}+i^{64}+i^{74}+i^{84}$.

**13.** Доказать, что:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

3) $\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$.

**14.** Найти действительные решения уравнения:

$$12\big((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i)\big)=17+6i.$$

**15.** Решить систему уравнений $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6;\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

**16.** Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $-i$;

2) $4$;

3) $1-i\sqrt{3}$;

4) $3+3i$;

5) $\dfrac{1-i}{1+i}$;

6) $2-2i$;

7) $-\sqrt{3}+i$;

8) $-5i$;

9) $2+2\sqrt{3}i$;

10) $3-3i$;

11) $4i$;

12) $-1-i$;

13) $\sqrt{3}+i$;

14) $-4+4\sqrt{3}\,i$;

15) $3\sqrt{3}+3i$;

16) $2-2\sqrt{3}\,i$;

17) $-1+i$;

18) $\dfrac{1}{\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ}$.

**17.** Выполнить действия:

1) $(1+i)^8\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-6}$;

2) $\sqrt[4]{-1}$;

3) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$;

4) $\sqrt[3]{8+i}$;

5) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$;

6) $\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^4}{\left(\sin\dfrac{3\pi}{10}+i\cos\dfrac{7\pi}{10}\right)^2}$.

**18.** Решить уравнения:

1) $z^2+2z+5=0$; 2) $(z+1)^4-16=0$;

3) $z^4+1=0$; 4) $z^6-1=0$;

5) $z^4-16=0$; 6) $z^6+64=0$;

7) $z^4-z^3+2z^2-z+1=0$; 8) $z^8-17z^4+16=0$;

8) $z^2-(2i-5)z+5-5i=0$; 9) $z^2-(5+3i)z+(10+5i)=0$;

10) $z^2-(3-2i)z+5-i=0$; 11) $z^2-(3+2i)z+(5+i)=0$;

12) $z^2-(1-2i)z+(1+5i)=0$; 13) $z^2-(5-3i)z+(10-5i)=0$.

**19.** Вычислить значение выражения, зная, что $z+z^{-1}=1$.

1) $z^{158}+z^{152}+2z^{-122}$; 2) $z^{158}+z^{140}+2z^{-98}$;

3) $z^{152}+z^{146}+2z^{-122}$; 4) $z^{164}+z^{158}+2z^{-122}$.

**20.** Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\begin{cases} 1 \le z\cdot\bar{z} \le 2; \\ -\sqrt{3} \le \operatorname{Im} z \le 0; \end{cases}$ 2) $|z-i|=|z+2|$; 3) $\begin{cases} |z-i|<1; \quad \arg z \ge \dfrac{\pi}{4}; \\ \arg(z+1-i) \ge \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

**21.** Вычислить суммы: $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi$; $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$.

*Ответы:* **10.** 1) $54+19i$; 2) $40-32i$. **12.** 1) –1; 2) 1.

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### *2. Простейшие методы интегрирования*

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,\ b)$.

*Теорема.* Для любой непрерывной на интервале $(a,\ b)$ функции $f(x)$ существует бесконечное множество первообразных, причем любые две из них $F_1(x)$ и $F_2(x)$ отличаются друг от друга лишь постоянным слагаемым, т.е. $F_2(x)=F_1(x)+C,\ C=const$.

Множество всех первообразных функций $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \text{ где } C=const.$$

Нахождение неопределенного интеграла функции $f(x)$ называется *интегрированием* данной функции. Эта операция является обратной дифференцированию.

*Основные правила интегрирования*

1. $\int C\,f(x)dx=C\int f(x)dx,\ C=const$.

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, а $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

*Таблица интегралов*

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1;$  2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$  4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$  6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$  8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C;$  10) $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C;$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$  12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C;$

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C;$  14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$

15) $\int chx\, dx = shx + C;$  16) $\int shx\, dx = chx + C;$

17) $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$  18) $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C, \quad x \neq 0.$

Из основного правила 3) вытекает, что все интегральные формулы таблицы интегралов остаются справедливыми, если в них вместо переменной $x$ подставить некоторую дифференцируемую функцию $\varphi(x)$. При этом для сведения рассматриваемого интеграла к табличному интегралу иногда достаточно представить $dx$ по одной из формул: $dx = d(x+a)$ или $dx = \dfrac{1}{a} d(ax+b)$.

*Простейшие методы интегрирования* включают в себя нахождение неопределенных интегралов с помощью основных правил интегрирования и таблицы интегралов, интегрирование путем внесения производной под знак дифференциала.

***Пример 1***. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left( 4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + 1 \right) dx;$ 2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{16x^2 + 9}};$ 3) $\int \dfrac{dx}{(2x-1)^5};$

4) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$; 5) $\int \left(4x^3+1\right)\cos\left(x^4+x\right)dx$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

***Решение.***

1) Воспользуемся основными правилами 1), 2) и табличным интегралом $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C,\ \ a \neq -1$:

$$\int\left(4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+1\right)dx = 4\int x^3dx-2\int x^{\frac{2}{3}}dx+2\int x^{-3}dx+\int dx =$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+2\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+x+C = x^4-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}+x+C.$$

2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x)}{\sqrt{(4x)^2+3^2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\,4x+\sqrt{16x^2+9}\,|+C.$$

3) $$\int\frac{dx}{(2x-1)^5}dx=\int(2x-1)^{-5}dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{-5}d(2x-1)=$$

$$=-\frac{1}{8}(2x-1)^{-4}+C=-\frac{1}{8(2x-1)^4}+C.$$

4) $$\int\frac{dx}{\sin^2 6x}=\frac{1}{6}\int\frac{d(6x)}{\sin^2 6x}=-\frac{1}{6}ctg6x+C.$$

5) $$\int\left(4x^3+1\right)\cos\left(x^4+x\right)dx=\int\cos\left(x^4+x\right)d\left(x^4+x\right)=\sin\left(x^4+x\right)+C\ .$$

6) $$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

После выделения полного квадрата в знаменателе и поднесения под дифференциал воспользовались табличным интегралом $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.

*Ответ:* 1) $x^4-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{1}{x^2}+x+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln|\,4x+\sqrt{16x^2+9}\,|+C$; 3) $-\frac{1}{8(2x-1)^4}+C$; 4) $-\frac{1}{6}ctg6x+C$; 5) $\sin\left(x^4+x\right)+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

В следующих примерах будет применен метод внесения производной под знак дифференциала. Он основан на использовании формулы $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$, из которой в частности следует, что:

$xdx=\frac{1}{2}\left(x^2\right)'dx=\frac{1}{2}d\left(x^2\right)$; $x^2dx=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'dx=\frac{1}{3}d\left(x^3\right)$;

$\dfrac{dx}{x} = (\ln x)' dx = d(\ln x)$; $\cos x dx = (\sin x)' dx = d(\sin x)$;

$\sin x dx = -(\cos x)' dx = -d(\cos x)$; $e^x dx = \left(e^x\right)' dx = d\left(e^x\right)$;

$\dfrac{dx}{\cos^2 x} = (tgx)' dx = d(tgx)$; $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -(ctgx)' dx = -d(ctgx)$;

$\dfrac{dx}{1+x^2} = (arctgx)' dx = d(arctgx)$.

***Пример 2.*** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x^2\sqrt{4+x^3}dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$;

3) $\int \dfrac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$; 4) $\dfrac{x - arctgx}{1+x^2}dx$.

***Решение.***

1) $\int x^2\sqrt{4+x^3}dx = \dfrac{1}{3}\int \left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(4+x^3\right)' dx = \dfrac{1}{3}\int \left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4+x^3\right) =$

$$= \frac{2}{9}\left(4+x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3} + C.$$

2) $\int \dfrac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \int \dfrac{(\ln(x+1))' dx}{\ln(x+1)} = \int \dfrac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln(x+1)} = \ln\left|\ln(x+1)\right| + C$.

3) $\int \dfrac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}} = \int \dfrac{(\arcsin x)' dx}{\arcsin x} = \int \dfrac{d(\arcsin x)}{\arcsin x} = \ln\left|\arcsin x\right| + C$.

4) $\int \dfrac{x - arctgx}{1+x^2}dx = \int \dfrac{xdx}{1+x^2} - \int \dfrac{arctgx}{1+x^2}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \int arctgx\, d\left(arctgx\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}arctg^2 x + C.$$

*Ответ:* 1) $\dfrac{2}{9}\sqrt{\left(4+x^3\right)^3} + C$; 2) $\ln\left|\ln(x+1)\right| + C$; 3) $\ln\left|\arcsin x\right| + C$;

4) $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{1}{2}arctg^2 x + C$.

## *Задания для аудиторной работы*

**22.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{3}{x^4}\right)dx$; 2) $\int \left((1-2x)^2 + 2^x \cdot e^x\right)dx$;

3) $\int\left(3\sin x - 2^x\cdot 3^{2x} + \frac{3}{9+x^2}\right)dx$; 4) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$;

5) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$; 6) $\int\frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{5^x}dx$;

7) $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 8) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$;

9) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$; 10) $\int\frac{dx}{x^2-9}$;

11) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$; 12) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

**23.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x+5}$; 2) $\int\sqrt{x+15}\,dx$;

3) $\int\frac{1}{2x+3}dx$; 4) $\int\left(2\sin(1-6x)+5e^{7x+6}\right)dx$;

5) $\int\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx$; 6) $\int 2x\sqrt{x^2+8}\,dx$;

7) $\int\frac{x^4}{\sqrt{4+x^5}}dx$; 8) $\int\frac{(arctg\,x)^2}{1+x^2}dx$;

9) $\int e^x\sin e^x\,dx$; 10) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

11) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$; 12) $\int\frac{dx}{x^2+4x+13}$;

13) $\int\frac{3x-1}{x^2+9}dx$; 14) $\int\frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx$;

15) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$; 16) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$.

**24.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{x}{x+9}dx$; 2) $\int\frac{3x-1}{x-2}dx$;

3) $\int\frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$; 4) $\int\frac{x^4}{1-x}dx$.

### *Задания для индивидуальной работы*

**25.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\left(a+bx^3\right)dx$; 2) $\int\left(6x^2+8x+3\right)dx$;

3) $\int\left(2\sqrt{x^5}-\frac{8}{x^3}+\frac{4x}{\sqrt{x^3}}\right)dx$; 4) $\int\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^2+7}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2-10}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$;

9) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{5x^2+4}} - \frac{1}{3x^2-4}\right)dx$; 10) $\int \left(\frac{6}{(2+4x)^{13}} - 5(3x+1)^{15}\right)dx$;

11) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$; 12) $\int ctg^2 x\,dx$.

**26.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(\frac{6}{(2+4x)^6} - 5(3x+7)^7\right)dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$;

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$; 4) $\int x\sin\left(2x^2-5\right)dx$;

5) $\int x^2 e^{x^3}dx$; 6) $\int \left(\frac{1}{7x^2-8} + \frac{1}{\sqrt{7-5x^2}}\right)dx$;

7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx$; 8) $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$;

9) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$; 10) $\int \frac{e^x}{2e^x-1}dx$;

11) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$; 12) $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

13) $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$; 14) $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$.

**27.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \left(2\sqrt{x^9} - \frac{10}{x^6} + \frac{4x^4}{\sqrt{x^3}}\right)dx$; 2) $\int \left(9\sqrt{x^5} - \frac{1}{2x} - \frac{8\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$;

3) $\int \left(2\sqrt{x^5} - \frac{5}{x^4} + \frac{7x}{\sqrt{x^3}}\right)dx$; 4) $\int \left(4\sqrt{x^3} - \frac{5}{x^3} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^3}}\right)dx$;

5) $\int \left(\frac{7}{\sqrt{4x^2+4}} - \frac{1}{3x^2+18}\right)dx$; 6) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-2x^2}} + \frac{1}{2x^2-4}\right)dx$;

7) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{2x^2+4}} - \frac{1}{3x^2+4}\right)dx$; 8) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{3x^2+1}\right)dx$;

9) $\int \left(\frac{7}{(2+8x)^{13}} + (4-5x)^{10}\right)dx$; 10) $\int \left(\frac{1}{(2x-1)^5} - (3x+4)^{10}\right)dx$;

11) $\int\left(\frac{6}{(7x-11)^{13}}+(5x+3)^9\right)dx$;

12) $\int\left(\frac{2}{(8+3x)^{15}}-(8x+7)^{20}\right)dx$;

13) $\int\left(2\sin(1-6x)+4e^{3+5x}\right)dx$;

14) $\int\left(2\sin(1-8x)+6e^{3+4x}\right)dx$;

15) $\int\left(2\cos(8-4x)+6e^{3-7x}\right)dx$;

16) $\int\sin x\cos^2 x\,dx$;

17) $\int\sqrt{\sin x}\cos x\,dx$;

18) $\int tgx\,dx$;

19) $\int\sin x\cos^{-2} x\,dx$;

20) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$;

21) $\int\frac{x-\sqrt{arctg 2x}}{1+4x^2}dx$;

22) $\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$;

23) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

24) $\int\frac{dx}{\sin^2(1-3x)}$;

25) $\int\frac{dx}{\cos^2(3x+2)}$;

26) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5+x^4}}$;

27) $\int\frac{tg^4x+1}{\cos^2 x}dx$;

28) $\int\frac{2x-5\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

29) $\int\frac{e^{3x}}{e^{6x}+25}dx$;

30) $\int\frac{arctg^3 4x}{1+16x^2}dx$;

31) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{7+x^3}}$;

32) $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx$;

33) $\int\sqrt{\arcsin 2x}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

34) $\int\frac{x^4dx}{x^{10}+8}$;

35) $\int\frac{2x-5arctg^2x}{1+x^2}dx$;

36) $\int\arcsin^3 2x\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

### *3. Замена переменной в неопределенном интеграле*

Если в неопределенном интеграле подынтегральное выражение $f(x)dx$ имеет вид $g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$, то, положив $\varphi(x)=t$, приведем интеграл к виду

$$\int f(x)dx=\int g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx=\int g(t)dt.$$

Пусть $F(t)$ – первообразная функции $g(t)$, тогда $\int g(t)dt=F(t)+C$, а

$$\int f(x)dx=F(\varphi(x))+C.$$

Рассмотренная выше операция внесения производной $\varphi'(x)$ под знак дифференциала в интеграле $\int g\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$ эквивалентна замене переменной $\varphi(x)=t$.

***Пример 3***. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$; 2) $\int (1+\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x\,dx$;

3) $\int \dfrac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$; 4) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

***Решение.***

1) $$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=t \\ t^2 = x-1 \\ x = t^2+1 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = 2\int \left(t^2+1\right)t^2\,dt = 2\int \left(t^4+t^2\right)dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{15}t^3\left(3t^2+5\right) + C = \frac{2}{15}\sqrt{(x-1)^3}\,(3x+2) + C.$$

2) $$\int (1+\sin x)^{\frac{1}{3}}\cos x\,dx = \int (1+\sin x)^{\frac{1}{3}}\,d\left(1+\sin x\right) =$$

$$= \int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(1+\sin x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

3) $$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x+1 = t^4 \\ x = t^4-1 \\ dx = 4t^3dt \end{array}\right] = \int \frac{t+2}{t^2}4t^3dt = 4\int \left(t^2+2t\right)dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 + 4t^2 + C = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} + 4\sqrt{x+1} + C.$$

4) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = a\sin t \;\Rightarrow\; \sin t = \dfrac{x}{a} \\ dx = a\cos t\,dt; \\ t = \arcsin\dfrac{x}{a};\;\; \cos t = \sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} \end{array}\right] =$$

$$= a\int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(t + \sin t\cos t\right) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

*Ответ:* 1) $\dfrac{2}{15}\sqrt{(x-1)^3}\,(3x+2)+C$; 2) $\dfrac{3}{4}(1+\sin x)^{\frac{4}{3}}+C$;

3) $\dfrac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{4}} + 4\sqrt{x+1}+C$; 4) $\dfrac{1}{2}\left(a^2\arcsin\dfrac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$.

Рассмотрим применение замены переменной при интегрировании некоторых функций, *содержащих квадратный трехчлен.*

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ квадратный трехчлен в знаменателе подынтегральной функции записывают в виде:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a},$$

то есть выделяют полный квадрат. Затем делают замену переменной $x+\frac{b}{2a}=t$, $x=t-\frac{b}{2a}$, $dx=dt$.

***Пример 4.*** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$;  2) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$.

***Решение.***

1) $$\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}=$$

$$=\begin{bmatrix} x+\frac{1}{2}=t, & x=t-\frac{1}{2} \\ dx=dt & \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{9}{4}}dt.$$

Разобьем полученный интеграл на сумму (алгебраическую) двух интегралов. Первый интеграл найдем внесением производной под знак дифференциала, а второй интеграл – табличный.

$$\frac{1}{2}\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{9}{4}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{tdt}{t^2+\frac{9}{4}}-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\left(\int \frac{d\left(t^2+\frac{9}{4}\right)}{t^2+\frac{9}{4}}-\int \frac{dt}{t^2+\frac{9}{4}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left(t^2+\frac{9}{4}\right)-\frac{2}{3}arctg\frac{2t}{3}\right)+C=\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3}+C.$$

2) $$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\int \frac{3x-1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}dx=\begin{bmatrix} x-2=t, & x=t+2 \\ dx=dt & \end{bmatrix}=$$

$$=\int \frac{3t+5}{\sqrt{t^2+4}}dt=3\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}+5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+4\right)}{\sqrt{t^2+4}}+5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=$$

$$=3\sqrt{t^2+4}+5\ln|t+\sqrt{t^2+4}|+C=3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C.$$

*Ответ:* 1) $\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{6}arctg\frac{2x+1}{3}+C$;

2) $3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C$.

Для нахождения интегралов вида $\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ применяют замену вида $\frac{1}{x-a}=t.$

***Задания для аудиторной работы***

**28.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

**29.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{(x-1)^2-9}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; 3) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

4) $\int \frac{(x+2)dx}{2x^2+6x+4}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

7) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{2x^2+4x+6}}$; 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; 9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

***Задания для индивидуальной работы***

**30.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int e^{\sqrt{4-3x}}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$; 3) $\int x(2x+5)^{10}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; 6) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+3}{\sqrt{x+1}}dx$.

**31.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{1-4x}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 3) $\int x\left(5x^2-3\right)^7dx$;

4) $\int x\sqrt{1-2x}dx$; 5) $\int \frac{dx}{e^x+1}$; 6) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$; 8) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}$; 9) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$;

**32.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int e^{\sqrt{5+x}}\frac{dx}{\sqrt{5+x}}$; 2) $\int e^{\sqrt{4-3x}}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; 3) $\int \sin\sqrt{3x+4}\frac{dx}{\sqrt{4+3x}}$;

4) $\int \cos\sqrt{3-5x}\frac{dx}{\sqrt{3-5x}}$; 5) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{3-x}}$; 6) $\int x\sqrt{6-7x}dx$;

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$; 8) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2x-1}{\sqrt{x}}dx$; 9) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}}}dx$.

**33.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2-8x-9}$; 2) $\int \frac{xdx}{x^2+6x+5}$; 3) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+6x+13}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; 5) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{2x^2+8x+10}}$; 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$.

**34.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$; 2) $\int \frac{(x-1)dx}{4x^2+6x+4}$ 3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+5}}$;

4) $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{2x^2-2x+3}}$; 5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$; 6) $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+1}}$.

**35.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{2x^2+6x+4}$; 2) $\int \frac{xdx}{x^2+6x+14}$; 3) $\int \frac{xdx}{2x^2+4x+9}$;

4) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}$; 5) $\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x+4}}$; 6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8x+5}}$;

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+1}}$; 8) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-3x^2}}$; 9) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$.

*Ответы:* **28.** 3) $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|+C$;

5) $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$. **29.** 8) $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$.

**31.** 6) $2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C$; 7) $2arctg\sqrt{e^x-1}+C$;

8) $\ln x-\ln 2\,\ln\left|\ln x+2\ln 2\right|+C$; 9) $\frac{2}{3}\left(e^x-2\right)\sqrt{e^x+1}+C$.

## *4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле*

*Метод интегрирования по частям* основан на использовании формулы

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x) \text{ или } \int udv=uv-\int vdu,$$

где $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение формулы целесообразно, когда под знаком интеграла имеется произведение функций разных классов. В некоторых случаях формулу интегрирования по частям приходится применять несколько раз.

***Пример 5.*** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \ln x dx$; 2) $\int (2x+1)\cos 3x dx$;

3) $\int 2x arctgx dx$; 4) $\int x^2 \sin x dx$.

***Решение.***

1) $$\int \ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} =$$

$$x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

2) $$\int (2x+1)\cos 3x dx = \begin{bmatrix} u=2x+1, & du=2dx \\ dv=\cos 3x dx, & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2x+1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x dx = \frac{2x+1}{3}\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

3) $$\int 2x arctgx dx = \begin{bmatrix} u=arctgx, & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=2xdx, & v=x^2 \end{bmatrix} = x^2 arctgx - \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2 arctgx - \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx = x^2 arctgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x^2 arctgx - x + arctgx + C.$$

4) $$\int x^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=\sin x dx, & v=-\cos x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x \end{bmatrix} = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

*Ответ:* 1) $x(\ln x - 1) + C$; 2) $\dfrac{2x+1}{3}\sin 3x + \dfrac{2}{9}\cos 3x + C$;

3) $x^2 arctgx - x + arctgx + C$; 4) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

## *Задания для аудиторной работы*

**36.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\cos 3x\, dx$; 2) $\int \arccos x dx$; 3) $\int (1-3x)\ln(4x) dx$;

4) $\int \left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x} dx$; 5) $\int \ln^2 x\, dx$; 6) $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$;

7) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; 8) $\int \sin(\ln x)\,dx$; 9) $\int e^{x}\sin x\,dx$;

10) $\int \sqrt{x^2+169}\,dx$; 11) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}\,dx$.

## *Задания для индивидуальной работы*

**37.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x e^{-7x}dx$; 6) $\int \ln(x-3)\,dx$ 3) $\int x\,arctg\,2x\,dx$;

4) $\int (x^2-4)\cos x\,dx$; 5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; 6) $\int \cos(\ln x)dx$.

**38.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$; 2) $\int x 2^{3x}dx$; 3) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$;

4) $\int x\arcsin x\,dx$; 5) $\int x^3 e^{-x^2}dx$; 6) $\int \frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx$;

7) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 8) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$; 9) $\int \ln^2 x\,dx$.

**39.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int (1-3x)\ln(4x)dx$; 2) $\int (2x+3)\cos 5x\,dx$; 3) $\int (1-x^2)\sin x\,dx$;

4) $\int x\ln(2x)dx$; 5) $\int x\ln(5x)dx$; 6) $\int \ln(1-2x)dx$;

7) $\int (x+1)\ln(2x)dx$; 8) $\int (3-x)\sin 4x\,dx$; 9) $\int (1-x)\cos 2x\,dx$;

10) $\int (x-2)\cos 3x\,dx$; 11) $\int x\sin 6x\,dx$; 12) $\int (3-x^2)\sin x\,dx$;

13) $\int (2-x^2)\sin x\,dx$; 14) $\int (x^2-4x)\cos x\,dx$; 15) $\int \arcsin x\,dx$;

16) $\int \arccos x\,dx$; 17) $\int (1-x)arctgx\,dx$; 18) $\int (x^2-4x+3)e^{-2x}dx$;

19) $\int (x^2+3)e^{-2x}dx$; 20) $\int (x^2-4)e^{3x}dx$; 21) $\int (x^2+3x+2)e^{-x}dx$.

*Ответы:* **36.** 1) $\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$; 2) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;
4) $-e^{-x}\left(x^2+5\right)+C$; 5) $x\ln^2 x-2x\ln+2x+C$; 6) $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|tg\frac{1-x}{2}\right|+C$;
7) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$. **38.** 5) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+C$;
6) $xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}arctg^2x+C$.

## *5. Интегрирование рациональных дробей*

*Рациональной функцией (рациональной дробью)* называется отношение двух многочленов, то есть дробь вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n$, $Q_m(x)$ – многочлен степени $m$.

Если $n \geq m$, то рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, называется *неправильной*, если $n < m$, то дробь называется *правильной*.

*Теорема.* Любая неправильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Например, рациональная дробь вида $\dfrac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^3 - 2x}$ является неправильной, так как степень числителя $(n = 5)$ больше степени знаменателя $(m = 3)$.

Делим многочлен числителя «уголком» на многочлен знаменателя. Тогда в частном получим многочлен $M(x)$, а в остатке многочлен $R(x)$.

$$\frac{x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 1}{x^3 - 2x} = x^2 - 3x + 7 - \frac{6x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x}.$$

*Простейшими рациональными функциями* называются рациональные дроби следующих видов:

1) $\dfrac{A}{x - a}$;

2) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, где $D = p^2 - 4q < 0$;

3) $\dfrac{A}{(x - a)^m}, m > 1, m \in N$;

4) $\dfrac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^m}$, где $D < 0, m > 1, m \in N$.

Рассмотрим интегрирование таких функций:

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x - a}dx = A\ln|x - a| + C$;

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x - a)^m}dx = A\int (x - a)^{-m}d(x - a) = \frac{A}{-m + 1}(x - a)^{-m+1} + C$;

3. $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}dx$ рассмотрен в п.3;

4. $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m}dx$ находят с помощью рекуррентной формулы (см. лекции или справочные пособия).

*Теорема*. Каждую правильную рациональную функцию $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно единственным образом представить в виде суммы простейших рациональных функций.

Знаменатель дроби $Q(x)$ раскладываем на множители, каждый из которых является либо степенью линейной функции $x-a$, либо степенью квадратичной функции $x^2+px+q$, не имеющей действительных корней. Например, знаменатель имеет следующее разложение:

$$Q(x)=(x-a)^k(x-b)(x^2+px+q)(x^2+px+q)^m,$$

тогда рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}+\frac{B}{x-b}+$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+px+q}+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\ldots+\frac{E_mx+F_m}{x^2+px+q},$$

где $A_1, A_2, ..., A_k, B, C, D, E_1, F_1, \ldots, E_m, F_m$ – действительные числа, которые надо определить.

Данное разложение предложено Лейбницем. Определим неизвестные коэффициенты (метод Иоганна Бернулли).

Полученные простейшие дроби приведем к общему знаменателю. В правой и левой части равенства получим две дроби, знаменатели которых равны $Q(x)$. Приравняем числители. Полученное равенство верно для любых $x$. Неизвестные коэффициенты найдем либо способом частных значений, либо приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, либо комбинируя оба способа.

***Пример 6***. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$.

***Решение.***

1) Знаменатель подынтегральной функции раскладываем на множители: $Q(x)=x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)=x(x-1)(x+2)$.

Каждый множитель станет знаменателем простейшей дроби.

$$\frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{2x^2-x+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Приравниваем числители первой и последней дробей:

$$2x^2-x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$$

Это равенство справедливо для любых $x\in\mathbb{R}$. Для определения неизвестных коэффициентов $A$, $B$ и $C$ применим метод частных значений: будем подставлять в полученное равенство корни знаменателя и находить значения коэффициентов $A$, $B$ и $C$.

Если $x=0$, то $3=A(-1)2$, значит $A=-\dfrac{3}{2}$.

Если $x=1$, то $2-1+3=3B$, значит $B=\frac{4}{3}$.

Если $x=-2$, то $8+2+3=C(-2)(-3)$, значит $C=\frac{13}{6}$.

Итак, получили разложение рациональной функции на простейшие дроби:

$$\int \frac{2x^2-x+3}{x^3+x^2-2x}dx=\int\left(-\frac{3}{2x}+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{6(x+2)}\right)dx=$$
$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{13}{6}\ln|x+2|+C.$$

2) Подынтегральную функцию $\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}$ представим в виде суммы пяти простейших дробей, так как каждый множитель в знаменателе дает столько дробей, какова его кратность.

$$\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}=$$
$$=\frac{\left(A+Bx+Cx^2\right)(x+1)^2+\left(D+E(x+1)\right)x^3}{x^3(x+1)^2}.$$

Приравняем числители полученных дробей:

$$x^2+4=\left(A+Bx+Cx^2\right)\left(x^2+2x+1\right)+\left(D+Ex+E\right)x^3;$$

$$x^2+4=\left(C+E\right)x^4+\left(B+2C+D+E\right)x^3+\left(A+2B+C\right)x^2+\left(B+2A\right)x+A.$$

Многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях $x$.

| | | |
|---|---|---|
| $x^4$: | $C+E=0,$ | $E=-C=-13.$ |
| $x^3$: | $B+2C+D+E=0,$ | $D=-B-2C-E=8-26+13=-5.$ |
| $x^2$: | $A+2B+C=1,$ | $C=1-A-2B=1-4+16=13.$ |
| $x^1$: | $B+2A=0,$ | $B=-2A=-8.$ |
| $x^0$: | $A=4.$ | $A=4.$ |

Получим следующее разложение:

$$\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}=\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^2}+\frac{13}{x}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{13}{x+1}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^2+4}{x^3(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^2}+\frac{13}{x}-\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{13}{x+1}\right)dx=$$
$$=-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x}+13\ln|x|+\frac{5}{x+1}-13\ln|x+1|+C.$$

3) Рассмотрим интеграл $\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$$2x^2-3x+1=A\left(x^2-x+1\right)+\left(Bx+C\right)(x+1)=$$

$$=\left(A+B\right)x^2+\left(-A+B+C\right)x+\left(A+C\right).$$

Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях переменной, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A$, $B$ и $C$.

$$\begin{cases}A+B=2,\\-A+B+C=-3,\\A+C=1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=2-A,\\C=1-A,\\-A+2-A+1-A=-3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=2-A,\\C=1-A,\\-3A=-6.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2,\\B=0,\\C=-1.\end{cases}$$

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\left(\frac{2dx}{x+1}-\frac{dx}{x^2-x+1}\right)=2\ln|x+1|-\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

*Ответ:* 1) $-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{13}{6}\ln|x+2|+C$;

2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{8}{x}+13\ln|x|+\frac{5}{x+1}-13\ln|x+1|+C$;

3) $2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

### *Задания для аудиторной работы*

**40.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{x-4}{x^2-5x+6}dx$;  2) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

3) $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;  4) $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)\left(x^3-7x^2+3x\right)}dx$;

5) $\int\frac{x^2}{x^4-1}dx$;  6) $\int\frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5}dx$;

7) $\int\frac{dx}{x^4+1}$;  8) $\int\frac{2x}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx$.

## *Задания для индивидуальной работы*

**41.** Представить рациональные дроби в виде суммы простейших дробей, не вычисляя коэффициентов.

1) $\dfrac{4x^3-2x^2+6x-1}{(x^2-1)^2}$; 2) $\dfrac{2x^2-7}{(x^3+16x)(x-3)}$;

3) $\dfrac{6x^2-3x+7}{(x+2)(x^2+4)^2}$; 4) $\dfrac{7x^3-10}{(x-1)^3(3x^2+x+7)}$;

5) $\dfrac{7x^3+x^2-4x+5}{(x^2-4)^2}$; 6) $\dfrac{3x^2-5x+7}{(x+2)(x^2+1)}$.

**42.** Представить рациональные дроби в виде суммы простейших дробей, не вычисляя коэффициентов.

1) $\dfrac{2x^2-4}{(x+1)^2(x+3)^3}$; 2) $\dfrac{4x^3-x^2+5x-1}{(x^2-4x+3)^2(x-5)}$;

3) $\dfrac{x^3+6x+5}{(2x^2+2x+5)(x-8)^2}$; 4) $\dfrac{x^3+9}{x^3-5x^2+6x}$;

5) $\dfrac{3x-11}{\left(x^3+4x\right)\left(x^2+8x+18\right)}$; 6) $\dfrac{2x^2-4x+6}{(x+2)^2\left(x^2-1\right)}$; 7) $\dfrac{3x+5}{x^4-x^2}$;

8) $\dfrac{4x+1}{(x-3)^2(x^2+2x+5)}$; 9) $\dfrac{2x^4+x^3+5}{(x-4)^3(x^2+5x+17)}$.

**43.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+x+4}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$;

3) $\displaystyle\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{4dx}{x\left(x^2+4\right)}$;

5) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx$; 6) $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

**44.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x^2+x-8}{x^3-4x}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{2x-3}{(x^2-1)(x+2)}dx$;

3) $\displaystyle\int\frac{2x^2+6x+7}{x^3-1}dx$; 4) $\displaystyle\int\frac{6x^2-12x+6}{(x-2)^3}dx$;

5) $\displaystyle\int\frac{2x^2+x+3}{x^3+2x^2-3x}dx$; 6) $\displaystyle\int\frac{3x+31}{\left(x^2+1\right)x}dx$;

7) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^3+2x^2+5x}dx$; 8) $\displaystyle\int\frac{3x^2-6x+7}{(x+1)^2(x-2)}dx$; 9) $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

*Ответы:* **40.** 2) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{7}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$; 3) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$; 4) $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$; 5) $\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$;

7) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C$; (в знаменателе подынтегрального выражения прибавить и вычесть $2x^2$).

8) $\frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$. **43.** 2) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|+C$;

4) $\ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|}+C$; 6) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

**44.** 9) $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+C$.

### *6. Интегрирование иррациональных функций*

Первообразные иррациональных функций являются элементарными функциями в сравнительно редких случаях.

Рассмотрим такие иррациональные функции, интегрирование которых сводится, с помощью определенной замены переменной, к интегрированию рациональных функций.

1. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[m]{x},\ldots,\sqrt[s]{x}\right)dx$,

где подынтегральная функция является рациональной функцией своих аргументов.

Замена $x=t^n$, где $n$ – наименьшее общее кратное всех показателей $k,m,\ldots,s$, приводит исходный интеграл к интегралу от рациональной функции переменной *t.*

2. В интегралах вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ используется замена $ax+b=t^n$.

3. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ вычисляются заменой $x=a\cos t$ или $x=a\sin t$.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ вычисляются с помощью замены $x=\frac{a}{\cos t}$ или $x=\frac{a}{\sin t}$.

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ можно вычислить с помощью замены $x=a\,tgt$ или $x=a\,ctgt$.

4. Рассмотрим интеграл: $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m,\ n,\ p$ – рациональные числа, $a,\ b$ – действительные числа. Подынтегральное выражение называется *дифференциальным биномом*. Интеграл от него сводится к интегралам от рациональных функций в трех случаях:

1) Если $p$ – целое, то выполняется подстановка $x=t^N$, где $N$ – общий знаменатель дробей $m$ и $n$.

2) Если $p$ не является целым числом, но $\frac{m+1}{n}$ – целое, то выполняется подстановка $a+bx^n=t^N$, где $N$ – знаменатель числа $p$.

3) Если числа $p$ и $\frac{m+1}{n}$ не являются целыми, но $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то выполняется подстановка $a+\frac{b}{x^n}=t^N$, где $N$ – знаменатель числа $p$.

Если ни одно из трех чисел $p$, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ не является целым числом, то по теореме Чебышева интегралы данного вида не могут быть выражены конечной комбинацией элементарных функций.

***Пример 7.*** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}$.

***Решение.***

1) $$\int\frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}=\begin{bmatrix}x=t^6, & dx=6t^5dt\\ \sqrt{x}=t^3, & \sqrt[3]{x}=t^2\end{bmatrix}=\int\frac{t^3\cdot 6t^5dt}{t^6-t^4}=6\int\frac{t^4}{t^2-1}dt,$$

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, поэтому выделим ее целую часть и остаток:

$$=6\int\frac{\left(t^4-1\right)+1}{t^2-1}dt=6\int\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2t^3+6t+3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

2) $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[6]{(x+1)^5}}=\begin{bmatrix}x+1=t^6, & dx=6t^5dt\\ \sqrt[6]{x+1}=t, & \sqrt[3]{x+1}=t^2\end{bmatrix}=\int\frac{\left(t^6-1\right)6t^5dt}{t^8-t^5}=$$

$$=6\int\frac{\left(t^6-1\right)t^5dt}{t^5\left(t^3-1\right)}=6\int\left(t^3+1\right)dt=6\left(\frac{t^4}{4}+t\right)+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}+C.$$

*Ответ:* 1) $2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$; 2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}+C$.

## *Задания для аудиторной работы*

**45.** Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$; 5) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$; 6) $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$; 8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 9) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$.

## *Задания для индивидуальной работы*

**46.** Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$; 2) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt[3]{x+2}}dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}-\sqrt[4]{4x-1}}$; 6) $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$.

**47.** Найти интегралы от иррациональных функций:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; 2) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x+\sqrt[3]{x^4}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$;

5) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$; 6) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$; 7) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2+\sqrt[3]{x+1}}+1}dx$.

**48.** Найти интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[12]{x^5}-\sqrt[3]{x}\right)}$;

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{x+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}-1}{(x+3)\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}dx$; 6) $\int \frac{dx}{2\sqrt[4]{x-4}+\sqrt{x-4}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+7}+\sqrt[3]{4x+7}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{8-x}+\sqrt{8-x}}$;

9) $\int \frac{dx}{3\sqrt[6]{3x-4}+\sqrt{3x-4}}$; 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}-9\sqrt[6]{2-5x}}$;

11) $\int \frac{\sqrt{2x-1}dx}{\sqrt{2x-1}+1}$; 12) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2dx$.

*Ответы:* **45.** 3) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{12}{5}\sqrt[12]{x^5}+\frac{12}{5}\ln|x^{\frac{5}{12}}-1|+C$;

4) $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}\right|+C$; 5) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$;

6) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}+C$. **47.** 1) $\frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}}-\ln|x^{\frac{3}{4}}+1|\right)+C$;

5) $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C$; 6) $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)\sqrt{x^2+2}+C$.

### *7. Интегрирование тригонометрических функций*

Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R$ – рациональная функция своих аргументов, с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=tg\frac{x}{2}$ сводится к интегралу от рациональной функции переменной $t$.

При этом, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

В ряде случаев для нахождения интеграла от тригонометрических функций удобны другие подстановки. Например, $t=tgx$, $t=ctgx$, $t=\sin x$, $t=\cos x$.

Отметим некоторые *частные случаи* применения таких подстановок.

1) Если $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то удобно использовать подстановку $t=\cos x$.

2) Если $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то можно использовать подстановку $t=\sin x$.

3) Если $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, можно использовать подстановку $t=tgx$.

4) В интегралах вида $\int\sin^{2m}x\cos^{2n}xdx\quad(m>0,n>0)$, подынтегральное выражение можно преобразовать с помощью формул понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

5) В интегралах вида $\int\sin mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $\int\cos mx\cos nxdx$ произведения тригонометрических функций можно заменить суммой, используя формулы:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right);$$
$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right);$$
$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right)$$

***Пример 8.*** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{ctg^6 3x}{\sin^2 3x}dx$; 2) $\int\sin^3 2x\cos^4 2xdx$; 3) $\int\sin^2 x\cos^2 xdx$; 4) $\int tg^5 dx$;

5) $\int\sin x\sin 3x\sin 2xdx$; 6) $\int\frac{dx}{2\sin x+3\cos x+5}$; 7) $\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

***Решение.***

1) $$\int\frac{ctg^6 3x}{\sin^2 3x}dx=\begin{bmatrix} t=ctg3x;\ dt=\dfrac{-3dx}{\sin^2 3x}\\ \dfrac{dx}{\sin^2 3x}=-\dfrac{dt}{3}\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\int t^6dt=-\frac{t^7}{21}+C=-\frac{ctg^7 3x}{21}+C.$$

2) $$\int\sin^3 2x\cos^4 2xdx=\int\sin^2 2x\cos^4 2x\sin 2xdx=$$
$$=\begin{bmatrix} t=\cos 2x\\ \sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}d\left(\cos 2x\right)=-\dfrac{1}{2}dt\\ \sin^2 2x=1-\cos^2 2x=1-t^2\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int\left(1-t^2\right)t^4dt=\frac{1}{2}\int\left(t^6-t^4\right)dt=$$
$$=\frac{t^7}{14}-\frac{t^5}{10}+C=\frac{\cos^7 2x}{14}-\frac{\cos^5 2x}{10}+C.$$

3) $$\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\int(dx-\cos 4xdx)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

4) $$\int tg^5dx=\begin{bmatrix} t=tgx;\ \ x=arctg\ t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{t^5dt}{1+t^2}=\int\frac{t^4}{1+t^2}tdt=\frac{1}{2}\int\frac{t^4}{1+t^2}d\left(t^2\right)=$$
$$=\left[t^2=z\right]=\frac{1}{2}\int\frac{z^2}{1+z}dz=\frac{1}{2}\int\frac{\left(z^2-1\right)+1}{z+1}dz=\frac{1}{2}\int\left(z-1+\frac{1}{z+1}\right)dz=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}-z+\ln|z+1|\right)+C=\frac{1}{4}\left(tg^4x-2tg^2x+2\ln\left(1+tg^2x\right)\right)+C.$$

5) $\int \sin x \sin 3x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\sin 2x dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x \sin 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \sin 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 4x dx - \frac{1}{4}\int (\sin 6x - \sin 2x) dx = -\frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

6) $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 5} = \left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array}\right] =$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\right)} = \int \frac{2dt}{4t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t+1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

7) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x\left(2 + ctg^2 x\right)} = \int \frac{d(ctgx)}{ctg^2 x + 2} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{ctgx}{\sqrt{2}} + C.$$

*Ответ:* 1) $-\frac{ctg^7 3x}{21} + C$; 2) $\frac{\cos^7 2x}{14} - \frac{\cos^5 2x}{10} + C$; 3) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$;
4) $\frac{1}{4}\left(tg^4 x - 2tg^2 x + 2\ln\left(1 + tg^2 x\right)\right) + C$; 5) $-\frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 2x}{8} + C$;
6) $\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{1 + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$; 7) $-\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{ctgx}{\sqrt{2}} + C$.

### ***Задания для аудиторной работы***

**49.** Найти интегралы от тригонометрических функций

1) $\int \frac{\sin x\, dx}{(1-\cos x)^2}$; 2) $\int \frac{\sin 4x\, dx}{\cos x}$; 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;

4) $\int \cos^4 2x\, dx$; 5) $\int tg^5 x\, dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}$;

7) $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$; 9) $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 1}$;

10) $\int \frac{dx}{16\sin^2 x + \cos^2 x}$; 11) $\int \frac{\cos x - 2\sin x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$; 12) $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$.

## *Задания для индивидуальной работы*

**50.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sin 8x}{16-\cos^2 8x}dx$;  2) $\int \sqrt[9]{\cos^7 x}\sin 2x dx$;

3) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^3 x}dx$;  4) $\int \sin^4 2x\cos^2 2x dx$;

5) $\int \cos^6 3x dx$;  6) $\int tg^2 5x dx$;

7) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{3}dx$;  8) $\int \frac{dx}{2+5\cos x}$;  9) $\int \frac{4\cos x}{\sin^2 x+5\sin x+6}dx$.

**51.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos^2 3x}dx$;  2) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4\sin^2 2x}}dx$;

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$;  4) $\int \sin^4 3x dx$;

5) $\int \cos^3 x\sin^{10} x dx$;  6) $\int \cos 3x\sin 6x\, dx$;

7) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$;  8) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$;

9) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$;  10) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

11) $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$;  12) $\int \sqrt{tgx}\,dx$.

**52.** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{tg^7 3x}{\cos^2 3x}dx$;  2) $\int \cos^4 5x\sin 5x\, dx$;

3) $\int \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$;  4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{tg^3 2x}\cos^2 2x}$;

5) $\int \sin^7 x\cos^5 x\, dx$;  6) $\int \sin 2x\cos^2 x\, dx$;

7) $\int \sqrt[7]{\cos^2 x}\sin^3 x\, dx$;  8) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

9) $\int \sin^4 x\cos^4 x\, dx$;  10) $\int \sin^4 3x\, dx$;

11) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx$;  12) $\int \frac{dx}{\cos^4 5x}$;

13) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;  14) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos x}$;

15) $\int \frac{\sin^4 3x}{\cos^2 3x} dx$; 16) $\int \sin 7x \sin x \, dx$;

17) $\int \sin x \cos 9x \, dx$; 18) $\int \cos 6x \cos 8x \, dx$;

19) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x}$; 20) $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x}$;

21) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 6\cos x}$; 22) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x + 6}$.

*Ответы:* **50.** 8) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|$; 9) $4\ln\left|\frac{t+3}{t+2}\right| + C$. **51.** 9) $\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{\sqrt{3}tgx}{\sqrt{5}} + C$;

10) $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 5}{tg\frac{x}{2} - 3}\right| + C$; 11) $\ln|tgx| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$;

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left(\sin x + \cos x - \sqrt{\sin 2x}\right) + \arcsin(\sin x - \cos x)\right) + C$.

### Варианты самостоятельной работы

*Вариант 1*

1) $\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$; 2) $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx$; 3) $\int \frac{\cos x \, dx}{7\sin^2 x + 4\cos^2 x}$.

*Вариант 2*

1) $\int \frac{x^2 - 72}{x^4 + x^3 - 12x^2} dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)}$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$.

*Вариант 3*

1) $\int \frac{3x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$; 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}}$; 3) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^2 x - 6\cos^2 x}$.

*Вариант 4*

1) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$; 2) $\int x\sqrt{x - 8} \, dx$; 3) $\int \frac{\sin^2 4x dx}{\cos^4 4x}$.

*Вариант 5*

1) $\int \frac{(4x - 19)dx}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$; 2) $\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+2}} dx$; 3) $\int tg^3 x \, dx$.

*Вариант 6*

1) $\int \frac{4x^2 + 9}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x} + \sqrt[4]{3x}}$; 3) $\int \cos^2 3x \cos 9x \, dx$.

## *8. Определенный интеграл, его свойства и вычисление*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разобьем этот отрезок с помощью системы точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на $n$ частичных отрезков. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ выберем произвольную точку $\xi_i$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ и составим так называемую *интегральную сумму* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$: $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Обозначим $\lambda = \max_i \{\Delta x_i\}$.

*Определенным интегралом* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} s_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то этот предел всегда существует независимо от разбиения отрезка на частичные отрезки длиной $\Delta x_i$ и выбора на них точек $\xi_i$.

Таким образом, функция, непрерывная на отрезке, *интегрируема* на нем.

### *Основные свойства определенного интеграла*

1) $\int_a^b \left(C_1 f_1(x) \pm C_2 f_2(x)\right)dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx \pm C_2\int_a^b f_2(x)dx$, где $C_1, C_2$ – константы.

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5) Если $f(x) \ge g(x)$ для всех $x$ из отрезка $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$. В частности, если $f(x) \ge 0$ $\left(f(x) \le 0\right)$ на отрезке $[a; b]$ то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$ $\left(\int_a^b f(x)dx \le 0\right)$.

6) Если подынтегральная функция интегрируема на отрезке $[a;b]$ и на этом отрезке функция ограничена, т.е справедливо неравенство $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

7) *Теорема о среднем.* Если подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $c \in [a;b]$, что справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

8) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то имеет место равенство $\Phi'(x) = f(x)$, т.е. производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена значением верхнего предела.

*Правила вычисления определенного интеграла.*

1. *Формула Ньютона – Лейбница.* Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ какая-либо первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. *Замена переменной в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем для любого $t \in [a,b]$ $\varphi(t) \in [a,b]$, причем $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

3. *Интегрирование по частям.* Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

4. Если функция $f(x)$ нечетная на отрезке $[-a;a]$, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$. Если $f(x)$ четная на отрезке $[-a;a]$, т.е. $f(-x)=f(x)$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

***Пример 9.*** Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_{1}^{8}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx$; 2) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 3) $\int\limits_{e}^{e^2} x\ln x dx$.

***Решение.***

1) $$\int\limits_{1}^{8}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)dx=\int\limits_{1}^{8}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)dx=\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x\right)\Bigg|_{1}^{8}=\left(\frac{3}{4}\cdot 2^4-8\right)-\left(\frac{3}{4}-1\right)=4,25.$$

Геометрически, полученный результат означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=1$, $x=8$, $y=0$, $y=\sqrt[3]{x}-1$, равна 4,25 ед$^2$.

2) $$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\begin{bmatrix} x=\sin t,\ dx=\cos t dt \\ t=\arcsin x \\ t_н=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \\ t_в=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 t dt}{\sin^2 t}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\left(-ctgt-t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+\left(ctg\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,161.$$

3) Применим теорему интегрирования по частям.

$$\int\limits_{e}^{e^2} x\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x,\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx,\ \ v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_{e}^{e^2}-\int\limits_{e}^{e^2}\frac{x^2dx}{2x}=$$

$$=\frac{e^4}{2}\cdot 2-\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{e}^{e^2}=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)\approx 39,10.$$

*Ответ:* 1) 4,25; 2) $1-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)$.

***Пример 10.*** Вычислить среднее значение функции $y=\dfrac{1}{2\cos x+3}$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

***Решение.*** Применим теорему о среднем: $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

$$f(c)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos x+3}=\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=t,\ \ x=2arctg\ t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_в=tg\frac{\pi}{4}=1,\ \ t_н=tg0=0\end{array}\right]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+5}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{\pi\sqrt{5}}arctg\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}2394.$$

*Ответ:* $\dfrac{4}{\pi\sqrt{5}}arctg\dfrac{\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}2394$.

### *Задания для аудиторной работы*

**53.** Вычислить определенные интегралы:

1) $\int\limits_1^2\left(2x^2+\dfrac{2}{x^4}\right)dx$; 2) $\int\limits_0^1\sqrt{1+x}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{16}\dfrac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

4) $\int\limits_1^{e^3}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 5) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$; 6) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$;

7) $\int\limits_0^4\dfrac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 8) $\int\limits_0^{\pi/2}x\cos x\,dx$; 12) $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)dx$;

13) $\int\limits_1^3\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 14) $\int\limits_3^4\dfrac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx$; 15) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\dfrac{xdx}{\cos^2 x}$.

**54.** Найти среднее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{1+2\sin^2 x}$ на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

**55.** Исследовать на экстремум функцию $F(x)=\int\limits_0^x(t-1)(t-2)^2dt,\ \ x\in\mathbb{R}$.

## *Задания для индивидуальной работы*

**56.** Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; 3) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

4) $\int_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$; 5) $\int_2^3 y\ln(y-1)dy$; 6) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$; 8) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 9) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2xdx$;

10) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$; 11) $\int_0^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

**57.** Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$; 2) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; 3) $\int_2^3 \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;

4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ar\cos 2xdx$; 5) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$; 6) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$;

7) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$; 8) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$; 9) $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$;

10) $\int_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}dx$; 11) $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$; 12) $\int_0^{\pi} x^2\sin xdx$;

13) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx$; 14) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$; 15) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)^3}}$.

**58.** Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$; 2) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$; 3) $\int_0^1 3x^2\left(1+e^{x^3}\right)dx$;

4) $\int\limits_{1{,}5}^{2} arctg\left(2x-3\right)dx$; 5) $\int\limits_{2}^{3}\frac{\left(x+2\right)dx}{x^2\left(x-1\right)}$; 6) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{xdx}{\sin^2 x}$;

7) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}dx$; 8) $\int\limits_{2\sqrt{3}}^{2\sqrt{8}}\frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 9) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(x+2\right)\cos\frac{x}{2}dx$.

**59.** Найти среднее значение функции $f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a;\ b\right]$:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{25+3x}}$, $a=-3, b=0$; 2) $f\left(x\right)=xe^{-x}$, $a=0,\ b=1$;

3) $f(x)=\frac{\sin\left(\ln x\right)}{x}$, $a=1, b=e$; 4) $f\left(x\right)=(x-1)\ln x$, $a=1,\ b=2$.

*Ответы:* **53.** 1) $\frac{21}{4}$; 4) 2; 5) $arctg\frac{1}{7}$; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $2-\ln 2$. **56.** 1) $\frac{14}{3}$; 5) 1,02; 7) 0,60; 9) $\pi$; 10) 0,38. **57.** 2) $\frac{1}{5}\ln 112$; 3) 3,19; 5) 0,12; 6) $\pi$; 7) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$; 9) $\frac{848}{105}$; 14) 0,02; 15) 1,3333. **58.** 1) –0,086; 2) 1; 3) *e*; 4) 2,576; 5) 0,0959; 6) 0,796; 7) 0,468; 8) 42,667; 9) 6,2832. **59.** 1) 0,222; 2) 0,264; 3) 0,2675; 4) 0,25.

### *9. Вычисление несобственных интегралов*

*Несобственным интегралом* называются интеграл с бесконечными пределами интегрирования или интеграл от неограниченной на заданном отрезке функции.

*Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.*

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ непрерывна на полуинтервале $\left[a,+\infty\right)$. Тогда несобственный интеграл от функции $f\left(x\right)$ на этом полуинтервале определяется равенством: $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$.

Если предел, стоящий в правой части равенства, существует и конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*; если этот предел не существует или бесконечен, то интеграл называют *расходящимся.*

Геометрически интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ в случае положительной подынтегральной функции $\left(f\left(x\right)>0\right)$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f\left(x\right)$, прямой $x=a$ и осью *Ox*. Если интеграл сходится, то площадь фигуры выражается конечным числом; для расходящегося интеграла площадь фигуры бесконечна.

Аналогично определяют несобственные интегралы от непрерывных функций на полуинтервале $(-\infty;\ b]$: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to -\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$,

и на промежутке $(-\infty, +\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to -\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to +\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$; если хотя бы один из интегралов расходится, то будет расходиться и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

*Признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами*

1. Пусть для всех $x \in [a;\ +\infty)$ выполняется $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, $a > 0$.

Если $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$

Если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx.$

2. Если для всех $x \in [a;\ +\infty)$ $f(x) > 0,\ \varphi(x) > 0,\ a > 0$ и существует конечный предел отношения $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково, т. е. сходятся или расходятся одновременно.

Приведенные выше теоремы называют *признаками сравнения*. При их применении часто используется интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \le 1$.

3. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx \ (a>0)$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем его сходимость называется *абсолютной*.

*Интегралы от неограниченных функций.*

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Этот интеграл сходится, если предел, стоящий в правой части равенства, равен конечному числу.

Геометрически такой интеграл для положительной подынтегральной функции $\left(f(x)>0\right)$ представляет собой площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и вертикальной асимптотой $x=b$.

Если подынтегральная функция $y=f(x)$ непрерывна для всех $x\in(a,b]$ и в точке $x=a$ имеет бесконечный разрыв, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx$.

Если функция $y=f(x)$ имеет бесконечный разрыв и точке $c\in(a,b)$ и непрерывна для всех $x\in[a,c)\cup(c,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

Если оба предела в правой части равенства существуют и конечны, то исходный интеграл называют *сходящимся*; если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то интеграл называют *расходящимся*.

Справедливы признаки сходимости и расходимости интегралов от неограниченных функций, аналогичные признакам сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами. Эталонами для сравнения служат интегралы

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ (\alpha>0) \text{ или } \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\ (\alpha>0),$$

которые сходятся при $0<\alpha<1$, и расходятся при $\alpha\geq 1$.

***Пример 11.*** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$.

***Решение.***

1) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) =$

$= -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{b^2}} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$, значит, интеграл сходится.

2) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon}(2-x)^{-\frac{1}{2}}d(2-x) = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{2-x}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$

$= -2\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, интеграл сходится.

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3} = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 x^{-3}dx = \lim\limits_{a\to 0}\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_a^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{a^2} = \infty$, следовательно, интеграл расходится.

*Ответ:* 1) $\frac{1}{2}$; 2) $2\sqrt{2}$; 3) расходится.

***Пример 12.*** Исследовать сходимость интегралов, используя признаки сравнения: 1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+3x^2}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

***Решение.*** 1) Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}+3x^2}$ при $x = 0$ терпит бесконечный разрыв. Очевидно, что при $x > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt[4]{x}+3x^2} \le \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$. Рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim\limits_{a\to 0}\int\limits_a^1 x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{3}\lim\limits_{a\to 0}\sqrt[4]{x^3}\Big|_a^1 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}.$$

Тогда интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+3x^2}$ сходится по первому признаку сравнения.

2) Оценим подынтегральную функцию $f(x) = \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$. Для всех $x \in [1;+\infty)$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{x}\Big|_1^{b}=2\lim_{b\to\infty}\sqrt{b}-2=\infty.$$

Тогда $\int_1^{+\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$ расходится по второму признаку сравнения.

*Ответ:* 1) сходится; 2) расходится.

### *Задания для аудиторной работы*

**60.** Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_0^{+\infty}\sin 2x\,dx$; 3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$; 4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

**61.** Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1) $\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_1^{e}\frac{dx}{x\ln x}$; 3) $\int_1^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 4) $\int_0^{2,5}\frac{dx}{x^2-5x+6}$.

**62.** Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$; 2) $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$; 3) $\int_1^{\infty}\frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\int_1^{2}\frac{dx}{\ln x}$.

### *Задания для индивидуальной работы*

**63.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$; 2) $\int_0^{\infty}\frac{arctgx}{x^2+1}dx$; 3) $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 4) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+8x+17}$.

**64.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; 4) $\int_1^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

**65.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}$; 2) $\int_2^{3}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$; 3) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$;

4) $\int_2^{5}\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$; 5) $\int_0^{\infty}\frac{arctgxdx}{x^2+1}$; 6) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$;

7) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+8x+17}$; 8) $\int_0^{1}\frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x^2}}$; 9) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$;

10) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 11) $\int\limits_{0}^{1}x\ln x\,dx$; 12) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^3-6x^2}$;

13) $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^3-4x^2}$; 14) $\int\limits_{\pi}^{+\infty}\sin x\,dx$; 15*) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$;

16) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}ctgx\,dx$; 17) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^3+1}$; 18) $\int\limits_{0}^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$.

**66.** Исследовать интегралы на сходимость:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$;

4) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x^2-6x+8}$; 5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x+1}{x\sqrt{x+1}}dx$; 6) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$;

7) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+4}dx$; 8) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

**67.** Исследовать сходимость несобственных интегралов.

1) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; 2) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{(x^5+3x^4)^7}}$; 3) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\left(3x^2+4x+1\right)dx}{\sqrt[3]{\left(2x+3\right)^{10}}}$;

4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$; 5) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)dx}{\ln(1+x)}$; 6) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^8dx}{\sqrt{64-x^6}}$;

7) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{arctg0,5x}}$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^8 x}}$.

*Ответы:* **60.** 1) 0,5; 2) расх.; 3) $\frac{\pi}{4}$. **61** 1) 1; 2) расх.; 3) $\frac{8}{3}$. **62.** 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится. **63.** 1) расходится; 2) $\frac{\pi^2}{8}$; 3) 0,5; 4) 2,897. **64.** 1) 2; 2) расходится; 3) $\frac{1}{\ln 2}$; 4) $\frac{8}{3}$. **65.** 1) $\pi$; 2) 2, 236; 3) 0,059; 4) 3, 142; 5) 1, 234; 6) 1, 814; 7) 2, 897; 8) 0,676; 15) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3$; 16) расходится; 17) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 18) 0,5. **66.** 1) сходится. **67.** 1) сходится; 2) расходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) расходится; 7) сходится; 8) расходится.

## *10. Геометрические приложения определенных интегралов. Вычисление площадей плоских фигур*

Рассмотрим следующие случаи.

1. Фигура на плоскости ограничена графиком непрерывной функции $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$, если $a<x<b$), прямыми $x=a$ и $x=b$, осью абсцисс (рис. 1). Площадь такой фигуры можно вычислить с помощью формулы

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

2. Криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x=\varphi(y)$ ($\varphi(y) \geq 0$, если $y \in [c,d]$), прямыми $y=c$ и $y=d$, осью ординат (рис. 2). Площадь этой фигуры можно вычислить по формуле

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy.$$

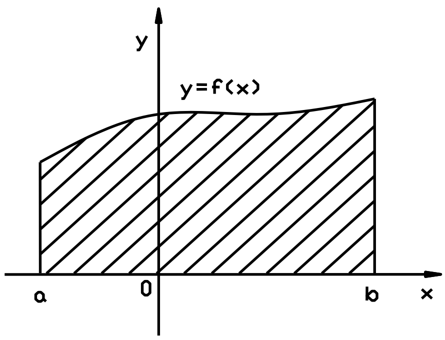



Рис. 1

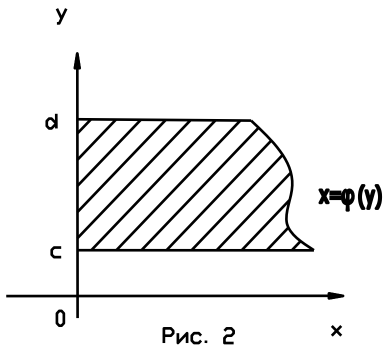



Рис. 2

3. – 4. Площади фигур, представленных на рис. 3 и 4, могут быть найдены соответственно по формулам:

$$S=\int_a^b \left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx. \qquad S=\int_c^d \left(\varphi_1(y)-\varphi_2(y)\right)dy.$$

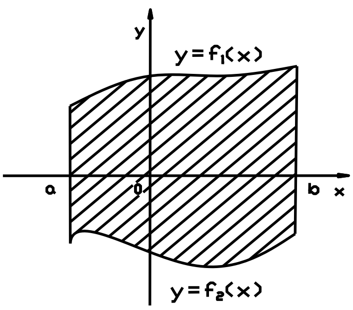



Рис. 3

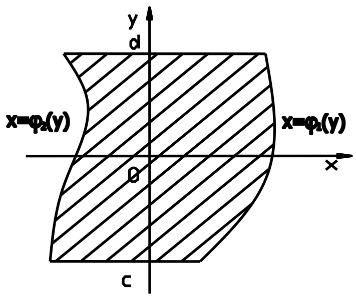



Рис. 4

5. Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $x=a$, $x=b$, осью $Ox$ и графиком непрерывной функции, заданной параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in [a, b]$, $x(a)=a$, $x(b)=b$, то площадь фигуры можно найти по формуле $S=\int_a^b y(t)\cdot x'(t)dt$.

6. Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат может быть найдена с помощью формул:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi\ .\qquad\qquad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(r_1^2(\varphi)-r_2^2(\varphi)\right)d\varphi\ .$$

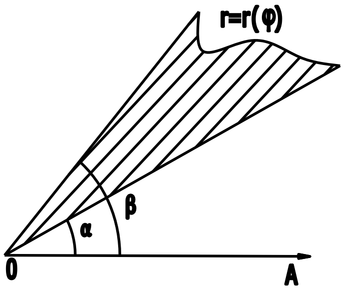


Рис. 5

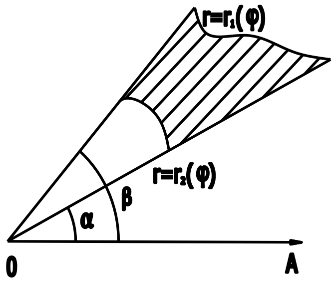


Рис. 6

### *Задания для аудиторной работы*

**68.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+4$ и прямой $y=x+4$.

**69.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

**70.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^3=x$, прямыми $y=1$ и $x=5$.

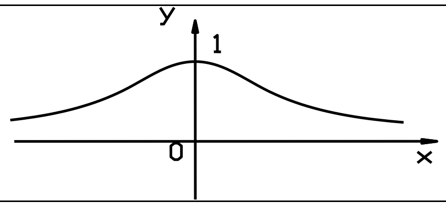
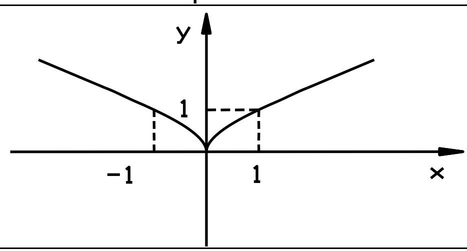
**71.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ и ее асимптотой.

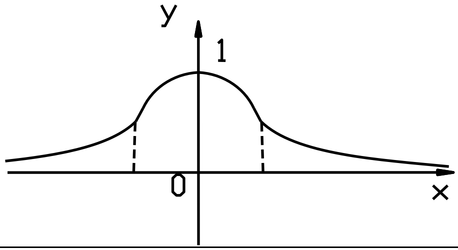
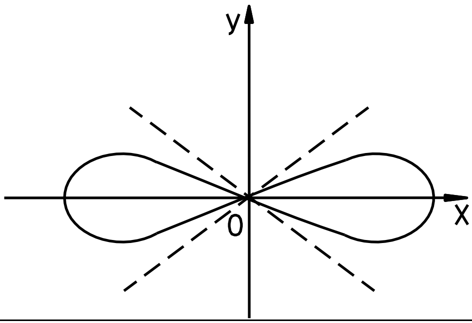
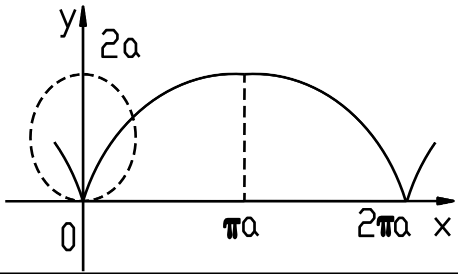
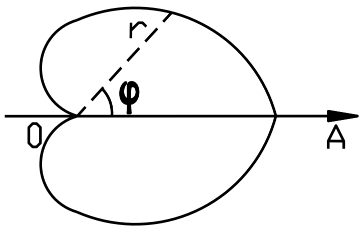
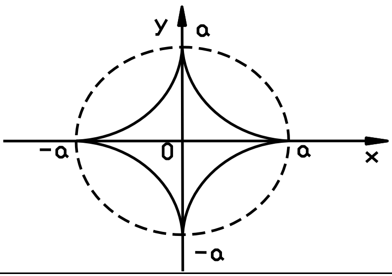
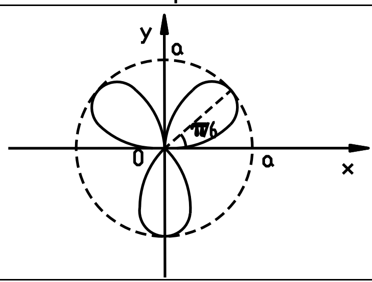
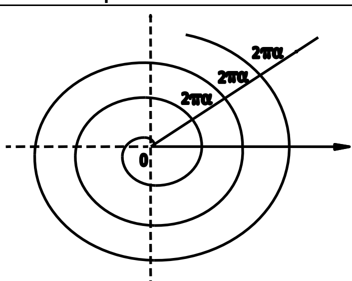
**72.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ и осью $Ox$.

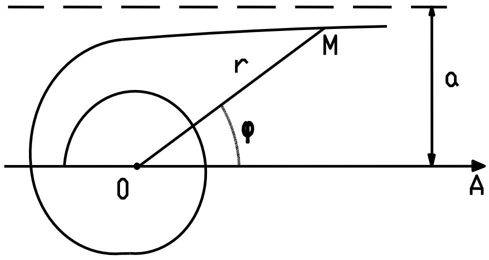
**73.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2=x^2-x^4$.

**74.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a\sin 3\varphi$ .

### *Некоторые кривые (справочный материал)*

| | |
|---|---|
| 1.Локон Аньези $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. |   |
| 2. Парабола Нейла $y=\sqrt[3]{x^2}$. |   |

| | |
|---|---|
| 3. Кривая Гаусса $y = \exp(-x^2)$. |   |
| 4. Лемниската Бернулли $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ . |   |
| 5. Циклоида $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ |   |
| 6. Кардиоида $r = a(1 + \cos\varphi)$ . |   |
| 7. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ или $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ |   |
| 8. Трехлепестковая роза $r = a\sin 3\varphi$ . |   |
| 9. Спираль Архимеда $r = a\varphi$ . |   |

| | |
|---|---|
| 10. Гиперболическая спираль $r=\dfrac{a}{\varphi}$. |   |

### *Задания для индивидуальной работы*

**75.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=9x$, $y=3x$; 2) $y^2=1-x$, $x=-3$;

3) $y=x^2-6x+9$, $4x-y=12$; 4) $y^2+8x=16$, $y^2-24x=48$;

5) $y^2=x+5$, $y^2=-x+4$.

**76.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии $\begin{cases} x=3t^2; \\ y=4t-t^3. \end{cases}$

**77.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $x=3\cos t$, $y=5\sin t$; 2) $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$;

3) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$; 4) $x=2t^2, y=9t-t^3$ (петля).

**78.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией в полярной системе координат:

1) $r=a(1+\cos\varphi)$; 2) $r=a\cos 2\varphi$;

3) $r^2=a^2\sin 2\varphi$; 4) $r=2+\cos\varphi$ (улитка Паскаля).

**79.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией (перейти к полярным координатам):

1) $x^4+y^4=x^2+y^2$; 2) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+y^2\right)$;

3) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2$; 4) $\left(x^2+y^2\right)^2=3x^2-y^2$.

*Ответы:* **68.** 20,83. **70.** 4,25. **71.** $\pi$. **72.** $3a^2\pi$. **73.** 1,(3). **74.** $0{,}25a^2\pi$.

**75.** 1) 0,5; 2) $\dfrac{32}{3}$; 3) $\dfrac{32}{3}$; 4) $\dfrac{32\sqrt{6}}{3}$; 5) $18\sqrt{2}$. **76.** 51,2. **77.** 1) $15\pi$; 2) $\dfrac{27\pi}{8}$; 3) $24\pi$; 4) 259,2. **78.** 1) $1{,}5\pi a^2$; 2) $0{,}5\pi a^2$; 3) $0{,}5a^2$; 4) $4{,}5\pi$. **79.** 1) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{5\pi a^2}{2}$; 3) $\dfrac{\pi a^2}{8}$; 4) $\pi$.

## 11. Вычисление длин дуг плоских кривых. Вычисление объемов тел

*Формулы для вычисления длины дуги плоской кривой*

1. Длину дуги *AB* кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$, можно найти по формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

Если дуга кривой *AB* задана уравнением $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, то длину дуги *AB* можно найти по формуле $l=\int\limits_c^d\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}dy$.

2. Длину дуги *AB* кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[a,b]$, можно найти по формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$

3. Если известно полярное уравнение дуги *AB* $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[a;\ b]$, то ее длину можно найти по формуле $l=\int\limits_a^b\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$ .

*Формулы для вычисления объемов тел*

1. Если известна площадь $S=S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, $a\le x\le b$, то объем тела можно вычислить по формуле $V=\int\limits_a^b S(x)dx.$

2. Объем тела, полученного при вращении вокруг оси *Ox* (*Oy*) криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной на $[a;\ b]$ функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ можно найти по формуле

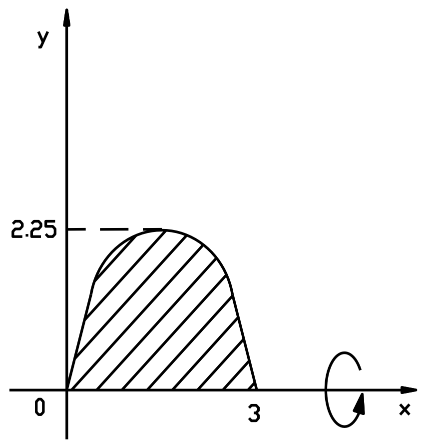
$$V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx\ \left(V_y=2\pi\int\limits_a^b x\cdot f(x)dx\right).$$

Объем тела, полученного при вращении вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной на $[c;\ d]$ функции $x=\varphi(y)$, прямыми $y=c$, $y=d$, $x=0$ можно найти по формуле $V_y=\pi\int\limits_c^d\varphi^2(y)dy$ .

3. Пусть плоская фигура ограничена графиками непрерывных на $[a;b]$ функций $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$, причем $f_2(x)\ge f_1(x)$, $x\in[a;b]$. Объем тела вращения этой фигуры вокруг оси $Ox$ можно вычислить по формуле $V_x=\pi\int\limits_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$.

4. Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения можно найти по формуле $V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi)\cdot\sin\varphi\, d\varphi$.

***Пример 13.*** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной параболой $y=3x-x^2$ и осью $Ox$.




***Решение.*** При вычислении объемов тел вращения нет необходимости изображать сами тела, достаточно построить плоские фигуры, которые будут вращаться вокруг указанной оси.

Парабола $y=3x-x^2$ пересекает ось $Ox$ в точках $x=0$ и $x=3$.

Воспользуемся формулой $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

$$V=\pi\int\limits_0^3\left(3x-x^2\right)^2dx=\pi\int\limits_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)dx=\pi\left(3x^3-\frac{6x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\pi\left(81-\frac{3\cdot 81}{2}+\frac{3\cdot 81}{5}\right)=8{,}1\pi.$$

*Ответ:* $8{,}1\pi$.

***Пример 14.*** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной параболой $y=3x-x^2$ и осью $Ox$.

***Решение.*** Найдем требуемый объем двумя способами.

*I способ*. Воспользуемся формулой $V_y=2\pi\int\limits_a^b x\cdot f(x)dx$.

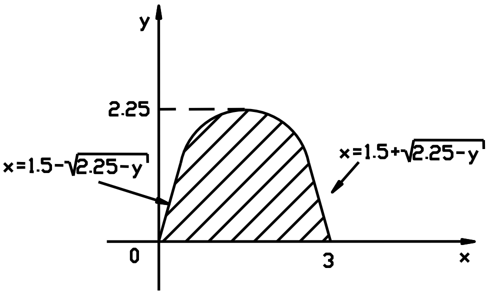
$$V_y=2\pi\int\limits_0^3 x\left(3x-x^2\right)dx=2\pi\int\limits_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=2\pi\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=2\pi\left(27-\frac{81}{4}\right)=\frac{54\pi}{4}=13{,}5\pi.$$

*II способ*. Преобразуем уравнение параболы следующим образом

$$y = 3x - x^2,\quad x^2 - 3x = -y,\quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = -y,\quad (x - 1{,}5)^2 = 2{,}25 - y,$$

$$x - 1{,}5 = \pm\sqrt{2{,}25 - y},\ x = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - y}.$$




Из рисунка очевидно, что уравнение левой ветви параболы $x = 1{,}5 - \sqrt{2{,}25 - y}$, уравнение правой ветви параболы $x = 1{,}5 + \sqrt{2{,}25 - y}$, $0 \le y \le 2{,}25$.

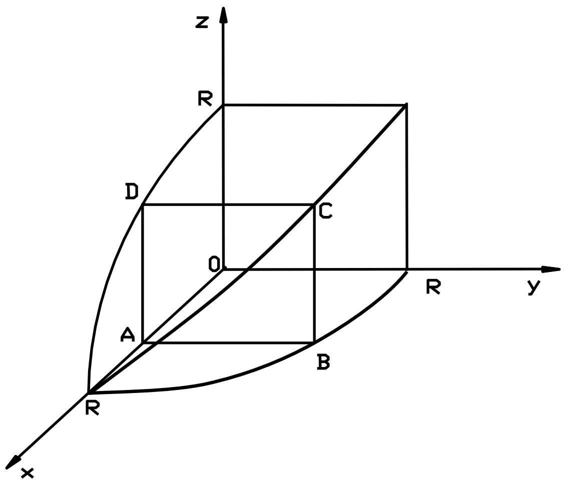
Тогда для вычисления объема воспользуемся формулой $V_y = \pi \int\limits_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)\right)dy$.

$$V_y = \pi \int\limits_0^{2,25} \left((1{,}5 + \sqrt{2{,}25 - y})^2 - (1{,}5 - \sqrt{2{,}25 - y})^2\right)dy = \pi \int\limits_0^{2,25} 6\sqrt{2{,}25 - y}\,dy =$$

$$= -6\pi \left.\frac{\sqrt{(2{,}25 - y)^3}}{1{,}5}\right|_0^{2,25} = -4\pi\left(0 - \sqrt{2{,}25^3}\right) = 4\pi \cdot 2{,}25 \cdot 1{,}5 = 13{,}5\pi.$$

*Ответ:* $13{,}5\pi$.

***Пример 15.*** Оси двух круговых цилиндров, радиус основания которых равен $R$, пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть цилиндров.




***Решение.*** Рассмотрим два круговых цилиндра с взаимно перпендикулярными осями, их уравнения

$$x^2 + y^2 = R^2 \ \text{ и } \ x^2 + z^2 = R^2.$$

Изобразим одну восьмую часть тела, расположенную в первом октанте.

Рассмотрим сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными оси $Ox$.

$$x = const,\ y = AB = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$z = AD = BC = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Таким образом, сечение представляет собой квадрат АВСД, площадь которого равна $S(x) = AB \cdot BC = R^2 - x^2$.

$$V = 8\int\limits_0^R S(x)dx = 8\int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = 8\left.\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^R = 8\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{16}{3}R^3.$$

*Ответ:* $\frac{16}{3}R^3$.

### *Задания для аудиторной работы*

**80.** Вычислить длину дуги кривой $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки $x_1=1$ до точки $x_2=9$.

**81.** Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t; \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\ t\in[0;\pi]. \end{cases}$

**82.** Вычислить длину дуги кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$.

**83.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $4z=x^2+2y^2$, $z=1$.

**84.** Вычислить объем тела, основание которого область плоскости $xOy$, ограниченная астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$, есть квадрат.

**85.** Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной линиями $y^2=16x$, $x=4$.

**86.** Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ и осью $Ox$.

### *Задания для индивидуальной работы*

**87.** Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{2x-x^2}-1$ от точки $x_1=0,25$ до точки $x_2=1$.

**88.** Вычислить длину дуги кривой $y=\ln\left(1-x^2\right)$ от точки $x_1=0$ до точки $x_2=0,5$.

**89.** Вычислить длину дуги кривой $x=\ln\cos y$ от точки $y_1=0$ до точки $y_2=\frac{\pi}{3}$.

**90.** Вычислить длину дуги параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки $A(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 2)$.

**91.** Вычислить длину дуги кривой $x=0,25y^2-0,5\ln y$ от $y_1=1$ до $y_2=e$.

**92.** Вычислить длину дуги кривой $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$ от точки $x_1=0$ до точки $x_2=\frac{9}{16}$.

**93.** Вычислить длину кривой, заданной параметрически:

1) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от точки $t_1=0$ до точки $t_2=\ln\pi$;
2) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ от точки $t_1=0$ до точки $t_2=2\pi$;
3) $x=\sqrt{3}t^2$, $y=t-t^3$ (петля).

**94.** Вычислить длину астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$.

**95.** Вычислить длину одного витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

**96.** Вычислить длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

**97.** Вычислить длину дуги пространственной кривой $x = at^2$; $y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$; $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ от $t = 0$ до $t = \sqrt{3}$.

**98.** Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, вокруг указанной оси:

1) $y = 4x - x^2$, $y = x$ вокруг оси $Ox$;
2) $y = x^2$, $4x - y = 0$ вокруг оси $Oy$;
3) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг оси $Ox$;
4) $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ вокруг оси $Oy$;
5) $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $y = 2$ вокруг оси $Oy$;
6) $x^2 - y^2 = 9$, $x = 6$ вокруг оси $Ox$;
7) $xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$ вокруг оси $Ox$;
8) $y^2 = 16x$, $x = 4$ вокруг оси $Oy$;
9) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси $Ox$.

**99.** Найти объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$ вокруг 1) оси $Ox$; 2) оси $Oy$.

**100.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ области, содержащейся между параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

**101.** Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями, вокруг указанной оси:

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{15} = 1$, $x \geq 0$ вокруг оси $Ox$;
2) $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$ вокруг оси $Oy$;
3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1$ вокруг оси $Ox$.

**102.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y = -p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$.

**103.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x = a$ той части параболы $y^2 = 4ax$, которая этой прямой отсекается.

**104.** Найти объем тела, образованного вращением кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

**105.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью *Ox*.

*Ответы.* **80.** $\frac{52}{3}$. **81.** $\frac{\pi^3}{3}$. **82.** $8a$. **83.** $\pi\sqrt{2}$. **84.** $\frac{128a^3}{105}$. **85.** $51{,}2\pi$. **86.** $5a^3\pi^2$. **87.** $\arcsin 0{,}75$. **88.** $\ln 3 - 0{,}5$. **89.** $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. **90.** $\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 2{,}29$. **91.** $0{,}25(e^2+1)$. **92.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **93.** 1) $\sqrt{2}(\pi - 1)$; 2) $6a$; 3) 4. **94.** 48. **96.** $\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **97.** $2a\sqrt{6}$. **98.** 5) $\frac{64\pi}{3}$; 6) $36\pi$; 7) $\frac{4\pi}{3}$; 8) $204{,}8\pi$; 9) $\frac{16\pi}{15}$. **99.** 2) $2\pi$. **100.** $\frac{3\pi}{10}$. **101.** 1) $1{,}12\pi$; 2) $3\pi(2\ln 3 - 1)\ln 3$; 3) $70\pi$. **102.** $\frac{4}{3}\pi p^3$. **103.** $\frac{32}{15}\pi a^3$. **104.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **105.** $5\pi^2 a^3$.

## *12. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач физики и механики*

*1. Путь, пройденный материальной точкой.*

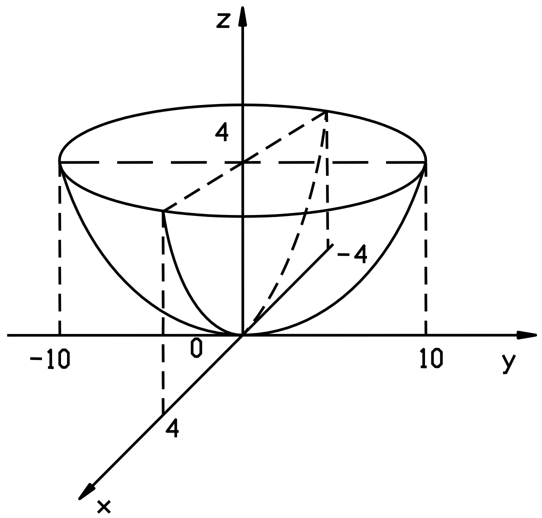
Если точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, то путь, пройденный ею за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$.

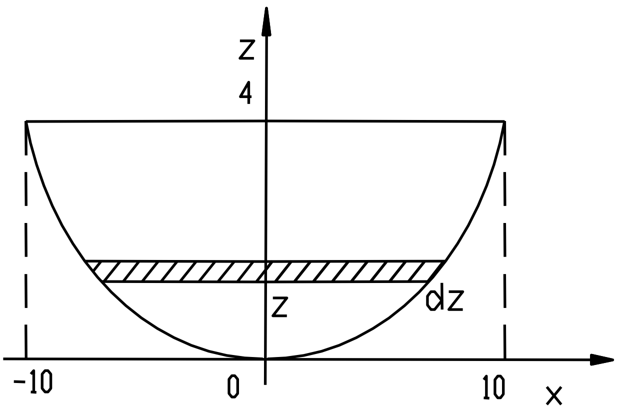
*2. Вычисление работы переменной силы.*

Пусть под действием силы $F(x)$ материальная точка движется вдоль оси *Ox*. Работа этой силы на участке пути $[a;\ b]$ может быть найдена по формуле $A = \int\limits_a^b F(x)\,dx$.

***Пример 16.*** Котел, имеющий форму эллиптического параболоида $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$ высотой $H = 4$ *м*, заполнен жидкостью, плотность которой $d = 0{,}8$ *т/м*$^3$. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла.

***Решение.***




Если $z = 4$, то в сечении параболоида этой плоскостью получим эллипс $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{100} = 1.$

На высоте $z$ выделим элементарный слой жидкости толщиной $dz$. В силу того, что $dz$ мало, можно считать этот слой эллиптическим цилиндром с высотой $dz$ ,в основании которого эллипс $\dfrac{x^2}{4z} + \dfrac{y^2}{25z} = 1.$

Элементарный объем этого цилиндра равен $dV = \pi abh = \pi \cdot 2\sqrt{z} \cdot 5\sqrt{z}dz = 10\pi \cdot zdz$, здесь $a = 2\sqrt{z}$, $b = 5\sqrt{z}$ – полуоси эллипса, $h = dz$. Его масса $dm = \delta \cdot dV = 0{,}8 \cdot 10\pi \cdot zdz = 8\pi \cdot zdz.$

Элемент работы, затраченной на перекачивание элемента массы $dm$ на расстояние $H - z = 4 - z$, будет равен

$$dA = (H - z) \cdot gdm = (4 - z)g \cdot 8\pi \cdot zdz = 8\pi \cdot g\left(4z - z^2\right)dz.$$

Тогда вся работа будет равна

$$A = \int_0^4 8\pi \cdot g\left(4z - z^2\right)dz = 8\pi \cdot g\left(2z^2 - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 8\pi \cdot g \cdot 16\left(8 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= 8\pi \cdot g \cdot 64 \cdot \frac{5}{3} = 26285{,}568\ (кДж).$$

*Ответ:* 26285,568 *кДж*.

*3. Вычисление силы давления жидкости на пластину.*

Если пластина находится в горизонтальном положении на глубине $h$ от поверхности жидкости, то сила давления $P$ жидкости на эту пластинку вычисляется по закону Паскаля $P = g\rho hS$, где $g$ – ускорение свободного падения, $S$ – площадь пластинки, $\rho$ – плотность жидкости.

Если пластина погружена в жидкость вертикально, то сила давления жидкости на единицу площади изменяется с глубиной погружения.

Пусть пластина, имеющая форму криволинейной трапеции, погружена в жидкость так, что боковые стороны этой трапеции параллельны поверхности жидкости. Тогда сила давления на пластинку вычисляется по формулам:

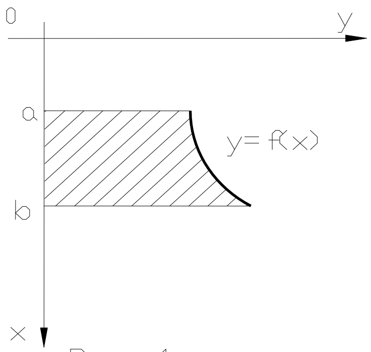



Рис. 1

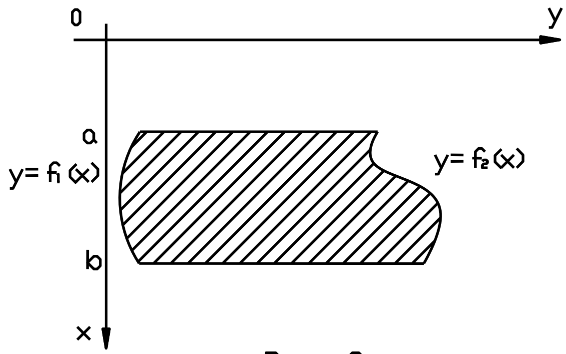
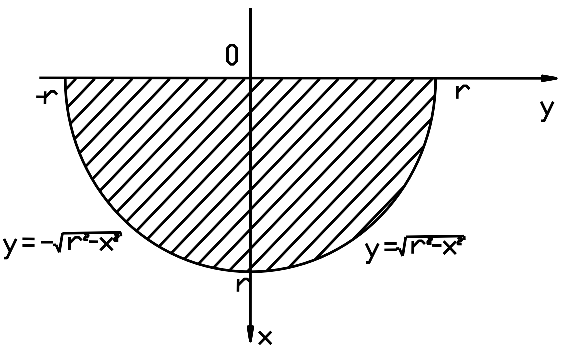



Рис. 2

$$P = g \cdot \int_a^b \rho \cdot x f(x)\,dx, \qquad P = g \cdot \int_a^b \rho \cdot x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

***Пример 17.*** Найти силу давления, испытываемую полукругом радиуса $r$, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.




***Решение.***

Воспользуемся формулой $P = g \cdot \int_a^b \rho \cdot x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$. В данном случае $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = r$. Тогда

$$P = g \cdot \rho \int_0^r x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{3} g \cdot \rho \left(r^2 - x^2\right)^{1{,}5}\Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3 g \rho.$$

*Ответ:* $\frac{2}{3} r^3 g \rho$ .

*4. Статические моменты и координаты центра масс материальной дуги.*

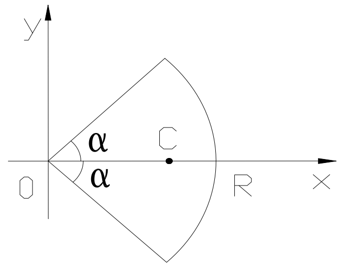
Статические моменты материальной кривой, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, относительно координатных осей находятся по формулам:

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx, \qquad M_y = \int_a^b \rho(x) x\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Координаты центра масс материальной дуги можно найти по формулам $x_c = \dfrac{M_y}{M}$, $y_c = \dfrac{M_x}{M}$, где $M = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ – масса дуги, $\rho = \rho(x)$ ее линейная плотность.

***Пример 18.*** Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиуса R с центральным углом $2\alpha$.

***Решение.*** Выберем систему координат так, как показано на рисунке.




Тогда в силу однородности и симметричности расположения дуги вторая координата центра масс будет равна нулю, $y_c = 0$. Запишем параметрические уравнения дуги окружности.

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ -\alpha \le t \le \alpha.$$

Найдем массу дуги и ее статический момент относительно оси $Oy$.

$$M = \rho\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \rho\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{R^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}\,dt = \rho Rt\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2\rho R\alpha.$$

$$M_y = \rho\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}R\cos t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \rho R^2\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\cos t dt = 2\rho R^2\int\limits_{0}^{\alpha}\cos t dt = 2\rho R^2\sin\alpha.$$

Тогда, координаты центра масс дуги окружности: $x_c = \dfrac{2\rho R^2\sin\alpha}{2\rho R\alpha} = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_c = 0$.

*Ответ:* $x_c = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_c = 0$.

*5. Координаты центра масс плоской фигуры.*

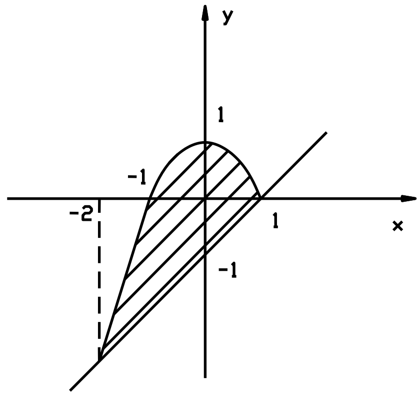
Координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$, где $\delta = \delta(x)$ – поверхностная плотность фигуры, могут быть найдены по формулам: $x_c = \dfrac{M_y}{M}$, $y_c = \dfrac{M_x}{M}$, где

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \delta(x)(f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \qquad M_y = \int\limits_a^b x\delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx,$$

$$M = \int\limits_a^b \delta(x)(f_2(x) - f_1(x))dx.$$

***Пример 19.*** Вычислить координаты центра масс однородной плоской пластины, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $x - y = 1$.

***Решение.*** Построим фигуру, ограниченную данной параболой и данной прямой.




Так как пластина однородная, то ее поверхностная плотность постоянна. Будем считать, что она равна единице, т.е. $d = d(x) = 1$. Для вычисления координат центра масс полученной фигуры воспользуемся формулами $x_c = \frac{M_y}{M}$, $y_c = \frac{M_x}{M}$. В нашем случае $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = 1 - x^2$, $a = -2$, $b = 1$.

$$M = \int_{-2}^{1} \left(1 - x^2 - x + 1\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) dx = \left.\left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = 4{,}5.$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(\left(1 - x^2\right)^2 - \left(x - 1\right)^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right)\right|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - 1 + 1\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{32}{5} + 8 + 4\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{33}{5} - 12\right) = 3{,}3 - 6 = -2{,}7.$$

$$M_y = \int_{-2}^{1} x\left(1 - x^2 - x + 1\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2x - x^3 - x^2\right) dx = \left.\left(x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - \left(4 - 4 + \frac{8}{3}\right) = -2{,}25\,.$$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{-2{,}25}{4{,}5} = -0{,}5, \qquad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{-2{,}7}{4{,}5} = -0{,}6.$$

*Ответ:* $C\left(-0{,}5;\ -0{,}6\right)$.

### *Задания для аудиторной работы*

**106.** Скорость тела задается формулой $v = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

**107.** Вычислить работу, которую нужно затратить на сооружение правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 2 *м* и высотой 4 *м* из материала, удельный вес которого $g = d \cdot g = 24\,кН/м^3$.

**108.** Пластина, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так, что одна из осей (длина *2b*) лежит на поверхности. Найти силу давления жидкости на каждую из сторон этой пластины, если длина погруженной полуоси эллипса равна *a*, а плотность жидкости *d*.

**109.** Найти координаты центра масс дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, расположенной в первом квадранте.

## *Задания для индивидуальной работы*

**110.** Скорость прямолинейного движения материальной точки изменяется по закону $v(t) = te^{-0{,}01t}$ *м/с*. Найти путь, пройденный точкой, от начала движения до полной остановки.

**111.** Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму правильной усеченной четырехугольной пирамиды, сторона нижнего основания которой равна 4 *м*, верхнего – 2 *м*, высота пирамиды – 1 *м*. (Удельный вес воды $\gamma = \delta \cdot g \approx 1000\,кг/м^3$)

**112.** Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен $R$ и высота $H$.

**113.** Вычислить силу давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если стороны прямоугольника 8 *м* и 12 *м*, а верхнее основание параллельно поверхности воды и находится на глубине 5 *м* (удельный вес воды $\gamma = \delta \cdot g \approx 1000\,кг/м^3$).

**114.** Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на всю плотину, если верхнее основание плотины $a = 70$ *м*, нижнее основание $b = 50$ *м*, а высота плотины $h = 20$ *м*.

**115.** Найти центр масс фигуры, ограниченной осью $Ox$ и одной полуволной синусоиды $(0 \le x \le \pi)$.

**116.** Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2 - 2x$.

**117.** Найти координаты центра масс однородной дуги первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

*Ответы.* **106.** $\approx 23{,}7\,м$. **107.** 128 *кДж*. **108.** $\frac{2}{3}g\delta a^2 b$. **109.** $\left(\frac{2a}{5}; \frac{2a}{5}\right)$.
**110.** 10 *км*. **111.** 56 *кДж*. **112.** $\frac{\pi}{12}g\delta R^2 H^2$. **113.** $\approx 10\,348{,}8$ *кН*.
**114.** $\frac{(a+2b)h^2}{6} \approx 11300$ *кН*. **115.** $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$. **116.** (1,5; 0,6).
**117.** $x_c = \pi a$, $y_c = \frac{4a}{3}$.

## *Литература*


1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Наука, 1981. − 448 с.
2. Власов, В.Г. Конспект лекций по высшей математике / В.Г. Власов. − М.: АйрисПресс, 1997. − 288 с.
3. Высшая математика для инженеров: В 2-х томах / С.А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н.А. Микулина. − Мн.: ООО «Элайда», 2004. − Т.1. – 464 с., Т.2. – 592 с.
4. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справочное пособие: в 2-х частях / А.И. Герасимович [и др.]. − Мн.: Выш. шк., 1990. − 272 с.
5. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2-х частях / А.А. Гусак. − Мн.: ТетраСистемс, 2000-2001. − Т.1. – 544 с., Т.2. – 442 с.
6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-х частях / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. − Мн.: Высш. шк., 1997. − Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 416 с.
7. Жевняк, Р. М. Высшая математика, ч.I-IV / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. − Мн.: Выш. шк., 1984-1996 и все последующие издания.
8. Задачи и упражнения по курсу «Высшая математика» для студентов электронно-информационных специальностей. II семестр / Составители: Т.А. Тузик, А.И. Тузик, М.Г. Журавель. − Брест: Изд-во БрГТУ, 2007. − 103 с.
9. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, I-IIIч. − Мн.: Выш. шк., 2004-2008. − Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 367 с., Ч.3. – 367 с.
10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х томах / Н. С. Пискунов. − М.: Наука, 1985. − Т.1. – 432 с., Т.2. – 560 с.
11. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. − Ч.1. – 288 с.
12. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Е.И. Гурский. − Мн.: Выш. шк., 1990. − Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 400 с.
13. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. − М.: Айрис-Пресс, 2003. − 576 с.
14. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике: в 2-х частях / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. − Мн.: Выш. шк., 1993. − Ч.1. – 416 с., Ч.2. – 304 с.

### *Оглавление*

Учебное издание

**Составители:**
*Жук Анастасия Игоревна*
*Каримова Татьяна Ивановна*
*Лебедь Светлана Федоровна*
*Гладкий Иван Иванович*
*Рубанов Владимир Степанович*

# ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

**по курсу *«Математика»***
для студентов факультета
электронно-информационных систем

## *Интегральное исчисление функции одной переменной*

II семестр

Ответственный за выпуск: Каримова Т.И.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 25.02.2016 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 3.5. Уч.-изд. л. 3.75. Заказ № 193. Тираж 50 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.