МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Брестский политехнический институт

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ

Брест 2000

Методические указания и контрольные работы по физике для слушателей факультета довузовской подготовки. Брест, БрПИ, 2000.

Составители: Г.С.Кандилян, ст. преподаватель
И.Н.Прокопеня, инженер-программист
Н.И.Чопчиц, доцент
Л.Н.Яромская, ассистент

П Р Е Д И С Л О В И Е

Цель настоящего пособия - оказать помощь слушателям заочных подготовительных курсов ФДП БрПИ в изучении курса физики.

Основной учебный материал программы курса физики разделен на восемь разделов. В каждом из них даны основные формулы, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения (с ответами) и контрольные задания. Кроме того, в пособии даны общие методические указания, некоторые сведения из математики о приближенных вычислениях, а также приведены справочные таблицы, необходимые для решения задач.

Решения задач, содержащихся в контрольных заданиях, не требуют знаний, выходящих за рамки программы по физике для поступающих в вузы РБ. Уровень их сложности примерно такой же, как и уровень тех задач, которые обычно предлагаются на вступительных экзаменах абитуриентам, поступающим в БрПИ.

Пособие может быть рекомендовано также слушателям дневного и вечернего отделений ФДП и другим лицам, желающим поступать в БрПИ.

В Н И М А Н И Е !

Абитуриенты, поступающие на специальности ЭМФ (электронно-механического факультета), выполняют контрольные работы со звездочкой *.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.

Общие указания.

Самостоятельная работа слушателей подразумевает освоение материала курса физики в рамках программы средней школы и приобретение необходимых навыков для решения конкретных физических задач, соответствующих этому курсу. Для этого необходимо: ознакомиться с содержанием программы вступительных экзаменов по физике; с помощью учебников и пособий (см. список литературы), работая систематически, без длинных перерывов, шаг за шагом "переваривая" каждый физический закон, освоить весь материал. Рекомендуется после подробного изучения каждого раздела (а еще лучше - параллельно этому) решать задачи по этой теме, ибо это позволит лучше осмыслить конкретное физическое явление, описанное в условии задачи. В то же время решение задач способствует свободному владению физическими законами, изучаемыми в теории. Таким образом срабатывает так называемая "обратная связь".

Приступая к решению задач, следует иметь в виду, что каждая задача имеет свои особенности. Нередко встречаются абитуриенты, которые, неплохо зная теоретический материал, тем не менее испытывают большие трудности при решении относительно несложных задач. Это и не удивительно, так как для решения задач по физике знать соответствующие законы, их физический смысл хотя и необходимо, но не достаточно. Надо еще научиться применять законы в каждом конкретном случае. К сожалению, универсального метода для решения задач любого типа не существует, но можно указать на некоторые рекомендации (как бы инструкции) общего характера, которые могут быть полезными при их решении.

Решение физической задачи начинается с прочтения ее условий. Приступая к решению, необходимо:

- внимательно ознакомиться с условиями задачи, проанализировать их и разобраться, какие физические величины даны, а какие следует найти, или какие неизвестные связи нужно восстанавливать;
- вникнуть в сущность физического явления или процесса, описанного в условиях задачи, выяснить, какие физические законы лежат в его основе, и какие физические величины характеризуют данное явление (процесс);
- уточнить начальные условия и, если это возможно, конечное состояние физической системы (материальной точки, тела, системы тел и т.д.);

- постараться сделать чертеж (схему, рисунок), т.к. он позволяет наглядно представить физический процесс (явление(;

- выяснить, какие можно ввести упрощения (например, считать тело материальной точкой, газ - идеальным и т.д.) и какие факторы можно не учитывать (силы трения, сопротивление проводников, поглощение света и т.п.).

Разобравшись в физической сущности задачи, необходимо составить систему уравнений, устанавливающих математическую связь между известными и искомыми физическими величинами, характеризующими данное явление (процесс). Следует учесть, что число уравнений должно быть равно числу неизвестных величин. Если это условие не выполняется, то недостающие данные надо взять из соответствующих таблиц или справочников.

На следующем этапе надо решить систему уравнений в общем (буквенном) виде, т.е. получить расчетную (рабочую) формулу, выражающую искомую величину через другие, значения которых заданы или известны. Прежде чем приступить к числовому расчету, надо убедиться в том, что рабочая формула дает размерность искомой величины. Для этого следует подставить в эту формулу единицы измерения (в СИ) всех величин, входящих в нее, и произвести необходимые действия над ними. Если полученная в итоге размерность не совпадает с размерностью искомой величины, значит задача решена неверно, надо вернуться к началу задачи и попытаться найти ошибку, допущенную на какой-либо стадии ее решения. Если же размерности совпадают, то можно, подставляя числовые значения величин в расчетную формулу, довести расчеты до получения числового ответа.

Однако, может оказаться, что полученный ответ никуда не годный. Например, для ускорения силы тяжести вблизи Земли получено значение 46 м/с^2, или масса планеты оказалась равной 0,5 кг. Поэтому надо провести анализ числового ответа и проверить его соответствие возможным значениям искомой величины. С другой стороны, могут быть получены несколько значений искомой величины. Тогда надо выяснить соответствие каждого из них условиям задачи и выбрать из них только те, которые им удовлетворяют. Строго говоря, в этот анализ можно было бы включить и проверку размерностей, о которой говорилось выше. И, наконец, на этом последнем этапе должна быть исследована зависимость искомой величины от других величин при различных начальных условиях.

Порядок оформления контрольных работ.

1. Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради, на лицевой стороне обложки которой указывается номер группы, номер контрольной работы, фамилия, имя, отчество, подробный домашний (почтовый) адрес.
2. Работа выполняется чернилами или пастой, для замечаний преподавателя на страницах оставляются поля. Каждая задача выполняется с новой страницы. Условие задачи переписывается полностью, без сокращений.
3. Все величины, входящие в условие задачи, а также необходимые табличные данные выписывать для наглядности столбиком. Везде, где это возможно, следует решение сопровождать чертежами или схемами, выполненными аккуратно при помощи чертежных инструментов.
4. Указать основные законы и формулы, на которых базируется решение задачи, разъяснить буквенные обозначения, входящие в формулы.
5. Сопровождать решение задачи краткими, но исчерпывающими пояснениями.
6. Записать в ответе решения задачи числовое значение искомой величины (величин) с указанием размерности в единицах СИ.
7. Если слушатель не в состоянии решить какую-либо задачу, то он должен попросить письменную консультацию отдельным письмом, указав при этом номер контрольной работы, номер задачи и в чем конкретно испытывает затруднение.
8. Если контрольная работа проверена и не зачтена, то исправленное решение нужно присылать на повторную проверку в той же тетради, где сделаны замечания проверяющим преподавателем.

Работы надо оформлять аккуратно, текст должен быть разборчивым. Небрежно оформленные работы могут быть возвращены обратно.

ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА ФИЗИКИ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ К НИМ.

КИНЕМАТИКА.

Координата X материальной точки (или центра масс твердого тела) при равномерном прямолинейном движении в произвольный момент времени t определяется формулой:

$$X = X_0 + v_x(t - t_0), \qquad (1.1)$$

где X_0 - координата в начальный момент времени t_0 $(t_0 < t)$, v_x - проекция вектора скорости $\vec{v}$ на ось X декартовой системы координат.

Координата точки при равнопеременном движении:

$$X = X_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{a_x(t - t_0)^2}{2}, \qquad (1.2)$$

где v_{0x}, a_x - проекции векторов начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ на ось X в момент времени t, t_0 - начальный момент времени $(t_0 < t)$.
Уравнение (1.2) (или 1.1) представляет собой закон движения точки в направлении оси X. Аналогично записываются уравнения для координат Y и Z.

Проекция v_x вектора скорости $\vec{v}$ точки на ось X при равнопеременном движении определяется формулой:

$$v_x = v_{0x} + a_x(t - t_0). \qquad (1.3)$$

В частном случае, при $t_0 = 0$, выражения (1.1),(1.2) и (1.3) записываются в виде:

$$X = X_0 + v_x \cdot t, \qquad (1.1')$$

$$X = X_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad (1.2')$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \qquad (1.3')$$

При равнопеременном прямолинейном движении с изменением направления движения на противоположное путь, пройденный точкой к моменту времени t, равен:

$$S = \frac{v_0^2}{2a} + \frac{a(t - t')^2}{2}, \qquad (1.4)$$

где t' $(t' < t)$ - момент времени, когда происходит изменение направления движения точки.

Путь h, пройденный телом при свободном падении в произвольный момент времени t:

$$h = v_0(t - t_0) + \frac{g(t - t_0)^2}{2}, \qquad (1.5)$$

где g - ускорение свободного падения, v_0 - скорость тела в начальный момент времени $(t_0 < t)$.

Скорость свободно падающего тела в произвольный момент времени t:

$$v = v_0 + g(t - t_0). \qquad (1.6)$$

Средняя путевая скорость:

$$v_{cp} = \frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{t_1 + t_2 + ... + t_n}, \qquad (1.7)$$

где S_i - путь, пройденный телом за время t_i.

Для равнопеременного движения справедлива формула:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS, \qquad (1.8)$$

где v_0- начальная, а v - конечная скорости на участке S пути.

Угловая скорость равномерного движения точки по окружности определяется как

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad (1.9)$$

где $\Delta\varphi$ - угол поворота радиус-вектора точки за промежуток времени Δt.

Связь между линейной и угловой скоростями точки:

$$v = \omega \cdot R, \qquad (1.10)$$

где R - радиус окружности.

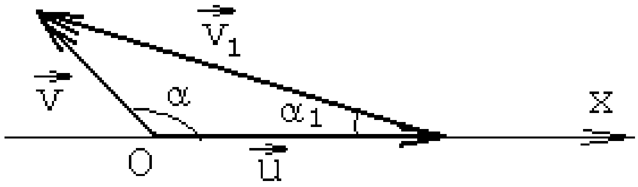
Модуль центростремительного ускорения точки, движущейся равномерно по окружности, равен:

$$a_ц = \frac{v^2}{R}. \qquad (1.11)$$

ПРИМЕР1.1. Корабль плывет вдоль берега на восток со скоростью $\vec{u}$ (u = 10 м/с). В то же время дует ветер с юго-востока со скоростью $\vec{v}$ (v = 5 м/с) относительно берега. Какова скорость $\vec{v}_1$ ветра относительно корабля?

Дано:
u = 10 м/с
v = 5 м/с
α = 135°

v_1 - ?
α_1 - ?



Решение: Направим ось X неподвижной системы координат, связанной с берегом, в направлении движения корабля. Согласно закону сложения скоростей:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{u}\ .$$

Применение теоремы косинусов к треугольнику, образованному векторами $\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}_1$:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + u^2 - 2v \cdot u \cdot \cos\alpha} \qquad (1)$$

позволяет непосредственно вычислить модуль скорости ветра относительно корабля. Направление же скорости $\vec{v}_1$ найдем из теоремы синусов:

$$\frac{v}{\sin\alpha_1} = \frac{v_1}{\sin\alpha}$$

или с учетом (1)

$$\frac{v}{\sin\alpha_1} = \frac{\sqrt{v^2 + u^2 - 2v \cdot u \cdot \cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

откуда

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{v \cdot \sin\alpha}{\sqrt{v^2 + u^2 - 2v \cdot u \cdot \cos\alpha}}\right). \qquad (2)$$

Подставляя числовые значения соответствующих физических величин в (1) и (2) и произведя вычисления, находим:

$V_1 \approx 14$ м/с; $\alpha_1 \approx 15°$.

ПРИМЕР 1.2. Тело падает с высоты h без начальной скорости. Определить эту высоту, если известно, что вторую половину пути оно прошло за время τ = 1.6 с.

Дано:

τ = 1.6 с
g = 9.8 м/с^2
----
h - ?

Решение: Поместим начало координат в точке на высоте h, откуда падает тело, а ось y направим в сторону движения тела. Тогда закон движения тела запишется в виде:

$$y(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad (1)$$

Пусть тело находится на половине пути в момент времени t_1, т.е. $y(t_1) = \frac{h}{2}$. Тогда (1) примет вид:

$$\frac{h}{2} = \frac{g \cdot t_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Условие падения тела на Землю:

$$y(t_1 + \tau) = h.$$

В момент, когда тело достигает поверхности Земли, из (1) будем иметь:

$$h = \frac{g \cdot (t_1 + \tau)^2}{2}. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (2),(3), получим:

$$h = \frac{g \cdot \tau^2}{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}.$$

Перед тем как произвести вычисления, надо освободиться от иррациональности знаменателя

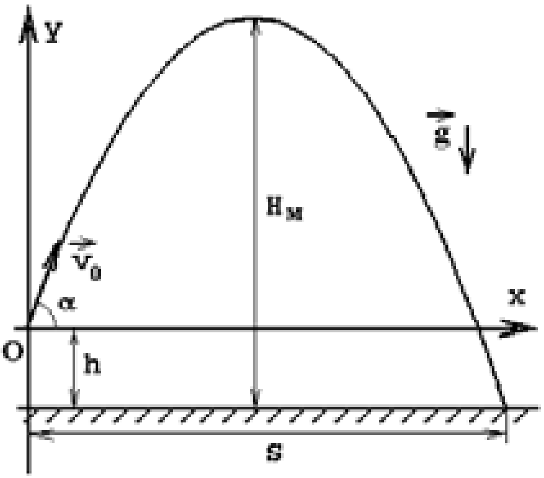
$$h = \frac{g \cdot \tau^2}{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} = g \cdot \tau^2 \left(\sqrt{2} + 1\right)^2.$$

После вычислений находим: $h \approx 180$ м.

ПРИМЕР1.3. Камень, брошенный с высоты h = 2.1 м под углом α = 45° к горизонту, падает на землю на расстоянии S=42 м (по горизонтали) от места бросания. Определить начальную скорость v_0 камня, время полета $t_П$ и максимальную высоту $H_М$ подъема камня над уровнем земли.

Дано:

α = 45°
S = 42 м
h = 2.1 м
----
v_0 - ?
$t_П$ - ?
$H_М$ - ?



Решение: Начало координат выберем (так удобнее) в точке бросания так, как это показано на рисунке. Тогда имеем:

$$X_0 = 0\ ,\ Y_0 = 0.$$

Движение камня можно рассмотреть как совокупность двух прямолинейных движений: равномерного движения (a_x=0) вдоль оси OX и равнопеременного ($a_y = -g$)- вдоль оси OY. Запишем закон движения и закон изменения скорости от времени в проекциях на оси OX и OY:

$$X = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t \qquad (1)$$

$$Y = v_0 \cdot sin\ \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad (2)$$

$$v_X = v_0 \cdot cos\ \alpha = const \qquad (3)$$

$$v_Y = v_0 \cdot sin\ \alpha - g \cdot t\ . \qquad (4)$$

При $t = t_n$ в точке падения $X = S$, $Y = -h$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид:

$$S = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t_n$$

$$-h = v_0 \cdot sin\ \alpha \cdot t_n - \frac{g \cdot t_n^2}{2}\ .$$

Решая эту систему, получим:

$$t_n = \sqrt{\frac{2(h + S \cdot tg\alpha)}{g}}\ , \qquad (5)$$

$$v_0 = \frac{S}{t_n \cdot cos\alpha}\ . \qquad (6)$$

Найдём максимальную высоту $H_М$:

$$H_м = h + Y_1 \ ,$$

где Y_1 - ордината камня в верхней точке траектории, что соответствует моменту времени $t = t_1$.

При $Y = Y_1$ имеем $v_y = 0$. Тогда из (4) находим:

$$0 = v_0 \cdot sin\ \alpha - g \cdot t_1$$

и
$$t_П = \frac{v_0 \cdot sin\ \alpha}{g} \ . \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (2), получим:

$$Y_1 = \frac{v_0^2 \cdot sin^2\alpha}{2g} \ ,$$

и окончательно:

$$H_м = h + \frac{v_0^2 \cdot sin^2\alpha}{2g} \ . \qquad (8)$$

Проверим единицы измерения в формулах (5),(6) и (8):

$$[t_n] = \sqrt{\frac{м + м}{м/с^{\ 2}}} = \sqrt{с^{\ 2}} = с$$

$$[v_0] = \frac{м}{с}$$

$$[H_М] = м + \frac{м^2/с^2}{м/с^2} = м + м = м \ .$$

Подставляя числовые данные в эти же формулы и производя вычисления, получим:

t_n = 3 с; v_0 = 20 м/с; $H_М$ = 12 м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1.1 Две прямые дороги пересекаются под углом α = 60°. От перекрёстка по ним удаляются машины: одна со скоростью v_1 = 60 км/ч ,другая - со скоростью v_2 = 80 км/ч. Определить скорости v' и v'' , с которыми одна машина удаляется от другой.

[122 км/ч; 72.2 км/ч]

1.2 Первую половину пути тело двигалось со скоростью v_1=2 м/с, вторую - со скоростью v_2 = 8 м/с. Определить среднюю скорость $v_{ср}$.

[3.2 м/с]

1.3 Из одного и того же места начали равноускоренно двигаться в одном направлении две точки, причем вторая начала свое движение через τ = 2 с после первой. Первая точка двигалась с начальной скоростью v_{01} = 1 м/с и ускорением a_1 = 2 м/с^2, вторая — с начальной скоростью v_{02}=10 м/с и ускорением a_2 = 1 м/с^2. Через какое время и на каком расстоянии от исходного положения вторая точка догонит первую.

[3.4 с, 15 м; 10.6 с, 123 м]

1.4 С какой высоты упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время τ = 0.1 с?

[5.6м]

1.5 Камень падает с высоты H = 1200 м. Какой путь пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

[150 м]

1.6 С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью v_0 = 5 м/с. Через τ = 2 с мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.

[9.6 м; -14.6 м/с]

1.7 Колесо катится по горизонтальной поверхности со скоростью v = 1 м/с без проскальзывания. Определить скорости (относительно дороги) точек колеса, лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров.

[2 м/с; 0; 1.4 м/с; 1.4 м/с]

1.8 Линейная скорость v_1 точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на ΔR=10 см ближе к оси, имеют линейную скорость v_2 = 2 м/с. Определить радиус R и частоту вращения n диска.

[0.3 м; 1.6 с$^{-1}$]

1.9 С башни высотой H = 25 м горизонтально бросили камень со скоростью v_0 = 15 м/с. Определить расстояние от основания башни до точки падения камня, его скорость в момент удара о землю и угол, образованный вектором конечной скорости с горизонтом.

[33.9 м; 26.7 м/с; ≈56°]

1.10 Тело, брошенное с башни в горизонтальном направлении со скоростью v_0 = 20 м/с упало на землю на расстоянии S (от основания башни)вдвое большем высоты H башни. Найти высоту башни.

[20.4 м]

1.11 Самолет, летевший на высоте h = 2940м со скоростью v = 360 км/ч, сбросил бомбу. За какое время t до прохождения над целью и на каком расстоянии от нее должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь.

[24.5 с; 2.45 км]

1.12 Снаряд, выпущенный из орудия под углом α = 30° к горизонту, дважды был на одной и той же высоте h: спустя время τ_1 = 10 с и τ_2 = 50 с после выстрела. Определить начальную скорость v_0 и высоту h.

[588 м/с; 2.45 км]

Контрольная работа №1

1. Три четверти своего пути автомобиль прошел со скоростью v_1 = 60 км/ч, остальную часть пути – со скоростью v_2=80 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?

2. Ширина реки 98 м. На что потребуется больше времени: проплыть вниз по течению 98 м и обратно или же переплыть реку туда и обратно перпендикулярно берегам? Решить задачу для частного случая, когда скорость пловца в стоячей воде 0.8 м/с, а скорость течения 0.6 м/с.

3. Два велосипедиста едут навстречу друг другу. Один, имея скорость 18 км/ч, поднимается в гору равнозамедленно с ускорением 20 см/с^2, другой, имея скорость 5.4 км/ч спускается равноускоренно с ускорением 0.2 м/с^2. Через какое время велосипедисты встретятся и какое перемещение совершит каждый из них до встречи, если расстояние между ними в начальный момент времени 130 м, причем второй выехал через 10 с после начала движения первого.

4. Ракета стартует с земли вертикально вверх с ускорением a = 40 м/с^2. Какой максимальной высоты она достигнет, если топливо для работы двигателей сгорает за время t = 2 мин? Через сколько времени после старта ракета упадёт на землю? Ускорение свободного падения считать постоянным и равным g = 10 м/с^2.

5. Два тела брошены из одной точки с одинаковой начальной скоростью, равной v_0 = 10 м/с. Первое тело брошено под углом α_1 = 30°, а второе - под углом α_2 = 60° к горизонту. Найти максимальную высоту подъёма для каждого тела тела. Чему равно расстояние между телами через t = 2 с после начала движения?

6. Линейная скорость точек окружности вращающегося диска равна 4 м/с, а точек, находящихся на расстоянии 10 см ближе к оси вращения 2 м/с. Найти угловую скорость диска.

Контрольная работа №1*

1. Два автомобиля движутся к перекрестку по дорогам, угол между которыми α = 60°. Скорости автомобилей v_1=20 м/с и v_2 = 25 м/с. В начальный момент времени автомобили находятся на расстояниях l_1 = 200 м и l_2 = 350 м от перекрестка соответственно. Определить, в какой момент времени расстояние между автомобилями будет минимальным и чему равно это расстояние.

2. Автомобиль проехал половину пути со скоростью 60 км/ч, оставшуюся часть пути он половину времени шел со скоростью 15 км/ч, а последний участок - со скоростью 45 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля на всем пути.

3. По наклонной доске пустили снизу вверх шарик. На расстоянии 30 см от начала пути шарик побывал дважды: через 1 с и через 2 с после начала движения. Определите начальную скорость и ускорение шарика, считая его постоянным.

4. Ракета стартует с Земли вертикально вверх с ускорением $\boldsymbol{a}$ = 20 м/с^2. Через некоторое время от ракеты отделяется обтекатель. Найти это время, если в момент падения обтекателя на Землю ракета находилась на высоте 40 км. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $\boldsymbol{g}$=10 м/с^2.

5. С какой скоростью v должен в момент старта ракеты вылететь снаряд из пушки, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением $\boldsymbol{a}$ = 10 м/с^2? Расстояние от пушки до места старта ракеты равно L = 3 км, пушка стреляет под углом α = 45° к горизонту.

6. Сравнить линейные скорости и центростремительные ускорения точек земной поверхности на экваторе и широте 60°. Радиус земли 6400 км.

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ.

Если инерциальная система отсчёта К(X,Y,Z) движется относительно системы К′(X′,Y′,Z′) вдоль оси X с постоянной скоростью $\vec{v}_O$ ($v_O << c$), а координатные оси в обеих системах нормальны, координаты точки связаны согласно преобразованиям Галилея:

$$X' = X - v_0 \cdot t,\quad Y' = Y,\quad Z' = Z,\quad t' = t, \qquad (2.1)$$

где t и t' - время, отсчитываемое соответственно в системах К и К′ ($t_0' = t_0 = 0$).

Скорости точки в обеих системах отсчёта связаны соотношением:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0 . \qquad (2.2)$$

Второй закон Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (2.3)$$

где $\vec{a}$ - ускорение, приобретаемое телом под действием равнодействующей силы $\vec{F}$; m - масса тела.

Векторному уравнению (2.3) соответствуют три скалярных уравнения в проекциях на координатные оси:

$$a_X = \frac{F_X}{m},\qquad a_Y = \frac{F_Y}{m},\qquad a_Z = \frac{F_Z}{m}. \qquad (2.3')$$

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной оси называется величина M, равная

$$M = F \cdot d, \qquad (2.4)$$

где F - модуль силы $\vec{F}$, приложенной к телу; d - плечо этой силы относительно данной оси.

Условия равновесия тела:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0,\qquad \sum_i \vec{M}_i = 0, \qquad (2.5)$$

где $\vec{F}_i$ - i-я внешняя сила, действующая на тело; $\vec{M}_i$ - момент этой силы относительно возможной оси вращения.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми две материальные точки взаимодействуют между собой, равны по модулю и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, проходящей через эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (2.6)$$

Модуль силы упругости:

$$F = -k \cdot x, \qquad (2.7)$$

где x - абсолютная деформация; k - коэффициент упругости (для пружины - коэффициент жёсткости).

Закон Гука:

$$F = \frac{E_{Ю} \cdot S}{l_O} \cdot \Delta l\ , \qquad (2.8)$$

где F - деформирующая сила, l_O- начальная длина тела, S- площадь его поперечного сечения, $E_Ю$ - модуль Юнга.
Модуль силы трения скольжения:

$$F = \mu \cdot N, \qquad (2.9)$$

где N - модуль силы нормальной реакции опоры, μ - коэффициент трения скольжения.

Модуль силы $\vec{F}$ гравитационного взаимодействия материальных точек массами m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии R друг от друга:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}\ , \qquad (2.10)$$

где G - гравитационная постоянная.
Сила тяжести:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}\ . \qquad (2.11)$$

Ускорение свободного падения:
а) у поверхности Земли:

$$g = G \cdot \frac{M_З}{R_З^2}\ , \qquad (2.12)$$

б) на высоте h над поверхностью Земли:

$$g_h = G \cdot \frac{M_З}{(R_З + h)^2}\ , \qquad (2.13)$$

где $M_З$ - масса Земли, $R_З$ - её радиус ($R_З >> h$); G - гравитационная постоянная.

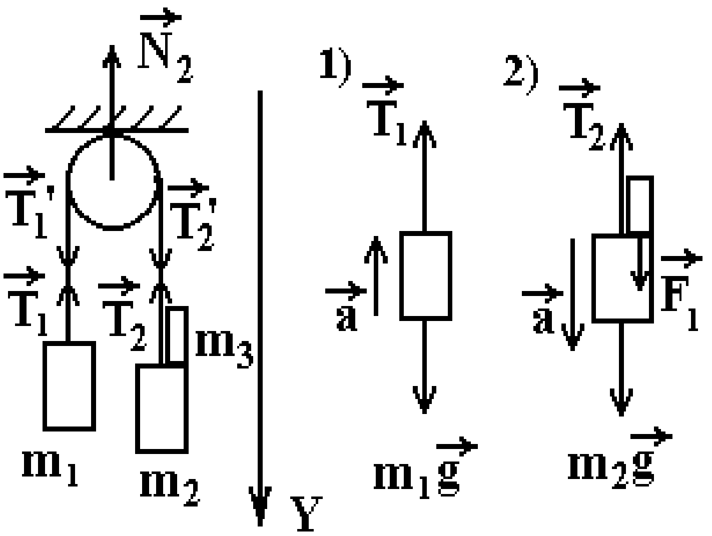
ПРИМЕР 2.1. Два груза массами по 0.2 кг каждый связаны невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок. Затем на один из них положили перегрузок массой 0.05 кг. Определить ускорение системы, силу натяжения нити, силу давления перегрузка на груз и силу давления на ось блока.

Решение:

Дано:

$m = m_1 = m_2 = 0.2$ кг
$m_3 = 0.05$ кг

T – ? F_1 – ? F_2 – ?
a – ?

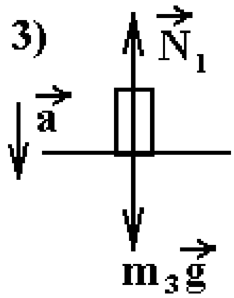


Укажем силы, действующие на каждое тело (см. рисунок). Запишем второй закон Ньютона для каждого движущегося тела:

$$\vec{T}_1 + m_1 \cdot \vec{g} = m_1 \cdot \vec{a} \qquad (1)$$

$$\vec{T}_2 + m_2 \cdot \vec{g} + \vec{F}_1 = m_2 \cdot \vec{a} \qquad (2)$$

$$\vec{N}_1 + m_3 \cdot \vec{g} = m_3 \cdot \vec{a} \qquad (3)$$



Из условия невесомости и нерастяжимости нити и на основании третьего закона Ньютона модули сил $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2'$ равны:

$$T_1 = T_1' = T_2' = T_2 = T. \qquad (4)$$

Кроме того, модули сил давления $\vec{F}_1$ и нормальной реакции $\vec{N}_1$ также равны на основании третьего закона Ньютона, т.е.

$$F_1 = N_1. \qquad (5)$$

Спроектировав векторные уравнения (1)-(3) на ось Y с учётом условий (4) и (5),получим:

$$\begin{cases} -T + mg = -ma \\ -T + mg + F_1 = ma \\ -F_1 + m_3 g = m_3 a \end{cases} \qquad (1\text{-}3)$$

Решение системы уравнений (1) - (3) даёт:

$$a = \frac{m_3}{2m + m_3} \cdot g \; ; \qquad F_1 = \frac{2m_3 \cdot m}{2m + m_3} \cdot g \; ; \qquad T = \frac{2m(m + m_3)}{2m + m_3} \cdot g \; .$$

Уравнение второго закона Ньютона для блока запишется в виде:

$$\vec{N}_2 + \vec{T}_1^{\,\prime} + \vec{T}_2^{\,\prime} = 0 \; , \qquad (6)$$

где $\vec{N}_2$ - сила нормальной реакции оси блока.
Проектируя (6) на ось Y и учтя (4), получим:

$$-N_2 + T + T = 0,$$

откуда

$$N_2 = 2T.$$

Но сила нормальной реакции $\vec{N}_2$, согласно третьему закону Ньютона, по модулю равна силе нормального давления на ось, поэтому

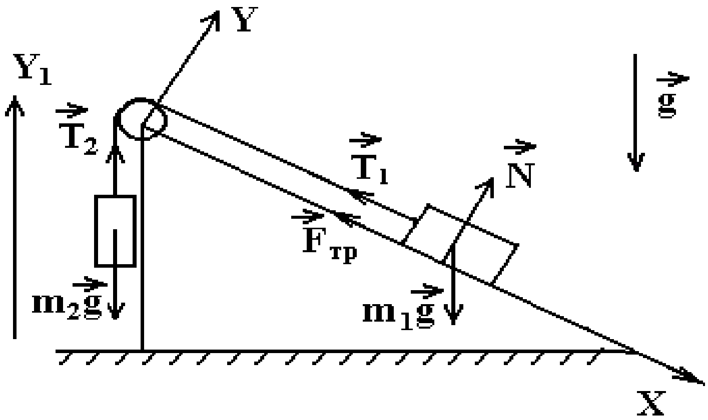
$$F_2 = N_2 = 2T = \frac{4m(m + m_3)}{2m + m_3} \cdot g \; .$$

Производя соответствующие вычисления, находим:
$a \approx 1.1$ м./с^2 ; T = 9.4 Н; F_1 = 0.44 Н; F_2 =18.8 Н.

<u>ПРИМЕР 2.2</u> На наклонной плоскости находится груз массой m_1 = 5 кг, связанный нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, с другим грузом массой m_2 = 2 кг. Коэффициент трения между грузом m_1 и плоскостью μ = 0.1; угол наклона плоскости α = 37°. Определить ускорение грузов.

<u>Дано:</u>

m_1 = 5 кг
m_2 = 2 кг
μ = 0.1
α = 37°
----
a - ?



<u>Решение:</u> Из условий нерастяжимости нити и невесомости нити и блока следует, что

$$a_1 = a_2 = a \quad \text{и} \quad T_1 = T_2 = T. \qquad (1)$$

Укажем силы, действующие на каждое из двух тел, как это сделано на рисунке. Здесь возникает вопрос о выборе направления силы трения, т.к. неизвестно направление движения системы. Поскольку сила трения не может изменить на-

правление движения на противоположное, то сначала найдём ускорение системы без учёта силы трения.
Тогда второй закон Ньютона в векторной форме для первого тела примет вид:

$$m_1 \cdot \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} = m_1 \cdot \vec{a}_1 , \qquad (2)$$

а для второго тела соответственно:

$$m_2 \cdot \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2 . \qquad (3)$$

Спроектировав уравнение (2) на оси X и У, а уравнение (3) на ось Y_1, с учётом условий (1) получим:

$$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - T = m_1 \cdot a \qquad (4)$$

$$N - m_1 \cdot g \cdot cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

и

$$- m_2 \cdot g + T = m_2 \cdot a . \qquad (6)$$

Совместное решение уравнений (4) и (6) приводит к результату:

$$a = g \cdot \frac{m_1 \cdot sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{9.8}{7} > 0 .$$

Проекция ускорения $\vec{a}$ на ось X положительна, это значит, что тело массы m_1 движется вниз по наклонной плоскости, следовательно, сила трения направлена вверх по наклонной плоскости (как это показано на рисунке).

Теперь можно, не возвращаясь к векторным уравнениям, ввести проекцию силы трения в левую часть уравнения (4). При этом следует учесть, что:

$$F_{тр} = \mu \cdot N,$$

где μ - коэффициент трения о плоскость, N - сила нормальной реакции опоры.
Тогда

$$\begin{aligned} &m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - T - \mu \cdot N = m_1 \cdot a \\ &N - m_1 \cdot g \cdot cos\alpha = 0 \qquad (7) \\ &m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot a . \end{aligned}$$

Совместное решение системы (7) даёт

$$a = g \cdot \frac{m_1 \cdot (sin\alpha - \mu \cdot cos\, \alpha) - m_2}{m_1 + m_2} . \qquad (8)$$

Проверим единицы:

$$[a] = \frac{м}{с^2} \cdot \frac{кг}{кг} = \frac{м}{с^2}$$

Вычисления по формуле (8) дают:

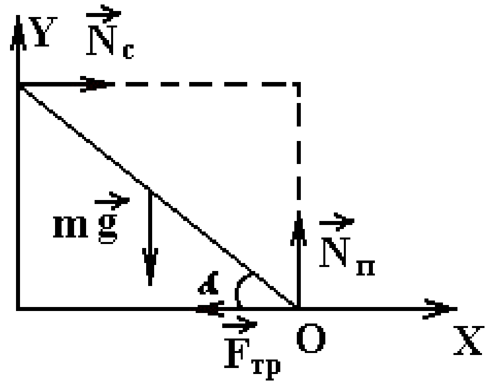
$$a = 0.84 \frac{м}{с^2} .$$

ПРИМЕР 2.3 Однородная цилиндрическая балка опирается одним концом о вертикальную гладкую стену, а другим - о горизонтальный шероховатый пол. Под каким наименьшим углом α_0 к полу можно поставить балку, чтобы она не соскальзывала? Коэффициент трения скольжения балки о пол $\mu = 0.5$.

Дано:

$\mu = 0.5$

α_0 - ?



Решение:

На балку действуют: сила тяжести $m\vec{g}$; сила нормальной реакции $\vec{N}_n$ и сила трения покоя $\vec{F}_{TP}$ со стороны пола.

При скольжении балки $F_{тр}=\mu \cdot N_П$, поэтому балка не будет скользить при условии

$$F_{тр} \le \mu \cdot N_П. \qquad (1)$$

Выберем систему координат, как показано на рисунке, и запишем первое условие равновесия в проекциях на координатные оси:

$$N_C - F_{тр} = 0, \qquad (2)$$

$$N_п - m g = 0, \qquad (3)$$

где m - масса балки.

Запишем далее второе условие равновесия - равенство нулю суммы моментов сил относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа (сразу учтём тот факт, что моменты сил $\vec{F}_{TP}$ и $\vec{N}_п$ равны нулю):

$$-N_C \cdot l \cdot \sin\alpha + mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha = 0, \qquad (4)$$

где l - длина балки.

Из (4) находим:

$$N_C = \frac{mg}{2 \cdot tg\alpha}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и учитывая (3) и (1), находим:

$$\frac{1}{2 \cdot tg\alpha} \le \mu,$$

откуда

$$tg\,\alpha \ge \frac{1}{2\mu}$$

или

$$\alpha \ge arctg\frac{1}{2\mu}\ . \qquad (6)$$

Формула (6) выражает те значения угла α, при которых скольжение отсутствует, а наименьший угол α_0, очевидно, равен

$$\alpha_O = arctg\frac{1}{2\mu}\ ,$$

$$\alpha_O = arctg\,1 = 45^\circ\ .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

2.1 На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязан шнур, ко второму концу которого приложена сила F = 10 Н, направленная параллельно поверхности стола. Найти ускорение бруска.

[2.5 м/с^2]

2.2 На столе стоит тележка массой m_1 = 4 кг. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок. С каким ускорением будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой m_2 = 1 кг?

[1.96 м/с^2]

2.3 К пружинным весам подвешен невесомый блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами m_1 = 1.5 кг и m_2 = 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов?

[39.2 Н]

2.4 Два бруска массами m_1 = 1 кг и m_2 = 4 кг, соединённые шнуром, лежат на гладком горизонтальном столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F = 15 Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу F приложить к первому бруску? Ко второму бруску?

[3 м/с^2; 3 Н; 12 Н]

2.5 На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой m = 4 кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикреплённые к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. Найти ускорение, с которым движется брусок, и силу натяжения каждого из шнуров.

[1.4 м/с^2; 11.2 Н; 16.8 Н]

2.6 Наклонная плоскость с углом наклона α = 45° имеет длину l = 5 м. Тело, двигаясь равноускоренно без начальной скорости, соскользнуло с этой плоскости за время t = 2 с. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость.

[0.65]

2.7 Шайба, пущенная по горизонтальной поверхности льда с начальной скоростью v_0 = 20 м/с, остановилась через t=40 с. Найти коэффициент трения μ шайбы о лёд.

[0.05]

2.8 Брусок массой m_2 = 5 кг может свободно скользить по горизонтальной поверхности без трения. На нём находится другой брусок массой m_1 = 1 кг. Коэффициент трения между брусками μ = 0.3. Определить максимальное значение силы

F_{max} , приложенной к нижнему бруску, при которой верхний брусок начнёт соскальзывать.

[≈18 Н]

2.9 Груз массой m = 4 кг подвешен на пружине, коэффициент упругости которой k = 1 кН/м, и находится в равновесии. Какую дополнительную деформацию Δx пружины вызовет движение её точки подвеса вертикально вверх с ускорением a = 4 м/с^2?

[≈0.016 м]

2.10 Небольшой шарик, подвешенный на нерастяжимой нити длиной l = 0.6 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Нить образует угол α = 45° с вертикалью. Определить линейную скорость шарика и период обращения.

[≈1.3 м/с; ≈2.1]

2.11 Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите с линейной скоростью v = 8 км/с. Найти радиус орбиты спутника. Считать известным радиус Земли
$R_З$ = 6.4·10^3 км.

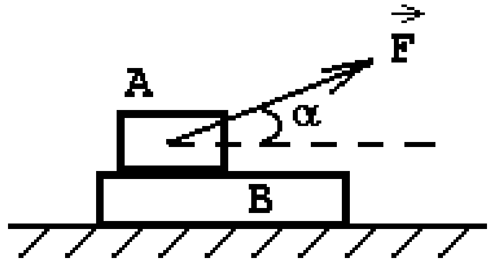
[≈6.4·10^6 м]

2.12 На каком расстоянии от дна находится центр тяжести тонкостенного цилиндрического стакана высотой H = 12 см и диаметром D = 8 см, если толщина дна в два раза больше толщины стенок?

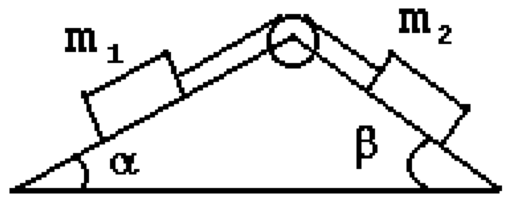
[4.5 см]

Контрольная работа № 2.

1. Бруски А и В массами соответственно 1 кг и 3 кг находятся на столе (см. рис.). К бруску А приложена сила 10 Н, направленная под углом 30° к горизонту. Найти ускорения брусков, если коэффициент трения брусков друг о друга равен 0.2, а коэффициент трения бруска В о стол равен 0.1



2. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы α=30° и β=45°. Гири равной массы m_1 = m_2 = 1 кг соединены нитью, перекинутой через блок. Найти: а) ускорение a, с которым движутся гири; б) силу натяжения нити T. Коэффициент трения гирь о наклонные плоскости μ = 0.1. Трением в блоке пренебречь.



3. На концах нерастяжимой невесомой нити, перекинутой через невесомый неподвижный блок, подвешены на одинаковой высоте два груза массой m = 100 г каждый. Если на один из грузов положить перегрузок, вся система придёт в движение, и через t = 3 с расстояние между грузами станет равным h = 2 м. Определить массу m_0 перегрузка и силу N, с которой он давит на груз.

4. Диск радиусом R = 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит небольшой кубик. При какой частоте вращения кубик соскользнёт с диска, если коэффициент трения μ = 0.4?

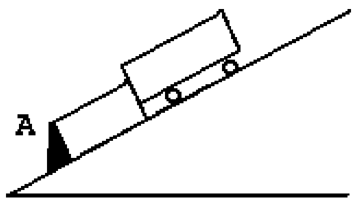
5. Вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиуса $4.7\cdot10^6$ км со скоростью 10 км/с обращается спутник. Определить среднюю плотность планеты, если ее радиус 150000 км. Гравитационная постоянная $6.67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

6. Под каким наибольшим углом к вертикальной стене можно приставить лестницу, чтобы она находилась в равновесии, если коэффициенты трения между лестницей и полом μ_1= 0.5 , а между лестницей и стеной μ_2 = 0.2?

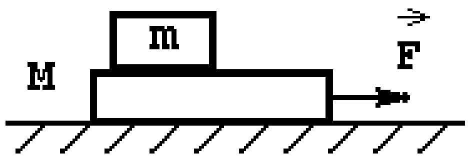
Контрольная работа № 2*.

1. На тело массой 2 кг, покоящееся на горизонтальной опоре, начинает действовать сила F, направленная под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость 0.2. Найти ускорение груза в трех случаях:
а) F = 0.2 Н; б) F = 20 Н; в) F = 200 Н.

2. Тележка и ящик с равными массами удерживаются упором A на наклонной плоскости высотой 1 м и длиной 3 м. Упор убирают. Во сколько раз при этом уменьшается сила давления тележки на ящик? Коэффициент трения ящика о наклонную плоскость равен 0.2, а тележка движется без трения. Поверхности соприкосновения ящика и тележки гладкие и перпендикулярны поверхности наклонной плоскости.



3. На середине доски массой M=2 кг, лежащей на горизонтальной поверхности, покоится груз массой m = 1 кг. Известно, что если к доске приложить силу F =24 Н, направленную горизонтально, то груз соскользнет с нее за время t=1 с. За какое время груз соскользнет с доски, если силу F приложить к грузу? Коэффициент трения между грузом и доской μ_1=0.5, между доской и поверхностью μ_2=0.2, ускорение свободного падения g=10 м/с^2.



4. Космический аппарат массой m = 10 т движется по круговой орбите на высоте h = 200 км над Землей, оставаясь все время над одной и той же точкой земной поверхности, находящейся на широте 60 градусов (широта отсчитывается от экватора). Найти силу тяги двигателей аппарата. Изменением массы аппарата пренебречь. Считать известным ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли g=10 м/с^2 и радиус Земли R = 6400 км.

5. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты ρ=3000 кг/м^3. Определить период обращения планеты вокруг собственной оси, считая, что планета имеет форму шара. Гравитационная постоянная G = 6.67·10^{-11} Н·м^2/кг^2.

6. Для подъема тяжелого цилиндрического катка радиуса $\sqrt{2}$ м на прямоугольную ступеньку пришлось приложить к его оси горизонтально направленную силу, равную силе тяжести катка. Определить максимальную высоту ступеньки.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ.

Импульс тела массы m, движущегося со скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}. \qquad (3.1)$$

Закон сохранения импульса:

$$\sum_i \vec{p}_i = const, \qquad (3.2)$$

где $\vec{p}_i$ - импульс i-го тела, входящего в замкнутую систему.

При взаимодействии двух тел выражение (3.2) запишется в виде:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_{21} = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2', \qquad (3.2')$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ - скорости тел в начальный момент времени (до взаимодействия), $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ - скорости тел в момент времени, принятый за конечный (после взаимодействия).

Кинетическая энергия тела массы m, движущегося поступательно со скоростью $\vec{v}$:

$$E_K = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3.3)$$

Потенциальная энергия тела массы m, находящегося в поле силы тяжести:

$$E_П = mgh, \qquad (3.4)$$

где g - ускорение свободного падения, h - высота тела над уровнем, принятым за нулевой ($h << R_З$, $R_З$ - радиус Земли).

Потенциальная энергия упругой деформации:

$$E_n = \frac{kx^2}{2} \qquad (3.5)$$

или в случае деформированной пружины:

$$E_n = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \qquad (3.5')$$

где k - жёсткость пружины, Δl - величина удлинения (или сжатия) пружины.

Работа постоянной силы $\vec{F}$:

$$A = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha, \qquad (3.6)$$

где Δr - модуль вектора перемещения $\Delta\vec{r}$, α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$.

Мощность:

$$N = \frac{A}{\Delta t}, \qquad (3.7)$$

где A - работа силы, совершённая за конечный промежуток времени Δt.

Мгновенная мощность:

$$\boldsymbol{N = F \cdot v \cdot \cos\ \alpha}, \qquad (3.8)$$

где $\boldsymbol{F}$ - модуль силы, v - модуль мгновенной скорости, α - угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{v}$.

Закон сохранения механической энергии:

$$E = E_K + E_П = const, \qquad (3.9)$$

где $\boldsymbol{E}$ - полная механическая энергия замкнутой системы тел.

Работа $\boldsymbol{A}$ может быть представлена как мера изменения кинетической энергии тела:

$$A = \Delta E_K = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (3.10)$$

Давление, создаваемое силой $\vec{F}$, равномерно распределённой по поверхности:

$$p = \frac{F}{S}, \qquad (3.11)$$

где $\boldsymbol{S}$ - площадь поверхности, расположенной перпендикулярно к силе.

Гидростатическое давление внутри жидкости (или газа) на глубине $\boldsymbol{h}$:

$$p = \rho \cdot g \cdot h, \qquad (3.12)$$

где ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения.

Полное давление внутри покоящейся жидкости:

$$p = p_O + \rho \cdot g \cdot h, \qquad (3.13)$$

где $\boldsymbol{p_0}$ - атмосферное давление.

Модуль силы Архимеда, действующей на тело, погружённое в жидкость (или газ):

$$F_A = \rho_Ж \cdot g \cdot V_П, \qquad (3.14)$$

где $\rho_ж$ - плотность жидкости, $\boldsymbol{V_П}$ - объём погружённой части тела.

Уравнение Бернулли:

$$\boldsymbol{p} + \rho \cdot \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{h} + \frac{\rho \cdot \boldsymbol{v}^2}{2} = \boldsymbol{const}, \qquad (3.15)$$

где ρ – плотность невязкой несжимаемой жидкости, $\boldsymbol{v}$ - модуль скорости течения жидкости в сечении трубки, находящейся на высоте $\boldsymbol{h}$ от условно выбранного уровня, $\boldsymbol{p}$ – давление в том же сечении трубки.

Для горизонтальной трубки ($\boldsymbol{h = const}$):

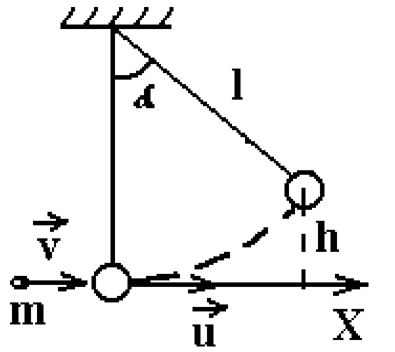
$$p + \frac{\rho \cdot v^2}{2} = const. \qquad (3.15')$$

ПРИМЕР 3.1 Горизонтально летящая пуля массой m = 10 г попадает в покоящийся деревянный шар массой M = 2 кг, подвешенный на нерастяжимой нити длиной l = 1 м и застревает в нём. Определить угол отклонения нити (от вертикали), если скорость пули равна v = 600 м/с.

Дано:

m = 10 г
l = 1 м
M = 2 кг
v = 600 м/с

α - ?



Решение: Если пренебречь сопротивлением воздуха, то систему "шар-Земля" можно считать замкнутой. Это означает, что к данной системе можно применить закон сохранения энергии и импульса. Поместим начало координат в центре покоящегося шара, а ось X направим так, как это показано на рисунке. Далее запишем закон сохранения импульса (удар неупругий) в проекциях на ось X:

$$m \cdot v_x = (m + M) \cdot u_x, \qquad (1)$$

где v_x - проекция вектора скорости $\vec{v}$ пули на ось X ($v_x=v$), u_x - проекция скорости $\vec{u}$ шара (с пулей) ($u_x=u$).

Принимая за "нулевой" уровень потенциальной энергии положение покоящегося шара, запишем закон сохранения механической энергии после удара:

$$\frac{(m+M)\cdot u^2}{2} = (m+M)\cdot g \cdot h,$$

или

$$\frac{u^2}{2} = g \cdot h, \qquad (2)$$

где h - высота поднятия шара, g - ускорение свободного падения.

Из рисунка легко найти угол α, а именно:

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l}. \qquad (3)$$

Выразив скорость u из (1) и подставив в (2), получим:

$$h = \frac{m^2 \cdot v^2}{(m+M)^2 \cdot 2g}.$$

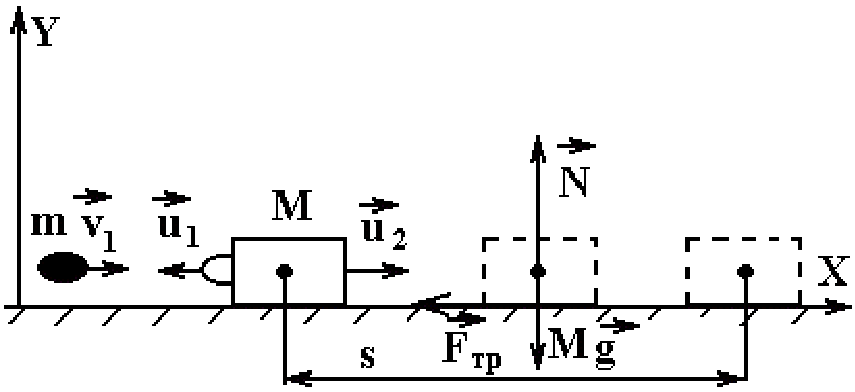
Тогда из (3) окончательно находим:

$$\alpha = arccos\left(1-\frac{m^2 \cdot v^2}{(m+M)^2 \cdot 2gl}\right).$$

ПРИМЕР 3.2 В стальной кубик массой M=1 кг, покоящийся на горизонтальной поверхности, попадает пуля массой m=10 г, летевшая горизонтально со скоростью v_1=500 м/с, и упруго отскакивает обратно. Какой путь после удара пройдёт кубик до полной остановки, если коэффициент трения о поверхность μ=0.1 ?

Дано:

M = 1 кг
m = 10 г = 0.01 кг
v_1 = 500 м/с
μ = 0.1
----
s - ?



Решение:

Так как силы, возникающие в процессе взаимодействия (удара) неизвестны, то применение второго закона Ньютона для решения задачи невозможно. Применим законы сохранения импульса и энергии. Здесь надо заметить, что физическая система "пуля-кубик" в целом хоть и не замкнута, но в направлении движения тел её можно считать замкнутой. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Землёй, а ось OX направим, как показано на рисунке. Тогда, по закону сохранения импульса, имеем:

$$m \cdot \vec{v}_1 = m \cdot \vec{u}_1 + M \cdot \vec{u}_2, \qquad (1)$$

где $\vec{v}_1$ - вектор скорости пули до взаимодействия, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ - векторы скоростей пули и кубика соответственно после взаимодействия, m и M - массы пули и кубика соответственно.

Проектируя векторное уравнение (1) на направление OX, получаем:

$$m \cdot v_1 = -m \cdot u_1 + M \cdot u_2. \qquad (2)$$

По закону сохранения механической энергии (потенциальная энергия системы предполагается неизменной):

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot u_1^2}{2} + \frac{M \cdot u_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Решим систему уравнений (2) - (3). Перепишем её в виде:

$$\begin{cases} m \cdot (v_1 + u_1) = M \cdot u_2 \\ m \cdot (v_1^2 - u_1^2) = M \cdot u_2^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m\cdot(v_1+u_1)=M\cdot u_2 \\ m\cdot(v_1-u_1)(v_1+u_1)=M\cdot u_2^2 \end{cases} \qquad (2' - 3')$$

Поделив (3′) на (2′), получаем:

$$v_1-u_1=u_2.$$

Подставляя последнее выражение в (2), окончательно получаем:

$$u_2=\frac{2m\cdot v_1}{M+m}. \qquad (4)$$

К дальнейшему движению кубика (после взаимодействия) применим второй закон Ньютона. На кубик действуют: сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{TP}$. Последние две силы связаны соотношением:

$$F_{Tm}=\mu\cdot N, \qquad (5)$$

где μ - коэффициент трения кубика о плоскость.
Тогда имеем:

$$\begin{cases} -F_{TP}=M\cdot a \\ N-Mg=0 \end{cases} \qquad (6)$$

Решая эту систему с учётом (5), получаем:

$$a=-\mu\cdot g. \qquad (7)$$

Воспользуемся кинематической формулой:

$$u_к^2-u_2^2=2a\cdot s, \qquad (8)$$

где a - ускорение кубика, s - пройденный им путь до остановки, u_K - его конечная скорость (u_K = 0).
Решая совместно (4), (7) и (8), окончательно получаем:

$$s=\frac{2v_1^2}{\mu\cdot g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2.$$

Последнее выражение можно упростить, если учесть, что $m<<M$. Тогда

$$s=\frac{2m^2\cdot v_1^2}{\mu\cdot g\cdot M^2}.$$

Проверим единицы:

$$[s]=\frac{кг^2\cdot м^2/с^2}{\frac{м}{с^2}\cdot кг^2}=м$$

Произведём вычисления:

$$s=\frac{2\cdot 10^{-4}\cdot 25\cdot 10^4}{0.1\cdot 10\cdot 1}=50\ (м)$$

ПРИМЕР 3.3 Полый медный шар весит в воздухе 2.6 Н, а в воде - 2.2 Н. Определить объём внутренней полости шара. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

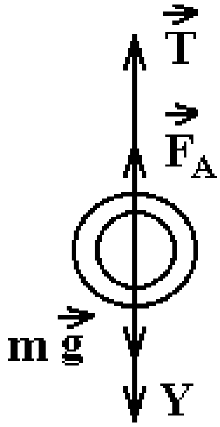
Дано:

$P = 2.6$ Н
$P' = 2.2$ Н
$\rho_М = 8.9 \cdot 10^3$ кг/м^3
$\rho_В = 1.0 \cdot 10^3$ кг/м^3
$g = 10$ м/с^2

$V_П$ - ?

Решение:

При взвешивании в воде на шар действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения $\vec{T}$ нити, на которой шар подвешен к динамометру (равная по модулю весу P′ шара в воде); выталкивающая сила Архимеда $\vec{F}_A$. Так как шар находится в равновесии в воде, то первое условие равновесия запишется в виде:



$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A = 0. \qquad (1)$$

Проектируя все силы на ось Y (см. рисунок) , вместо (1) получим:

$$mg - T - F_A = 0,$$

или с учётом сделанных выше замечаний

$$P - P' - F_A = 0. \qquad (2)$$

Объём полости шара:

$$V_П = V - V_М , \qquad (3)$$

где V - объём всего шара, $V_М$ - объём меди.
Далее имеем:

$$P = mg = \rho_M \cdot V_M \cdot g,$$

откуда:

$$V_M = \frac{P}{\rho_M \cdot g}. \qquad (4)$$

С другой стороны:

$$F_A = \rho_B \cdot g \cdot V \quad \text{или} \quad V = \frac{F_A}{\rho_B \cdot g},$$

и тогда из (2) получим:

$$V = \frac{P - P'}{\rho_B \cdot g}. \qquad (5)$$

Подставляя (5) и (4) в (3), окончательно находим:

$$V_П = \frac{P - P'}{\rho_B \cdot g} - \frac{P}{\rho_M \cdot g} = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{P - P'}{\rho_B} - \frac{P}{\rho_M} \right).$$

Произведем вычисления:

$$V_П = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2.6-2.2}{1.0\cdot10^3}-\frac{2.6}{8.9\cdot10^3}\right)\approx 1.1\cdot10^{-5}\ \text{м}^3$$

Ответ: $V_П = 1.1\cdot10^{-5}\ \text{м}^3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

3.1 Шар массой m_1=10 кг, движущийся со скоростью v_1=4 м/с, сталкивается с шаром массой m_2=4 кг, скорость которого v_2=12 м/с. Считая удар неупругим, найти скорость шаров после удара в двух случаях: 1) шар массой m_1 догоняет шар массой m_2, движущийся в том же направлении;2) шары движутся навстречу друг другу.

[6.3 м/с;-0.57 м/с]

3.2 Рыбак, находящийся в неподвижной лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние переместится лодка относительно воды, если масса человека m_1=70 кг , масса лодки m_2=140 кг, длина лодки l= 3 м.

[1 м]

3.3 На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием M=15 т. Орудие стреляет вверх под углом α = 60° к горизонту. С какой скоростью покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда m=20 кг и он вылетает со скоростью v=600 м/с?

[0.4 м/с]

3.4 Снаряд массой m=10 кг имел скорость v=200 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой m_1=3 кг получила скорость u_1=400 м/с в прежнем направлении. Найти скорость u_2 большего осколка.

[114 м/с]

3.5 Вычислить работу A, совершаемую при равноускоренном подъёме груза массой m=100 кг на высоту h=4 м за время t=2 с.

[4.7 кДж]

3.6 Камень брошен вверх под углом α = 60° к горизонту. Кинетическая энергия камня в момент бросания $E_{0К}$= 20 Дж. Определить кинетическую $E_{1К}$ и потенциальную $E_{1П}$ энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

[5 Дж; 15 Дж]

3.7 Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. На высоте h=9.8 м потенциальная энергия тела стала равной его кинетической энергии на этой высоте. Найти начальную скорость v_o.

[19.6 м]

3.8 При выстреле из орудия снаряд массой m_1=10 кг получает кинетическую энергию $E_{1К}$=1.8 МДж. Определить кинетическую энергию $E_{2К}$ ствола орудия вследствие отдачи, если масса ствола орудия m_2= 600 кг.

[30 кДж]

3.9 Пуля массой m=10 кг, летевшая горизонтально со скоростью v_1=600 м/с, ударилась в свободно подвешенный деревянный брусок массой M=5 кг и застряла в нём, углубившись на s=10 см. Найти силу сопротивления (считая её постоянной) движению пули.

[≈18 кН]

3.10 В деревянный шар массой M=5 кг, подвешенный на нити длиной l=20 см, попадает пуля массой m=10 г, летевшая горизонтально, и застревает в нём. Найти скорость пули, если вследствие удара нить отклонилась от вертикали на угол α=60°.

[701 м/с]

3.11 С какой высоты должно падать тело, имеющее плотность $\rho = 0.4 \cdot 10^3$ кг/м^3, чтобы оно погрузилось в воду на глубину h=6 см ? Сопротивлением воды и воздуха пренебречь.

[9 см]

3.12 В закрытый цилиндрический сосуд налиты ртуть и поверх ртути масло, масса которого в два раза меньше массы ртути. Общая высота жидкостей H=30 см. Вычислить давление на дно сосуда. Плотность ртути и масла равны соответственно ρ_1=13.6 $\cdot 10^3$ кг/м^3 и ρ_2=0.9 $\cdot 10^3$ кг/м^3.

[7 кПа]

Контрольная работа № 3.

1. На горизонтальном полу стоит лёгкая тележка длиной $l=2.5$ м, на одном конце которой стоит человек. Масса человека $M=60$ кг, масса тележки $m=40$ кг. С какой скоростью относительно пола будет двигаться тележка, если человек перейдёт на другой конец тележки со скоростью $v=1$ м/с относительно неё. На какое расстояние переместится тележка за это время ?

2. Вычислить работу, необходимую для поднятия груза массой $m=100$ кг по наклонной плоскости с ускорением $a=1$ м/с^2. Длина наклонной плоскости $l=2$ м, угол наклона $\alpha = 30°$. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0.1$.

3. По горизонтальной опоре без трения катится со скоростью 2 м/с тележка с песком массой 200 кг. С высоты 1 м на тележку падает без начальной скорости мешок с песком массой 100 кг. Удар неупругий. На другую такую же тележку падает мешок массой 50 кг. С какой высоты он падал, если в обоих случаях выделилось одинаковое количество теплоты. Принять $g=10$ м/с^2.

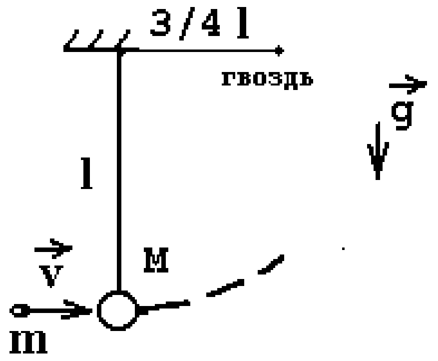
4. Два шара массами $m_1=10$ кг и $m_2=15$ кг подвешены на нитях длиной $l=2$ м так, что шары соприкасаются между собой. Меньший шар был отклонён на угол $\alpha=60°$ и отпущен. На какой максимальный угол отклонятся от вертикали нити после абсолютно неупругого удара ?

5. Небольшой кубик скользит с вершины гладкой полусферы радиуса $R=60$ см. На какой высоте от основания полусферы кубик оторвётся от поверхности ?

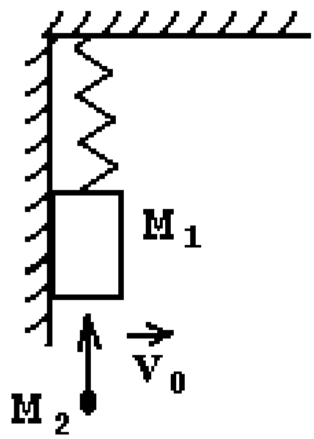
6. Железный шар плавает в ртути. На сколько процентов своего объёма уменьшится погружение шара в ртуть, если поверх ртути налить слой воды, полностью покрывающий шар ?

Контрольная работа № 3*.

1. Шар массой M = 1 кг висит на нерастяжимой невесомой нити длиной l=1 м. На расстоянии 3/4l от точки подвеса на одной горизонтали с ней вбит гвоздь. В шар попадает горизонтально летящая пуля массой m = 10 г и застревает в нем. Какова должна быть минимальная скорость пули для того, чтобы шар с застрявшей в нем пулей сделал вокруг гвоздя полный оборот? Принять g=10 м/с^2.

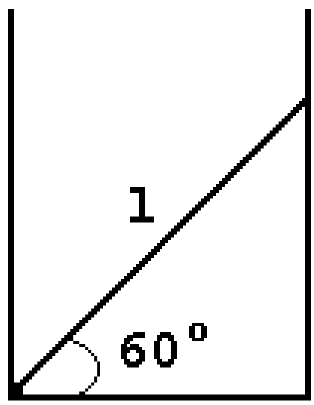


2. На пружине с коэффициентом жесткости 200 Н/м висит груз массой M_1 = 2 кг, касающийся гладкой стены. В груз попадает пуля массой M_2 = 10 г, летящая со скоростью 100 м/с и застревает в нем. Найти наибольшую высоту, на которую поднимается груз.



3. Две пружины одинаковой длины, имеющие соответственно жесткость равную 10^3 Н/м и $2{\cdot}10^3$ Н/м, соединены между собой концами (параллельно). Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины на 0.01 м? Чему будет равна эта работа, если пружины будут соединены между собой только одним концом (последовательно)?

4. От удара молота копра массой 50 кг, падающего свободно с высоты 4 м, свая массой 150 кг погружается в грунт на 10 см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар неупругим. Принять g=10 м/с^2.



5. Тонкая палочка из материала с плотностью ρ_1=$0.4{\cdot}10^3$ кг/м^3 длиной l=40 см прикреплена шарнирно ко дну цилиндрического стакана, опираясь другим концом на гладкую стенку так, что угол между палочкой и дном равен 60°. Найти минимальную массу воды, которую нужно налить в сосуд, чтобы палочка оторвалась от правой стенки. Плотность воды $\rho_2=1.0\cdot10^3$ кг/м^3

6. Два вертикальных цилиндрических сосуда диаметрами $d_1=2$ см и $d_2=4$ см соединены внизу очень тонкой трубкой с краном, который вначале закрыт. В сосуд меньшего диаметра наливают 100 г воды, а в сосуд большего - 160 г масла. Как изменится уровень масла при открывании крана? Плотность масла $0.8\cdot10^3$ кг/м^3, воды - $1.0\cdot10^3$ кг/м^3.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$pV = \frac{2}{3} E_K, \qquad (4.1)$$

где p - давление газа, V - объём, E_K - суммарная кинетическая энергия поступательного движения молекул газа:

$$E_K = \sum_i \frac{mv_i^2}{2}. \qquad (4.2)$$

Здесь m - масса каждой из N одинаковых молекул, v_i - скорость i-ой молекулы.

Давление идеального газа рассчитывается по формуле:

$$p = nkT, \qquad (4.3)$$

где n - концентрация молекул газа, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура газа.

Уравнение Менделеева-Клапейрона (уравнение состояния идеального газа)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT, \qquad (4.4)$$

где p - давление газа, V - объём, m - масса газа, μ- молярная масса газа, R - универсальная газовая постоянная, T - абсолютная температура, ν- количество вещества.

Связь универсальной газовой постоянной с постоянной Больцмана:

$$R = N_A \cdot k, \qquad (4.5)$$

где N_A - число Авогадро.

Газовые законы для изопроцессов:

а) закон Бойля-Мариотта ($T = const$, $m = const$ - изотермический процесс)

$$pV = const \qquad (4.6)$$

или для любых двух состояний газа

$$p_1V_1 = p_2V_2. \qquad (4.6')$$

б) закон Гей-Люссака ($p = const$, $m = const$ - изобарный процесс)

$$V_t = V_0(1 + \alpha_V t) \qquad (4.7)$$

или

$$\frac{V}{T} = const. \qquad (4.7')$$

Для двух состояний газа:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \qquad (4.7'')$$

В (4.7) α_V - термический коэффициент объёмного расширения, V_0 - объём газа при t_0=0°С.

в) закон Шарля (V = $const$, m = $const$ - изохорический процесс)

$$p_t = p_0(1+\alpha_p t) \qquad (4.8)$$

или
$$\frac{p}{T} = const. \qquad (4.8')$$

Для двух состояний газа:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \qquad (4.8'')$$

Объединённый газовый закон (m = $const$)

$$\frac{pV}{T} = const \qquad (4.9)$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}. \qquad (4.9')$$

Закон Дальтона для смеси газов (не взаимодействующих друг с другом):

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n, \qquad (4.10)$$

где p - давление смеси газов, p_i - парциальное давление i- го компонента смеси, n - число компонентов смеси.

Молярная масса смеси газов:

$$\mu_C = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n}, \qquad (4.11)$$

где m_i - масса i- го компонента, ν_i - количество вещества того же компонента.

Первый закон (начало) термодинамики:

$$Q = \Delta U + A, \qquad (4.12)$$

где Q - количество теплоты, полученное телом (системой); ΔU - изменение внутренней энергии тела, A - работа, совершённая телом (системой) над внешними силами.

Этот же закон можно записать в другом виде:

$$\Delta U = A' + Q, \qquad (4.12')$$

где A' - работа, совершённая над телом (системой) внешними силами.

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа:

$$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT, \qquad (4.13)$$

где m - масса газа, μ - молярная масса газа, R - универсальная газовая постоянная, T - абсолютная температура.
Работа, совершаемая газом при изобарном расширении:

$$A = p \cdot (V_2 - V_1) = p \cdot \Delta V, \qquad (4.14)$$

где V_1 и V_2 начальный и конечный объёмы газа, p - давление газа.
Количество теплоты, необходимое для нагревания тела массой m от температуры T_1 до температуры T_2, находится по формуле:

$$Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot c \cdot \Delta T = C \cdot \Delta T, \qquad (4.15)$$

где c - удельная теплоёмкость вещества, $C = m \cdot c$ - теплоёмкость вещества.
Количество теплоты, необходимое для расплавления кристаллического вещества массы m,

$$Q = \lambda \cdot m, \qquad (4.16)$$

где λ - удельная теплота плавления.
Количество теплоты, необходимое для превращения жидкости массы m в пар:

$$Q = r \cdot m, \qquad (4.17)$$

где r – удельная теплота парообразования.
Количество теплоты, выделяемой при полном сгорании топлива массы m:

$$Q = q \cdot m, \qquad (4.18)$$

где q - удельная теплота сгорания.
КПД теплового двигателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \qquad (4.19)$$

где A - работа, совершаемая рабочим телом двигателя; Q_1 - количество теплоты, полученное от нагревателя; Q_2 - количество теплоты, переданное рабочим телом холодильнику.
Максимальное значение КПД теплового двигателя равно КПД тепловой машины, работающей по обратимому циклу:

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \qquad (4.20)$$

где T_1 - температура нагревателя, T_2 - температура холодильника.
Относительная влажность воздуха:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_H} \cdot 100\% , \qquad (4.21)$$

где ρ - абсолютная влажность при данной температуре, $\rho_н$ - плотность насыщенного водяного пара при той же температуре.

Относительную влажность можно определить другим способом:

$$\varphi = \frac{p}{p_H} \cdot 100\% , \qquad (4.22)$$

где p - парциальное давление водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре; $p_н$ - парциальное давление насыщенного пара при той же температуре.

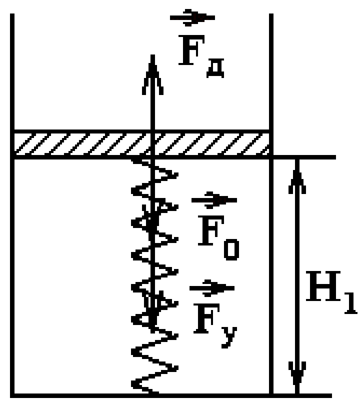
Сила поверхностного натяжения жидкости:

$$F = \sigma \cdot l , \qquad (4.23)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения, l - длина границы поверхностного слоя жидкости.

ПРИМЕР 4.1 В вертикально расположенном цилиндре под невесомым поршнем находится газ массы m. Поршень удерживается пружиной жёсткости k. При температуре T_1 поршень расположен на высоте H_1 от дна цилиндра. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты H_2? Молярная масса газа равна μ .

Решение:



Сделаем чертёж, укажем силы, действующие на поршень в положении равновесия (при температуре T_1). На поршень действуют: сила давления $\vec{F}_Д$ со стороны газа, равная по модулю $F_Д = p_1 \cdot S$ (p_1 - давление газа под поршнем, S- площадь поршня); сила упругости $\vec{F}_У$, равная по модулю $F_У = k \cdot x$; сила атмосферного давления $\vec{F}_O$, модуль которой $F_O = p_0 \cdot S$ (p_0 - атмосферное давление).

Запишем условие равновесия поршня:

$$p_1 \cdot S = p_O \cdot S + k \cdot X_1 , \qquad (1)$$

где X_1 - величина деформации (удлинение) пружины.

Аналогично запишется условие равновесия поршня после нагревания газа до температуры T_2:

$$p_2 \cdot S = p_0 \cdot S + k \cdot X_2, \qquad (2)$$

где p_2 - давление газа при T_2, X_2 - удлинение пружины во втором положении.

Из (1) и (2) получим:

$$p_2 \cdot S - p_1 \cdot S = p_0 \cdot S + k \cdot X_2 - p_0 \cdot S - k \cdot X_1$$

или

$$(p_2 - p_1) \cdot S = k \cdot (X_2 - X_1),$$

при этом, очевидно, что

$$X_2 - X_1 = H_2 - H_1,$$

и поэтому

$$p_2 - p_1 = \frac{(H_2 - H_1) \cdot k}{S}. \qquad (3)$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для двух состояний:

$$p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_1, \qquad p_2 \cdot V_2 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_2.$$

Отсюда выразим давления p_1 и p_2:

$$p_1 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{T_1}{V_1} \quad (4) \quad , \quad p_2 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \frac{T_2}{V_2} \qquad (5)$$

где m - масса газа, μ - молярная масса газа, R - универсальная газовая постоянная, V_1 - объём газа до нагревания, а V_2 - после нагревания.

Подставляя (4) и (5) в (3) и учитывая, что $V_1 = S \cdot H_1$, $V_2 = S \cdot H_2$, получим следующее выражение:

$$\frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \left(\frac{T_2}{H_2} - \frac{T_1}{H_1} \right) = (H_2 - H_1) \cdot k$$

откуда, после несложных преобразований, окончательно находим:

$$T_2 = \frac{(H_2 - H_1) \cdot k \cdot \mu \cdot H_2}{m \cdot R} + \frac{T_1 \cdot H_2}{H_1}. \qquad (6)$$

Выполним проверку единиц измерения для первого слагаемого в правой части выражения (6):

$$[T] = \frac{м \cdot \frac{Н}{м} \cdot \frac{кг}{моль} \cdot м}{кг \cdot \frac{Дж}{моль \cdot К}} = \frac{Н \cdot м \cdot К}{Дж} = К$$

Действительно получается размерность абсолютной температуры в СИ. Что касается второго члена в правой части (6), то размерность для него очевидна, поэтому проверка не требуется.

ПРИМЕР 4.2 Пуля массой m = 10 г , летящая со скоростью v = 1 км/с, попадает в тающую льдинку. Какое количество льда растаяло, если на его плавление идёт 75% кинетической энергии движения пули ? Удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг.

Дано:

$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг

$v = 1$ км/с $= 10^3$ м/с

$\eta = 75\ \% = 0.75$

$\lambda = 330$ кДж/кг $= 0.33\cdot 10^6$ Дж/кг

$m_л$ - ?

Решение:

Воспользуемся законом сохранения и превращения энергии:

$$\eta \cdot E_K = Q\,, \qquad (1)$$

где $E_K = \dfrac{mv^2}{2}$ - кинетическая энергия пули ($\eta\cdot E_K$ - доля кинетической энергии, израсходованная на плавление льда); Q - количество теплоты, необходимое для плавления льда массой $m_Л$:

$$Q = m_Л\cdot\lambda\,, \qquad (2)$$

где λ - удельная теплота плавления льда.
Подставляя (2) в (1), получим:

$$\eta \cdot \frac{mv^2}{2} = \lambda \cdot m_Л\,,$$

откуда

$$m_Л = \frac{\eta \cdot mv^2}{2\cdot\lambda}\,. \qquad (3)$$

Проверим единицы:

$$[m_л] = \frac{кг\cdot\dfrac{м^2}{с^2}}{\dfrac{Дж}{кг}} = \frac{Н\cdot м}{\dfrac{Н\cdot м}{кг}} = кг$$

Производим вычисления по формуле (3):

$$m_л = \frac{0.75\cdot 10^{-2}\cdot 10^6}{2\cdot 0.33\cdot 10^6} \approx 0.0114\ кг\ =\ 11.4\ г$$

Ответ: 11.4 г.

ПРИМЕР 4.3 Относительная влажность воздуха массы m=1.2 кг, занимающего объём V = 1 м^3 при температуре t=20°С, равна φ = 60 %. Определить давление насыщающего водяного пара при этой температуре, если воздух находится под нормальным атмосферным давлением (p_0 = $1.01 \cdot 10^5$ Па). Молярная масса воздуха μ_C = $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Дано:

m = 1.2 кг
V = 1 м^3
T = 293 К
φ = 60 %
p_0 = $1.01 \cdot 10^5$ Па
μ_C = $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$\mu_П$ = $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
R = 8.31 Дж/моль·К

----

p_H - ?

Решение:

Рассматривая влажный воздух как смесь двух газов - сухого воздуха и водяного пара, применим к ней закон Дальтона:

$$p_O = p_C + p_П\ , \qquad (1)$$

где p_C - парциальное давление сухого воздуха (т.е. давление, которое бы он оказал, если бы один занимал весь объём V); $p_П$ - парциальное давление водяного пара. Далее запишем уравнение состояния для каждого компонента:

$$p_С \cdot V = \frac{m_С}{\mu_С} \cdot R \cdot T \qquad (2)$$

$$p_П \cdot V = \frac{m_П}{\mu_П} \cdot R \cdot T \qquad (3)$$

Но поскольку массу влажного воздуха можно представить как сумму $m = m_C + m_П$, где m_C и $m_П$ - соответственно массы сухого воздуха и пара, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$p_С \cdot V = \frac{m - m_П}{\mu_С} \cdot R \cdot T\ . \qquad (2')$$

Согласно определению, относительная влажность есть

$$\varphi = \frac{p_П}{p_Н} \cdot 100\%\ .$$

Отсюда выразим искомое давление $p_Н$:

$$p_Н = \frac{p_П}{\varphi} \cdot 100\%\ . \qquad (4)$$

Решая совместно систему уравнений (1), (3) и (2 ′) относительно $p_П$, получим:

$$p_П = \frac{\mu_С \cdot M \cdot p_O - m \cdot R \cdot T}{V \cdot (\mu_С - \mu_П)}\ .$$

Тогда из (4) окончательно находим:

$$p_Н = \frac{\mu_С \cdot M \cdot p_O - m \cdot R \cdot T}{V \cdot (\mu_С - \mu_П) \cdot \varphi} \cdot 100\%\ .$$

Перед тем как произвести вычисления, проверим единицу:

$$[p_Н] = \frac{\dfrac{кг}{моль} \cdot м^3 \cdot Па - кг \cdot \dfrac{Дж}{моль \cdot К} \cdot К}{м^3 \cdot \dfrac{кг}{моль} \cdot \%} \cdot \% = \frac{м^3 \cdot Па - Н \cdot м}{м^3} = Па$$

Произведём вычисления:

$$p_{\text{н}} = \frac{(29 \cdot 10^{-3} \cdot 1.01 \cdot 10^{5} - 1.2 \cdot 8.31 \cdot 293) \cdot 100}{1 \cdot (29 \cdot 10^{-3} - 18 \cdot 10^{-3}) \cdot 60} \approx 2.3 \cdot 10^{3} \text{ Па}$$

Ответ: $p_{\text{н}}$ =2.3 кПа.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1 При нагревании газа на ΔT = 1 К при постоянном давлении объём его увеличился в два раза. Определить начальную и конечную температуры газа.

[1 К; 2 К]

4.2 Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной L = 1 м находится столбик ртути длиной l = 20 см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на h = 10 см. До какого давления была откачана трубка ? Плотность ртути $\rho = 1.36 \cdot 10^{3}$ кг/м ^{3}.

[50 кПа]

4.3 Газ при температуре T = 309 К и давлении p = 0.7 МПа имеет плотность ρ = 12 кг/м ^{3}. Определить молярную массу газа.

[44 г/моль]

4.4 В баллоне объёмом V = 25 л находится водород при температуре T = 290 К. После того как часть водорода выпустили, давление в баллоне понизилось на Δp = 0.4 МПа. Определить массу выпущенного водорода.

[8.3 г]

4.5 В баллонах объёмами V_1 = 20 л и V_2 = 44 л содержится газ. Давление в первом баллоне p_1 = 2.4 МПа, во втором – p_2 = 1.6 МПа. Определить общее давление после соединения баллонов, если температура газа не изменилась.

[1.88 МПа]

4.6 В цилиндре под тяжёлым поршнем находится m = 20 г углекислого газа. Газ нагревается от температуры t_1=20°С до t_2 = 108 °С. Вычислить работу расширения газа.

[332.4 Дж]

4.7 Сосуд вместимостью V = 0.5 л содержит газ при нормальных условиях ($p_0 = 1.01 \cdot 10^{5}$ Па , T_0 = 273 К). Определить число N молекул газа.

[$1.34 \cdot 10^{22}$]

4.8 Гелий массой m = 1 г был нагрет на ΔT = 100 К при постоянном давлении. Определить: 1) количество теплоты, переданное газу; 2) работу расширения; 3) изменение внутренней энергии газа.

[520 Дж, 208 Дж, 312 Дж]

4.9 Идеальный газ, совершающий круговой процесс, получив от нагревателя количество теплоты Q_1 = 4.2 кДж, совершил работу A = 590 Дж. Найти КПД этого цикла. Во сколько раз температура T_1 нагревателя больше температуры T_2 охладителя ?

[14 %; 1.16 раза]

4.10 Какое количество теплоты необходимо для того, чтобы 1 кг льда, взятого при температуре -20°С, обратить в пар ?

[3.05 МДж]

4.11 Свинцовая пуля массой m_1 = 10 г, летящая горизонтально со скоростью v = 500 м/с, попадает в свободно висевший на нити стальной кубик массой m_2 = 90 г. Какова будет температура обоих тел после удара, если температура пули в момент удара t_1 = 30 °С, а температура кубика t_2 = 20 °С. Удар считать абсолютно неупругим. Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоёмкость свинца c_1 = 126 Дж/(кг·К) , стали – c_2 = 460 Дж/(кг·К).

[46.5 °С]

4.12 В комнате объёмом V = 60 м^3 при температуре t_2=20 °С относительная влажность воздуха составляет φ=40 %. Определить массу водяного пара в комнате, если давление насыщенного пара при этой температуре равно $p_{н}$=2.3 кПа.
[0.4 кг]

Контрольная работа № 4.

1. В U- образный манометр налита ртуть. Открытое колено манометра находится под нормальным атмосферным давлением p_0 = 10 ^{5} Па. Уровень ртути в открытом колене на Δh_1 = 10 см выше, чем в закрытом. При этом высота воздушного столбика в закрытом колене имеет длину l_1 = 20 см. Когда открытое колено присоединили к баллону с воздухом, разность уровней ртути увеличилась до Δh_2 = 26 см. Каково давление воздуха в баллоне ?

2. В баллоне объёмом V = 30 л находится смесь водорода и гелия при температуре T = 300 К и давлении p=828 кПа. Найти массу водорода, если масса смеси m = 24 г.

3. Водород занимает объём V_0 = 1 м ^{3} при нормальных условиях. Газ сначала изохорно перевели в состояние с давлением p_2 = 5 p_0, а затем изобарно в состояние V_3=2V_0. Найти: а) изменение внутренней энергии газа; б) работу, совершаемую им; в) полученное им количество теплоты. При вычислениях принять: p_0 = 10 ^{5} Па, T_0=273 К.

4. С какой высоты должен падать свинцовый шарик, чтобы при ударе о землю он полностью расплавился ? Считать, что 95 % механической энергии шарика ушло на его нагревание и плавление. Начальная температура шарика t_1 = 20 °С. Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать $g = const$.

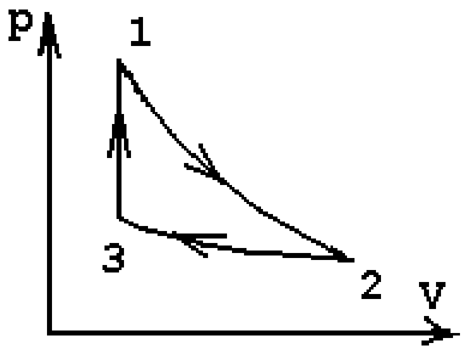
5. В латунном калориметре массой 200 г находится кусок льда массой 100 г при температуре -10°С. Сколько пара, имеющего температуру 100°С необходимо впустить в калориметр, чтобы образовавшаяся вода имела температуру 40°С?

6. В помещении при температуре t_1 = 15 °С относительная влажность воздуха φ_1 = 10 %. Какой станет относительная влажность φ_2 после нагревания воздуха в помещении до t_2 = 25 °С ? ($p_{1\text{Н}}$ = 1.7 кПа; $p_{2\text{Н}}$ = 3.2 кПа).

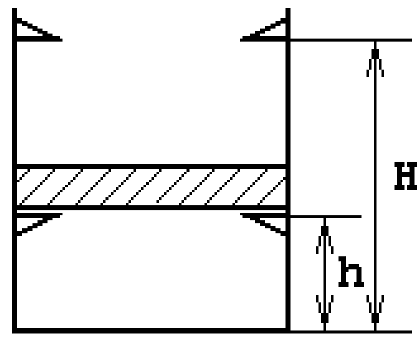
Контрольная работа № 4*.

1. Закрытый с обоих концов цилиндр наполнен газом при давлении p = 100 кПа и температуре t = 30°С и разделен легким подвижным поршнем на две равные части длиной по L=0.5 м. На какую величину ΔT нужно повысить температуру газа в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на расстояние l=20 см, если во второй половине цилиндра температура не изменяется? Определить давление газа после смещения поршня.

2. Найти КПД тепловой машины, работающей с 8 г He по циклу, состоящему из адиабаты 1-2, изотермы 2-3 и изохоры 3-1. Работа, совершенная газом в изотермическом процессе 1-2 равна 100 Дж, а разность максимальной и минимальной температур газа равна 100 К. Молярная масса гелия $\mu=4\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная R=8.31 Дж/(моль·К).



3. В вертикальном цилиндре без трения может перемещаться поршень массой 100 кг. Перемещение поршня ограничено выступами, расположение которых показано на рис. Под поршнем находится 0.4 г гелия при температуре 300 К. Какое количество теплоты необходимо сообщить гелию, чтобы поршень поднялся до верхних выступов. Диаметр цилиндра 10 см, H=3 м, h=1 м. Молярная масса гелия $\mu=4\cdot10^{-3}$ кг/моль. Атмосферное давление $p_0=1.01\cdot10^{5}$ Па. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2. Универсальная газовая постоянная R=8.31 Дж/(моль·К).



4. В закрытом калориметре, имеющем форму цилиндра диаметром d=0.2 м, находится m_1=1 кг воды, в которой плавает кусок льда массой m_2=0.5 кг. В калориметр впускают водяной пар массой m_3=0.05 кг, имеющий температуру t=100°С. Какая температура установится в калориметре? Насколько изменится уровень воды в калориметре?

5. Чему равна относительная влажность воздуха, заполняющего баллон емкостью V=700 л при температуре t=24°С, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем воду массой m=6.2 г? Универсальная газовая постоянная R=8.31 Дж/(моль·К), молярная масса воздуха $\mu=29\cdot10^{-3}$ кг/моль, давление насыщенного пара при t=24°C $p_н$=2.98 кПа.

6. В паровой турбине расходуется 0.35 кг дизельного топлива на 1 кВт·ч. Температура поступающего в турбину пара 523 К, температура холодильника 303 К. Вычислить фактический КПД турбины и сравнить его с КПД идеальной тепловой машины, работающей при тех же температурных условиях. Удельная теплота сгорания дизельного топлива $42\cdot10^6$ Дж/кг.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА.

Закон Кулона:

$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}, \qquad (5.1)$$

где F - модуль силы взаимодействия между неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися в вакууме на расстоянии r друг от друга; k - коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц, используемой при расчётах. В системе СИ он равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad (5.2)$$

где $\varepsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная (тогда $k = 9\cdot10^{9}$ м$^2\cdot$Н/Кл^2).

Если точечные заряды q_1 и q_2 покоятся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε, то модуль силы электростатического взаимодействия между ними

$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\varepsilon \cdot r^2}. \qquad (5.3)$$

Сила, действующая на заряд q, помещённый в электрическое поле с напряжённостью $\vec{E}$:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}. \qquad (5.4)$$

Модуль напряжённости электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда, вычисляется формулой:

$$E = k \cdot \frac{|q|}{\varepsilon \cdot r^2}. \qquad (5.5)$$

Принцип суперпозиции электрических полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i, \qquad (5.6)$$

где $\vec{E}$ - напряжённость, создаваемая системой из n неподвижных зарядов в какой-либо точке пространства, $A_{ВЖ}$ - напряжённость, создаваемая i- ым зарядом в этой точке.

Модуль напряжённости электростатического поля равномерно заряженного шара радиуса R на расстоянии r от центра шара

$$E = k \cdot \frac{Q}{\varepsilon \cdot r^2} \qquad (r \geq R), \qquad (5.7)$$

где Q - заряд на поверхности шара.
Модуль напряжённости электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \qquad (5.8)$$

где σ - поверхностная плотность зарядов, равная электрическому заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности:

$$\sigma = \frac{q}{S} \qquad (5.9)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда из точки 1 в точку 2 поля, равна:

$$A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = q \cdot \Delta\varphi_{12} \qquad (5.10)$$

где $\Delta\varphi_{12}$ - разность потенциалов между точками 1 и 2. Потенциал электростатического поля точечного заряда q в точке, удалённой на расстояние r от него, вычисляется по формуле:

$$\varphi = k \cdot \frac{q}{\varepsilon \cdot r} \qquad (\varphi \to 0 \text{ при } r \to \infty) \qquad (5.11)$$

Потенциал электростатического поля равномерно заряженного (по поверхности) шара радиуса R на расстоянии r от центра шара равен:

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{\varepsilon \cdot R} \qquad (\text{при } r \leq R) \qquad (5.12)$$

и

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{\varepsilon \cdot r} \qquad (\text{при } r > R) \qquad (5.13)$$

где Q - заряд на поверхности шара.
Связь между напряжённостью и разностью потенциалов в электростатическом поле:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \qquad (5.14)$$

где $\Delta\varphi$ - изменение потенциала на отрезке Δl вдоль линии напряжённости поля; E - модуль вектора напряжённости $\vec{E}$.
Электроёмкость конденсатора:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U} \qquad (5.15)$$

где Q - заряд на одной из обкладок конденсатора; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - разность потенциалов между обкладками.
Электроёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot S}{d} \qquad (5.16)$$

где S - площадь поверхности одной пластины (или меньшей из них, если они не равны); d - расстояние между пластинами; ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами.
Электроёмкость заряженного шара радиуса R:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot R \qquad (5.17)$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора (или заряженного проводника) :

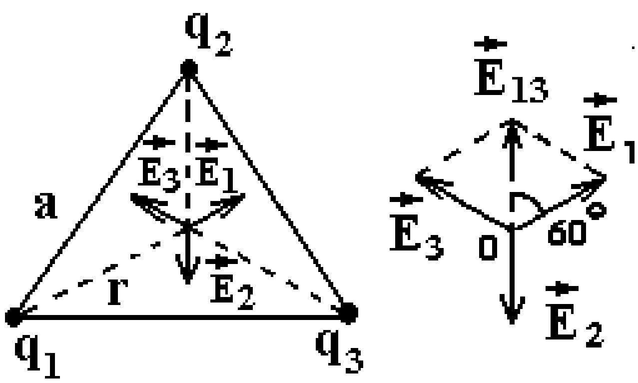
$$W_{эл} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C} \qquad (5.18)$$

где C - электроёмкость конденсатора (проводника); U - разность потенциалов между обкладками (потенциал проводника); Q - заряд на каждой из обкладок (на проводнике).

ПРИМЕР 5.1 Три одинаковых положительных заряда q =0.1 нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 5 см. Найти напряжённость поля:
а) в центре описанной окружности; б) в середине одной из сторон. Найти также потенциал в указанных точках.

Дано:
$q_1 = q_2 = q_3 = q = 10^{-10}$ Кл
a = 0.05 м
$k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл²

E_0 - ? $E_м$ - ?
φ_0 - ? $\varphi_м$ - ?



Решение:

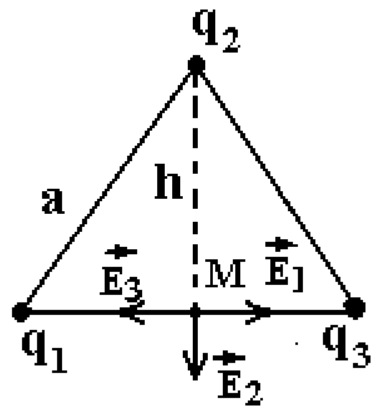
Для решения задачи сделаем схематический чертёж для каждого пункта и воспользуемся принципом суперпозиции электростатических полей.

а) Имеем: $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ (1)

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ - напряжённости полей, создаваемых в точке О зарядами q_1, q_2, q_3 соответственно. После векторного сложения векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ получается вектор $\vec{E}_{13}$, который из соображений симметрии равен по модулю вектору $\vec{E}_2$ и направлен противоположно. Поэтому результирующий вектор напряжённости в точке О будет равен нулю, т.е.

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{13} + \vec{E}_2 = 0 .$$

б) Из рисунка видно, что векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равны по модулю, но противоположны по направлению, поэтому условие (1) для точки М примет простой вид:



$\vec{E}_М = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_2$, т.к. $\vec{E}_1 = -\vec{E}_3$.

Тогда модуль вектора напряжённости равен:

$$E_М = E_2 = k \cdot \frac{q_2}{h^2} = k \cdot \frac{4q}{3a^2}$$

Произведём вычисления:

$$E_М = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 480 \ \frac{В}{м}$$

Найдём потенциалы в указанных точках:

а) Потенциал в точке О есть алгебраическая сумма потенциалов, создаваемых тремя зарядами в отдельности в этой точке:

$$\varphi_О = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

(т.к. заряды положительны, то и потенциалы положительны). По определению

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = k \cdot \frac{q}{r} \quad ,$$

где $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ - расстояние от зарядов до рассматриваемой точки О.

Тогда $\varphi_0 = 3 \cdot k \cdot \dfrac{q}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}k \cdot \dfrac{q}{a}$.

После вычислений находим

$$\varphi_0 = 93.5 \text{ В}.$$

б) Рассуждая аналогично, имеем

$$\varphi_M = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad ,$$

где

$$\varphi_1 = \varphi_3 = 2k \cdot \frac{q}{a} \quad , \quad \varphi_2 = 2k \cdot \frac{q}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} k \cdot \frac{q}{a} \quad .$$

Суммирование даёт:

$$\varphi_M = 4k \cdot \frac{q}{a} + \frac{2\sqrt{3}}{3} k \cdot \frac{q}{a} = 2k \cdot \frac{q}{a}\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Подставляя численные данные и произведя вычисления, получим:

φ_M = 92.8В.

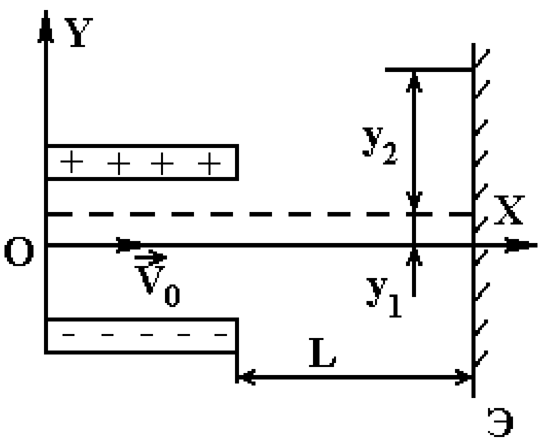
ПРИМЕР 5.2 Электрон влетает в плоский конденсатор с начальной скоростью $v_0 = 10^6$ м/с параллельной пластинам. Напряжение между пластинами, находящимися на расстоянии d = 1 см друг от друга, составляет U = 100 В. Длина каждой из пластин l = 5 см. Выйдя из конденсатора, электрон попадает на экран, расположенный на расстоянии L = 50 см. Найти величину отклонения электрона относительно первоначального направления.

Дано:
$v_0 = 10^6$ м/с
U = 100 В
d = 0.01 м
l = 0.05 м
L = 0.5 м

S_y - ?

Решение:

Выберем систему координат, как это показано на рисунке.



Электрон участвует одновременно в двух движениях: равномерном и прямолинейном вдоль оси X и равнопеременном вдоль оси У.

Законы движения электрона запишутся в виде:

$$x(t) = v_0 \cdot t \qquad (1)$$

$$y(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} \qquad (2)$$

Ускорение a электрона выразим из второго закона Ньютона:

$$F_{ЭЛ} = m_e \cdot a$$

откуда

$$a = \frac{F_{эл}}{m_e} = \frac{|e| \cdot E}{m_e} = \frac{|e| \cdot U}{m_e \cdot d} \qquad (3)$$

Здесь: $F_{ЭЛ} = q \cdot E$ - сила, действующая на электрон со стороны электрического поля конденсатора; $E = \frac{U}{d}$ - напряжённость поля; m_e - масса электрона; e - его заряд.
Предположим, что электрон вылетел из конденсатора в момент времени t_1. Тогда

$$x(t_1) = l$$

и, согласно (1),

$$l = v_0 \cdot t_1 \qquad (4)$$

Смещение y_1 электрона по вертикали при вылете из конденсатора на основании (2), (3) и (4) равно:

$$y_1 = y(t_1) = \frac{|e| \cdot U}{2 \cdot m_e \cdot d} \cdot t_1^2 = \frac{|e| \cdot U \cdot l^2}{2 \cdot m_e \cdot d \cdot v_0^2} \qquad (5)$$

Далее запишем проекции вектора скорости $\vec{v}$ электрона на координатные оси:

$$v_X(t) = v_0 = const \quad ,$$

$$v_Y(t) = a \cdot t = \frac{|e| \cdot U}{m_e \cdot d} \cdot t \quad .$$

В момент вылета ($t = t_1$)

$$v_X(t_1) = v_0 \qquad (6)$$

$$v_Y(t_1) = \frac{|e| \cdot U}{m_e \cdot d} \cdot \frac{l}{v_0} \quad . \qquad (7)$$

После вылета из конденсатора электрон, двигаясь прямолинейно со скоростью $\vec{v}(t_1)$, пролетает расстояние L до экрана за время

$$t_2 = \frac{L}{v_0} \quad , \qquad (8)$$

а смещение по вертикали (вдоль оси Y) найдём из (7) и (8):

$$y_2 = v_Y(t_1) \cdot t_2 = \frac{|e| \cdot U \cdot l}{m_e \cdot d \cdot v_0^2} \qquad (9)$$

Тогда полное смещение электрона, согласно (5) и (9), есть:

$$S_Y = y_1 + y_2 = \frac{|e| \cdot U \cdot l}{m_e \cdot d \cdot v_O^2} \cdot \left(\frac{l}{2} + L \right). \qquad (10)$$

Проверим единицу:

$$[S_Y] = \frac{Кл \cdot В \cdot м}{кг \cdot м \cdot м^2 / с^2} \cdot м = \frac{Кл \cdot В}{кг \cdot м^2 / с^2} \cdot м = \frac{Дж}{Дж} \cdot м = м$$

Подставляя численные данные в расчётную формулу (10) и производя вычисления, находим:

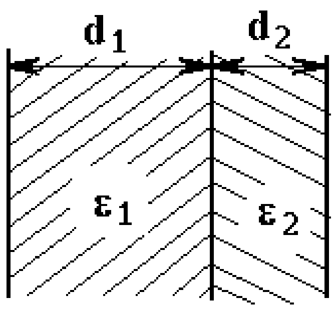
S_Y = 0.46 м

ПРИМЕР5.3 Между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов U = 600 В, находятся два слоя диэлектриков: стекла толщиной d_1 = 7 мм и эбонита толщиной d_2 = 3 мм. Относительные диэлектрические проницаемости стекла и эбонита соответственно равны: ε_1 = 7 и ε_2 = 3. Площадь каждой пластины конденсатора S = 200 см^2. Определить: 1) электроёмкость конденсатора; 2) разность потенциалов и напряжённость поля в каждом слое.

Дано:

U = 600 В
d_1 = 7 мм = $7 \cdot 10^{-3}$ м
d_2 = 3 мм = $3 \cdot 10^{-3}$ м
ε_1 = 7
ε_2 = 3
S = 200 см^2 =$2 \cdot 10^{-2}$ м^2

C - ? E_1 - ? E_2 - ? U_1 - ? U_2 - ?



Решение:

Определим электроёмкость C. Конденсатор со слоями из различных диэлектриков представляет как бы два отдельных конденсатора, соединённых последовательно, т.е.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \qquad (1)$$

где $C_1 = \dfrac{\varepsilon_O \varepsilon_1 \cdot S}{d_1}$, $C_2 = \dfrac{\varepsilon_O \varepsilon_2 \cdot S}{d_2}$; $\varepsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \; \dfrac{Ф}{м}$ – электрическая постоянная, S - площадь каждой из пластин конденсатора.

Из (1) имеем:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \cdot d_2 + \varepsilon_2 \cdot d_1} \quad . \qquad (2)$$

Поделив числитель и знаменатель в (2) на произведение $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$, получим

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}} \quad . \qquad (2')$$

Проверим единицы:

$$[C] = \frac{\dfrac{Ф}{м} \cdot м^2}{м} = \frac{Ф \cdot м}{м} = Ф \quad .$$

Электроёмкость конденсатора по определению:

$$C = \frac{Q}{U} \quad , \qquad (3)$$

откуда выразим заряд Q на пластинах конденсатора:

$$Q = C \cdot U \quad . \qquad (3')$$

На основании формул (3) и (3′) для напряжений на слоях диэлектриков имеем:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C \cdot U}{C_1} \quad , \qquad (4)$$

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C \cdot U}{C_2} \quad . \qquad (5)$$

Подставляя в (4) и (5) выражения для C, C_1, C_2 и учитывая, что по условию задачи $\frac{d_1}{\varepsilon_1} = \frac{d_2}{\varepsilon_2}$, получим:

$$U_1 = U_2 = \frac{U}{2} \quad . \qquad (6)$$

Напряжённость электрического поля в каждом слое найдём по формулам:

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} \quad , \quad E_2 = \frac{U_2}{d_2} \quad . \qquad (7)$$

Производя вычисления по формулам (2′), (6) и (7), находим искомые величины:

$C = 88.5 \cdot 10^{-12}$ Ф = 88.5 пФ

$U_1 = U_2 = 300$ В

$E_1 = 42.8 \ \frac{кВ}{м}$, $E_2 = 100 \ \frac{кВ}{м}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

5.1 Два одинаковых шарика массой m = 0.1 г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной l = 20 см. Получив равные заряды, шарики разошлись так, что нити образуют между собой угол α=60°. Найти заряд каждого шарика.

[50.1 нКл]

5.2 Электрон в атоме водорода обращается вокруг ядра по круговой орбите. Определить скорость электрона, если радиус орбиты r = 53 пм, а также частоту вращения по орбите.

[$2.2\cdot10^{5}$ м/с; $6.6\cdot10^{14}$ 1/с]

5.3 Расстояние между двумя точечными зарядами q_1 = 1 мкКл и q_2 = -1 мкКл равно r = 10 см. Определить силу, действующую на точечный заряд q = 0.1 мкКл, удалённый на r_1 = 6 см от первого и на r_2 = 8 см от второго заряда.

[287 мН]

5.4 Два одинаковых заряженных шарика находятся на расстоянии r = 60 см. Сила отталкивания шариков при этом F_1 = 70 мкН. После того как их привели в соприкосновение и удалили друг от друга на прежнее расстояние, сила отталкивания стала равной F_2 =160 мкН. Найти заряды q_1 и q_2, которые находились на шариках до их соприкосновения.

[0.14 мкКл, 20 нКл]

5.5 Расстояние между двумя точечными зарядами q_1 = 8 нКл и q_2 = -5.3 нКл равно d = 40 см Вычислить напряжённость поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряжённость, если второй заряд будет положительным ?

[≈3 кВ/м ; ≈0.6 кВ/м]

5.6 Электрическое поле создано двумя точечными зарядами q_1 = 40 нКл и q_2 = -10 нКл, находящимися на расстоянии d = 10 см друг от друга. Найти напряжённость электрического поля в точке, удалённой от первого заряда на r_1 = 12 см и от второго на r_2 = 6 см.

[34 кВ/м]

5.7 Восемь одинаковых шарообразных капелек ртути, заряженных до потенциала φ_0 = 0.25 В, сливаются в одну большую каплю. Найти потенциал большой капли.

[1 В]

5.8 В однородное электрическое поле напряжённостью E=1 кВ/м влетает вдоль силовых линий электрон со скоростью v_0 = 1 Мм/с. Определить расстояние l, пройденное электроном до точки, в которой его скорость будет равна половине начальной. [≈2 мм]

5.9 Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость v_0 = 10 Мм/с, направленную параллельно пластинам, расстояние между которыми d = 2 см. Длина пластин l = 10 см. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора ?

[22.5 В]

5.10 Два металлических шара радиусами R_1 = 2 см и R_2=6 см соединены проводником, ёмкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщён заряд q = 1 нКл. Найти поверхностную плотность σ_1 и σ_2 зарядов на шарах.

[49.8 нКл/м^2; 16.6 нКл/м^2]

5.11 Два конденсатора электроёмкостями C_1 = 3 мкФ и C_2= 6 мкФ соединены между собой и присоединены к батарее с э.д.с. E = 120 В. Определить заряды q_1 и q_2 конденсаторов и разность потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками, если конденсаторы соединены: 1) параллельно; 2) последовательно.

[1) 360 мкКл, 720 мкКл; 120 В;
2) 240 мкКл; 80 В, 40 В]

5.12 Вычислить энергию W электрического поля металлического шара, которому сообщили заряд Q = 100 нКл, если диаметр шара d = 20 см.

[450 мкДж]

Контрольная работа №5.

1. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на некоторый угол. Шарики погружают в масло плотностью ρ_1=800 кг/м^3. Определить диэлектрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей после погружения остаётся неизменным. Плотность материала шариков $\rho_2=1.6\cdot10^3$ кг/м^3.

2. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами q_1=10 нКл и q_2= -20 нКл, находящимися на расстоянии d=20 см друг от друга. Определить напряжённость поля в точке, удалённой от первого заряда на расстояние r_1=30 см и от второго на r_2=50 см.

3. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость v_0= 10 Мм/с, направленную параллельно пластинам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составляло угол $\alpha=30°$ с первоначальным направлением скорости. Определить разность потенциалов U между пластинами конденсатора, если расстояние между пластинами d=2 см, а длина каждой из пластин l = 10 см.

4. Два шарика с зарядами $6\cdot10^{-9}$ Кл и $12\cdot10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии 40 см друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния 25 см? Окружающая среда - воздух.

5. Три конденсатора, имеющие электроёмкости C_1=0.3 мкФ, C_2 = 0.2 мкФ, C_3 = 0.12 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику с напряжением U = 120 В. Определить разность потенциалов на каждом конденсаторе, а также общую ёмкость и заряд всей батареи.

6. К пластинам плоского конденсатора ёмкостью C_0=20 пФ присоединён источник тока напряжением U_0 = 300 В. На какую величину ΔW изменится энергия поля конденсатора, если расстояние между его пластинами уменьшить от d_0 = 3 мм до d = 0.5 мм?

Контрольная работа №5*.

1. Непроводящий стержень в виде полуокружности радиусом R=0.4 м расположен в вертикальной плоскости так, что диаметр полуокружности горизонтален, а стержень находится выше диаметра. На концах стержня закреплены заряды q_1=+15 мкКл, g_2=+10 мкКл. Заряженный шарик массой 0.05 г, который может без трения перемещаться по стержню, находится в положении устойчивого равновесия так, что его радиус-вектор, проведенный из центра полуокружности, составляет с диаметром угол 60°. Найти напряженность электрического поля в центре полуокружности. Принять g=10 м/с^2. Электрическая постоянная ε_0=8.85·10^{-12} Ф/м.

2. Капля массой 10^{-13} кг, на которой находится заряд, равный 10 зарядам электрона, поднимается вертикально вверх с ускорением 2.3 м/с^2 между пластинами горизонтально расположенного плоского конденсатора. Определите поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора. Сопротивлением воздуха пренебречь. Электрическая постоянная ε_0=8.85·10^{-12} Ф/м. Принять g=10 м/с^2, е=1.6·10^{-19} Кл.

3. В электронно-лучевой трубке поток электронов с кинетической энергией 12.8·10^{-16} Дж каждый двигается между пластинами плоского конденсатора длиной 4·10^{-2} м . Расстояние между пластинами 2·10^{-2} м. Какое напряжение нужно подать на пластины конденсатора, чтобы смещение электронного пучка на выходе оказалось 8·10^{-3} м.

4. Шарик массой 40 мг, имеющий заряд 10^{-9} Кл, перемещается из бесконечности со скоростью 10 см/с. На какое расстояние сможет приблизиться шарик к точечному заряду равному 1.3·10^{-9} Кл?

5. Плоский конденсатор, у которого расстояние между пластинами равно 4 мм, погружается до половины пластин в керосин ($\varepsilon_к$=2.0). На сколько нужно раздвинуть пластины конденсатора, чтобы его емкость осталась неизменной? ε_0=8.85·10^{-12} Ф/м, диэлектрическая проницаемость воздуха ε=1.

6. В однородном электрическом поле Земли с напряженностью 100 В/м, направленной вертикально вниз, находится плоский незаряженный конденсатор, образованный двумя горизонтальными пластинами площадью S = 1000 м^2, находящимися на расстоянии d = 5 м друг от друга. Какое количество теплоты выделится при подключении этого конденсатора к батарее с ЭДС=400 В, если верхняя пластина присоединяется к положительному полюсу батареи?

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.

Сила постоянного электрического тока:

$$J = \frac{q}{\Delta t}, \qquad (6.1)$$

где q - заряд, который переносится сквозь поперечное сечение проводника за время Δt.

Плотность тока:

$$j = \frac{J}{S}, \qquad (6.2)$$

где S - площадь поперечного сечения проводника.

Закон Ома для произвольного участка цепи:

$$J = \frac{U}{R}, \qquad (6.3)$$

где J - сила тока в участке цепи, U - напряжение (падения напряжения) на участке, R - сопротивление данного участка.

Если участок цепи не содержит э.д.с., то закон Ома для такого участка записывается в виде:

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \qquad (6.3')$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ - разность потенциалов на концах участка.

Электрическое сопротивление проводника длиной l:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \qquad (6.4)$$

где ρ - удельное сопротивление проводника, S - площадь поперечного сечения.

Зависимость удельного сопротивления проводника от температуры:

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) \qquad (6.5)$$

где ρ_0 - удельное сопротивление проводника при 0°C, t-температура проводника (по Цельсию), α - температурный (или термический) коэффициент сопротивления. Закон Ома для полной цепи:

$$J = \frac{E}{R + r} \qquad (6.6)$$

где J - сила тока в цепи, E - э.д.с. источника, R - сопротивление внешнего участка цепи, r - внутреннее сопротивление источника.

Сила тока короткого замыкания:

$$J_{к.з.} = \frac{E}{r} \qquad (6.7)$$

Работа постоянного тока:

$$A = q \cdot U = J \cdot U \cdot \Delta t = J^{2} \cdot R \cdot \Delta t \qquad (6.8)$$

где q - заряд, прошедший по проводнику за время Δt; U - напряжение, J - сила тока, R - сопротивление.

Мощность постоянного тока:

$$P = J \cdot U = J^{2} \cdot R = \frac{U^{2}}{R} \qquad (6.9)$$

Закон Джоуля-Ленца:

$$Q = J^{2} \cdot R \cdot \Delta t \qquad (6.10)$$

где Q - количество теплоты, выделяющееся в проводнике за время Δt при силе тока в нём J; R - сопротивление проводника.

Закон электролиза Фарадея:

$$m = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} \cdot q \qquad (6.11)$$

где m масса вещества, выделившегося на электроде при прохождении через электролит заряда q; F - число Фарадея, A - относительная атомная (молярная) масса вещества, n - его валентность.

Закон Ампера:

$$\Delta F = J \cdot \Delta l \cdot B \cdot \sin\alpha \qquad (6.12)$$

где ΔF - модуль силы, действующей на отрезок проводника длиной Δl с током силой J; B - модуль вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля, в которое помещён проводник; α - угол между вектором $\vec{B}$ и направлением тока в проводнике.

Индукция магнитного поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводником с током силой J в точке, удалённой на расстояние r от оси проводника:

$$B = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{J}{2\pi \cdot r} \qquad (6.13)$$

где μ - относительная магнитная проницаемость среды; μ_0 - магнитная постоянная (в СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м).

На движущуюся в магнитном поле заряженную частицу действует со стороны этого поля сила Лоренца, модуль которой равен:

$$F_Л = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha \qquad (6.14)$$

где q - заряд частицы, v - модуль скорости её движения, B - индукция магнитного поля, α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Поток магнитной индукции (магнитный поток) через плоскую поверхность с площадью S равен

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha \qquad (6.15)$$

где α - угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности.

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$E_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (6.16)$$

где E_i - э.д.с. электромагнитной индукции, возникающей в замкнутом контуре при изменении магнитного потока $\Delta\Phi$ за промежуток времени Δt (величина $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ - скорость изменения магнитного потока через площадь поверхности, ограниченной контуром); знак "-" обусловлен правилом Ленца.

Э.д.с. электромагнитной индукции в проводнике, движущемся со скоростью $\vec{v}$ в постоянном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, равна

$$E_i = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha \qquad (6.17)$$

где l - длина отрезка проводника, α - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Заряд, протекающий по замкнутому контуру при возникновении электромагнитной индукции:

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{R} \qquad (6.18)$$

где $\Delta\Phi$ - изменение магнитного потока, пронизывающего контур; R - сопротивление контура.

Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле:

$$A = J \cdot \Delta\Phi \qquad (6.19)$$

где J - сила тока в контуре, $\Delta\Phi$ - изменение магнитного потока.

Магнитный поток, возникающий в замкнутом контуре при прохождении по нему тока, пропорционален силе этого тока:

$$\Phi = L \cdot J \qquad (6.20)$$

где L - индуктивность контура.

Э.д.с. самоиндукции:

$$E_C = -L \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t} \qquad (6.21)$$

где L – индуктивность контура, $\frac{\Delta J}{\Delta t}$ - скорость изменения силы тока в контуре.
Индуктивность соленоида:

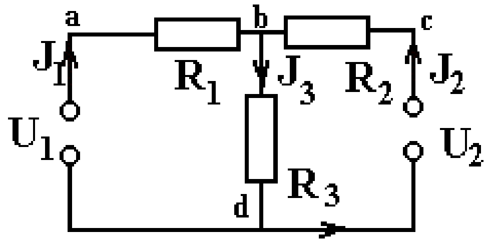
$$L = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} \qquad (6.22)$$

где μ - относительная магнитная проницаемость вещества, находящегося внутри соленоида; N – число витков; S - поперечное сечение, а l - длина соленоида; μ_0 - магнитная постоянная.
Энергия магнитного поля:

$$W_M = \frac{L \cdot J^2}{2} \qquad (6.23)$$

где J – сила тока, проходящего по контуру с индуктивностью L.

ПРИМЕР 6.1 Электрическая схема, изображённая на рисунке, содержит три резистора R_1, R_2, R_3. Найти токи J_1, J_2, J_3, протекающие через резисторы, а также разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_C$ между точками А и С, если известно, что $\varphi_A - \varphi_D = U_1$, а $\varphi_C - \varphi_D = U_2$.



Решение: Рассмотрим контур ABDA. Составляя очевидное равенство

$$\varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_D + \varphi_D - \varphi_A = 0$$

и учитывая закон Ома для участков цепи AB и BD:

$$\varphi_A - \varphi_B = J_1 \cdot R_1$$

$$\varphi_B - \varphi_D = J_3 \cdot R_3$$

получим уравнение:

$$J_1 \cdot R_1 + J_3 \cdot R_3 - (\varphi_A - \varphi_D) = 0$$

или

$$J_1 \cdot R_1 + J_3 \cdot R_3 = U_1 . \qquad (1)$$

С помощью аналогичных рассуждений для контура CBDC получим следующее уравнение:

$$J_2 \cdot R_2 + J_3 \cdot R_3 = U_2 . \qquad (2)$$

Имеем два уравнения (1) и (2) с тремя неизвестными J_1, J_2, J_3. Третье недостающее уравнение получим, записав условие равенства сумм токов, входящих в узел (например, узел B), и выходящих из него (напомним, что это условие вытекает из закона сохранения электрического заряда), т.е.

$$J_1 + J_2 = J_3 \quad . \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (1)-(3) даёт следующие выражения для определения токов:

$$J_1 = \frac{(R_2 + R_3)\cdot U_1 - R_3 \cdot U_2}{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_1 + R_2)}$$

$$J_2 = \frac{(R_1 + R_3)\cdot U_2 - R_3 \cdot U_1}{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_1 + R_2)}$$

$$J_3 = \frac{R_1 \cdot U_2 + R_2 \cdot U_1}{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot (R_1 + R_2)}$$

Согласно условиям задачи

$$\varphi_A - \varphi_D = U_1$$

$$\varphi_C - \varphi_D = U_2$$

откуда, вычитая второе условие из первого, найдём разность потенциалов между точками A и C:

$$\varphi_A - \varphi_C = U_1 - U_2$$

ПРИМЕР 6.2 Мощность, выделяемая на резисторе с сопротивлением R_1 = 200 Ом, подключённом к источнику тока, равна N = 200 Вт. При замене резистора R_1 на резистор с сопротивлением R_2 = 500 Ом, на последнем выделяется такая же мощность. Найти силу тока $J_{к.з.}$ короткого замыкания.

Дано:

R_1 = 200 Ом
R_2 = 500 Ом
N = 200 Вт

$J_{к.з.}$ - ?

Решение: Мощность, выделяемая на резисторе R_1:

$$N_1 = J_1^2 \cdot R_1$$

где J_1 - сила тока в резисторе R_1. Согласно закону Ома для полной цепи:

$$J_1 = \frac{E}{R + r} \quad ,$$

где E - э.д.с. источника, r - его внутреннее сопротивление.
Тогда

$$N_1 = \frac{E^2 \cdot R_1}{(R_1 + r)^2} \qquad (1)$$

Аналогично, мощность, выделяемая на резисторе R_2, определится формулой

$$N_2 = \frac{E^2 \cdot R_2}{(R_2 + r)^2} \qquad (2)$$

По условию задачи

$$N_1 = N_2 = N$$

т.е.

$$\frac{E^2 \cdot R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{E^2 \cdot R_2}{(R_2 + r)^2}$$

или

$$\frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2}$$

Выполним несложные преобразования:

$$\frac{\sqrt{R_1}}{R_1 + r} = \frac{\sqrt{R_2}}{R_2 + r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R_1 \cdot \sqrt{R_2} - R_2 \cdot \sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}} \quad \Rightarrow$$

$$r = \frac{\sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_2}(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})}{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}} = \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_2} \qquad (3)$$

Э.д.с. источника E можно выразить из (1) или из (2)

$$E = \sqrt{\frac{\left(R_1 + \sqrt{R_1 \cdot R_2}\right)^2 \cdot N}{R_1}} = \left(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}\right) \cdot \sqrt{N} \qquad (4)$$

Сила тока короткого замыкания по определению

$$J_{к.з.} = \frac{E}{r}$$

Используя (3) и (4), окончательно получим

$$J_{к.з.} = \sqrt{\frac{N}{R_2}} + \sqrt{\frac{N}{R_1}} \qquad (5)$$

Проверим размерность:

$$[J_{к.з.}] = \sqrt{\frac{Вт}{Ом}} = \sqrt{\frac{Дж}{Ом \cdot с}} = \sqrt{\frac{A^2 \cdot Ом \cdot с}{Ом \cdot с}} = \sqrt{A^2} = A$$

Произведём вычисления по формуле (5):

$$J_{к.з.} = \sqrt{\frac{200}{500}} + \sqrt{\frac{200}{200}} \approx 1{,}6\ A$$

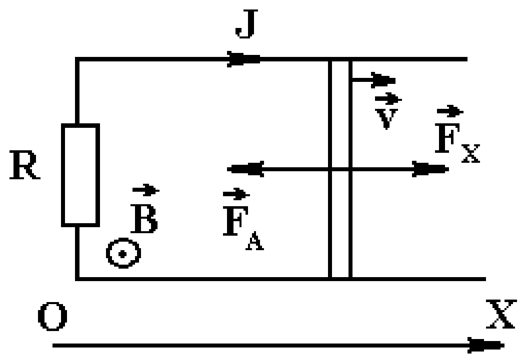
ПРИМЕР 6.3 Два параллельных массивных проводящих стержня расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга. Два конца стержней соединены резистором с сопротивлением R. По стержням без нарушения контакта равномерно перемещается со скоростью $\vec{v}$ отрезок прямого провода длиной l. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально вверх. Пренебрегая сопротивлениями стержней и провода, а также трением между ними, определить: а) мощность P, выделяемую в резисторе; б) механическую мощность N, подводимую к отрезку провода.

Решение:

а) Так как отрезок провода движется перпендикулярно линиям индукции магнитного поля ($\alpha = 90°$), ЭДС индукции определится формулой

$$E_i = B \cdot l \cdot v$$

где B - модуль вектора магнитной индукции $\vec{B}$; v - модуль вектора скорости $\vec{v}$ перемещения отрезка; l - его длина.



Мощность, выделяемая в резисторе R,

$$P = J^2 \cdot R \qquad (1)$$

где J - сила индукционного тока, возникшего в замкнутой цепи. Силу тока J выразим из закона Ома:

$$J = \frac{E_i}{R} = \frac{B \cdot l \cdot v}{R} \qquad (2)$$

Подставив полученное выражение в (1), получим:

$$P = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v^2}{R} \qquad (3)$$

На провод (как только по нему пойдёт ток) со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера, модуль которой равен (направление вектора $\vec{F}_A$ определяется по правилу левой руки)

$$F_A = J \cdot B \cdot l$$

или с учётом (2):

$$F_A = \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot v}{R} \qquad (4)$$

Чтобы провод перемещался по стержням равномерно, к нему должна быть приложена внешняя сила $\vec{F}$, составляющая $\vec{F}_{X}$ которой равна по модулю силе Ампера $\vec{F}_{A}$ и направлена в противоположную сторону (см. рисунок), т.е.

$$F_{X} = F_{A}$$

Механическая мощность в этом случае будет равна

$$N = F_{X} \cdot v = F_{A} \cdot v \quad .$$

Учитывая (4), окончательно получим:

$$N = \frac{B^{2} \cdot l^{2} \cdot v^{2}}{R} \quad ,$$

что полностью совпадает с выражением (3).
Полученный результат показывает, что энергия, эквивалентная механической работе по перемещению провода, выделяется в виде теплоты в резисторе R, т.е. выполняется закон сохранения энергии.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

6.1 Проволока имеет сопротивление R_1 = 175 Ом. Когда её разрезали на N равных частей и соединили их параллельно, то сопротивление такой цепи стало равным R_2 = 7 Ом. На сколько частей разрезали проволоку ?

[5 частей]

6.2 Напряжение на шинах электростанции U = 6.6 кВ. Потребитель находится на расстоянии l= 10 км. Определить площадь S сечения медного провода, который следует взять для создания двухпроводной линии передачи, если сила тока в линии J= 20 А и допустимые потери напряжения составляют 3%.

[34,2 мм^2]

6.3 Когда батарею замкнули проводником с сопротивлением R_1 = 2 Ом, сила тока в цепи была J_1= 1.6 А, а когда батарею замкнули проводником с R_2 = 1 Ом, то сила тока стала равной J_2 = 2 А. Найти: 1) ЭДС батареи;
2) внутреннее сопротивление батареи; 3) ток короткого замыкания.

[1) 8 В; 2) 3 Ом; 3)2,67 А]

6.4 Лампочка и реостат, соединённые последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение на зажимах лампочки равно U = 40 В, сопротивление реостата R =10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность P =120 Вт. Найти силу тока в цепи.

[2 А]

6.5 Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через t_1 = 15 мин, если только вторая, то через t_2 = 30 мин. Через какое время закипит вода, если обе секции включать: 1) последовательно ? 2) параллельно ?

[45 мин; 10 мин]

6.6 Определить толщину h слоя меди, выделившейся за время t = 5 ч при электролизе медного купороса, если плотность тока j = 80 А/м^2.

[54 мкм]

6.7 По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи силой J_1 = 50 А и J_2 = 100 А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами d = 20 см. Определить магнитную индукцию в точке, удалённой на r_1 = 25 см от первого и на r_2 = 40 см от второго провода.

[21.2 мкТл]

6.8 Между полюсами магнита на двух невесомых параллельных нитях подвешен горизонтально проводник длиной l = 0.1 м и массы m = 5 г. Индукция однородного магнитного поля B = 0.1 Тл и перпендикулярна к проводнику. На какой угол α от вертикали отклонятся нити, если по нему пропустить ток силой J = 1 А ?

[≈ 45°]

6.9 Пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 600 В, протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией B = 0.3 Тл перпендикулярно к линиям магнитной индукции и начинает двигаться по окружности. Вычислить радиус окружности.

[12 мм]

6.10 В однородном магнитном поле с индукцией B = 1 Тл находится прямой провод длиной a = 20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление всей цепи R = 0.1 Ом. Найти силу F, которую надо приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью v = 2.5 м/с ?

[1 Н]

6.11 Магнитный поток через замкнутый контур с сопротивлением R = 2 Ом равен Φ = 4.8 мВб. Найти заряд, прошедший в контуре при выключении магнитного поля.

[2.4 мКл]

6.12 Соленоид индуктивностью L = 4 мГн содержит N = 600 витков. Сила тока, протекающего в обмотке, J = 10 А. Вычислить энергию магнитного поля внутри соленоида. Какая э.д.с. возникнет в соленоиде при исчезновении тока за $\Delta t = 2$ мс.

[3 В; 0.2 Дж]

Контрольная работа № 6.

1. Четыре проводника одинаковой длины из одного и того же материала соединены последовательно. Диаметры проводников соответственно равны: d_1 = 0.1 см, d_2 = 0.2 см, d_3 = 0.3 см и d_4 = 0.4 см. К системе приложено напряжение U = 100 В. Определить падение напряжения на каждом проводнике.

2. К источнику тока с ЭДС E = 1.5 В присоединили резистор с сопротивлением R = 0.1 Ом. Амперметр показал силу тока J_1=0.5 А. Когда к источнику тока подключили последовательно ещё один источник с такой же ЭДС, то сила тока в резисторе стала равной J_2=0.4 А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 источников тока.

3. Электропечь за время τ = 10 мин выпаривает воду массой m = 1 кг, взятую при температуре T_1 = 293 К. В качестве нагревателя в печи используется нихромовая проволока сечением S = 0.5 мм^2 и удельным сопротивлением ρ = 1.1 мкОм·м. Найти длину проволоки, если печь работает под напряжением U = 120 В, а её КПД η = 80%.

4. Тонкая прямоугольная пластина размерами 3х4 см^2 покрылась с двух сторон слоем золота толiиной 0.001 см. Сколько времени пропускался ток силой 1.5 А?

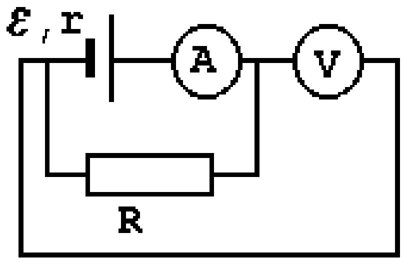
5. Электрон движется в магнитном поле с индукцией B = 20 мТл по окружности радиуса R = 1 см. Определить кинетическую энергию электрона.

6. К источнику тока с ЭДС E = 0.5 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением присоединены два металлических массивных рельса, расположенных на горизонтальной поверхности параллельно друг другу. Расстояние между рельсами $\vec{F}_A$= 20 см. Рельсы находятся в однородном магнитном поле с индукцией B = 1.5 Тл. Вектор $\vec{B}$ направлен вертикально. По рельсам под действием магнитного поля скользит со скоростью v = 1 м/с прямолинейный проводник сопротивлением R = 20 мОм. Определить: ЭДС электромагнитной индукции E_i; силу F_A , действующую на проводник; силу тока в цепи; мощность, расходуемую на нагревание проводника; мощность, отдаваемую источником тока.

Контрольная работа № 6*.

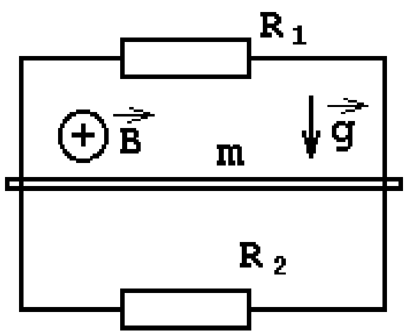
1. Амперметр с внутренним сопротивлением R_1 = 2 Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает ток J_1=5 А. Вольтметр с внутренним сопротивлением R_2 = 150 Ом, подключенный к зажимам той же батареи, показывает U=12 В. Найти ток короткого замыкания батареи.

2. В схеме на рисунке $\mathcal{E}$=10 В, r = 1 Ом, R = 5 Ом, r_A = 2 Ом, r_V = 20 Ом. Какой заряд протекает через резистор R за время, в течение которого в нем выделяется 100 Дж теплоты?



3. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов 1000 В, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции. Найти радиус окружности, по которой будет двигаться электрон, и период обращения электрона по этой окружности, если индукция магнитного поля равна 0.2 Тл. Заряд электрона $e = 1.6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9.1\cdot10^{-31}$ кг.

4. В вертикальной плоскости находятся два длинных параллельных проводника, замкнутых резисторами с сопротивлениями R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом. По проводникам без нарушения контакта может скользить стержень массой m =1 кг и длиной l =1 м. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 1 Тл, направленной "от нас". Найти количество теплоты, выделившейся в резисторе R_1 за время, в течение которого по нему проходит заряд 10 Кл при установившейся скорости стержня. Всеми остальными сопротивлениями пренебречь. Принять g =10 м/с^2.



5. На катушке с сопротивлением 8.2 Ом и индуктивностью 25 мГн поддерживается постоянное напряжение 55 В. Сколько энергии выделится при размыкании цепи катушки? Какая средняя э.д.с. самоиндукции появится при этом в катушке, если ток убывает в течение 12 мс.

6. На наклонной плоскости с углом α=60° уложены два параллельных массивных гладких рельса на расстоянии 0.5 м друг от друга, к которым присоединен источник с ЭДС 10 В и внутренним сопротивлением 0.05 Ом. Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле. Если положить на рельсы медный стержень массой 10 г и длиной 0.5 м, то он будет находиться в равновесии. Какова будет установившаяся скорость алюминиевого стержня той же массы и длины, если им заменить медный? Плотность меди $8.9 \cdot 10^3$ кг/м^3, алюминия $2.7 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление меди $1.6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, алюминия - $2.5 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.

Уравнение гармонических колебаний:

$$X = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (7.1)$$

где X - координата колеблющейся точки (смещение точки от положения равновесия); A - амплитуда колебаний (максимальное абсолютное значение координаты или смещения); ω - круговая (циклическая) частота; $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ - фаза колебаний в произвольный момент времени t; φ_0 - начальная фаза (при $t = t_0$).

Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v_X = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (7.2)$$

Ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$a_X = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (7.3)$$

Период колебания математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7.4)$$

где l - длина маятника; g - ускорение свободного падения.

Период колебания пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7.5)$$

где m – масса груза на пружине; k – жесткость пружины.

Полная энергия пружинного маятника:

$$E = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} + mgh + \frac{kX^2}{2} \qquad (7.6)$$

где m – масса колеблющегося тела; v – модуль его скорости в данный момент времени; h – высота тела относительно уровня, принятого за нулевой; k – коэффициент жесткости пружины; X – смещение тела (точки) от положения равновесия.

Связь длины волны λ со скоростью V ее распространения:

$$\lambda = \mathrm{v} \cdot T = \frac{\mathrm{v}}{\nu}, \qquad (7.7)$$

где T – период; ν - частота волны.

Период электромагнитных колебаний в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью C и катушки с индуктивностью L (формула Томсона),

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (7.8)$$

Гармонически изменяющийся магнитный поток приводит к возникновению гармонически изменяющейся ЭДС электромагнитной индукции

$$e_i = E_0 \cdot sin\ \omega t \qquad (7.9)$$

где $E_0 = B \cdot S \cdot \omega$ - амплитуда ЭДС, ω - циклическая частота; t - время.

<u>ПРИМЕР 7.1</u> Материальная точка массы *m* = 5 г совершает гармонические колебания с частотой ν = 0.5 Гц. Амплитуда колебаний *A* = 3см. Найти скорость v_1 точки и силу F_1, действующую на нее в момент времени, когда смещение точки X_1 = 1.5см

Дано:
m = 5 г = $5 \cdot 10^{-3}$ кг
ν = 0.5 Гц = 0.5 $с^{-1}$
A = 3 см = $3 \cdot 10^{-2}$ м
X_1= 1.5 см = $1.5 \cdot 10^{-2}$ м
v_1 - ? F_1 - ?

Решение: Уравнение гармонических колебаний запишем в виде:

$$X = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (1)$$

где ω - циклическая частота.

Формулу скорости точки получим, взяв первую производную от (1) по времени:

$$v = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Исключим из (1) и (2) время t, для чего возведём оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе - на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2A^2} = 1, \qquad (3)$$

откуда

$$v = \pm 2\pi\nu \cdot \sqrt{A^2 - X^2}.$$

В частности

$$v_1 = \pm 2\pi\nu \cdot \sqrt{A^2 - X_1^2}. \qquad (4)$$

Проверим размерность:

$$[v_1] = c^{-1} \cdot \sqrt{м^2} = \frac{м}{c}.$$

Производя вычисления по формуле (4), получим:

$$V_1 = \pm 8.2 \cdot 10^{-2} м = \pm 8.2 см.$$

Знак перед значением скорости указывает направление движения точки по отношению к направлению оси X. Нетрудно показать, что такой же результат получили бы, если бы в качестве исходного уравнения (1) воспользовались уравнением:

$$X = A \cdot \sin(\omega t + \varphi).$$

Силу, действующую на точку, найдём по второму закону Ньютона:

$$F = m \cdot a \,, \tag{5}$$

где m - масса материальной точки, a - её ускорение. Ускорение точки a найдём как первую производную по времени от скорости (2):

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)\,,$$

или с учётом (1):

$$a = -\omega^2 \cdot X\,,$$

или в частности:

$$a_1 = -\omega^2 \cdot X_1 = -4\pi^2\nu^2 \cdot X_1 \,. \tag{6}$$

Тогда на основании (5) с учётом (6) имеем:

$$F_1 = m \cdot a_1 = -4\pi^2\nu^2 \cdot m \cdot X_1 \,.$$

Проверим размерность:

$$[F_1] = \frac{1}{с^2} \cdot кг \cdot м = Н \,.$$

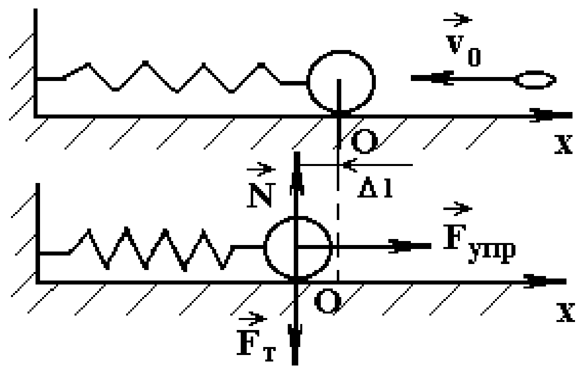
Производя вычисления, получим:

$$F_1 = -0.75 \text{ Н}$$

О значении знака " - " выше уже сказано.

ПРИМЕР 7.2 На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикреплённый к пружине жёсткостью k. В шар попадает горизонтально летящая пуля массы m и застревает в шаре. Скорость пули в момент удара $\vec{v}_0$, а направление её совпадает с осью пружины. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение колебаний системы. Силами трения и сопротивления воздуха пренебречь.

Решение:



Так как силами трения (а следовательно, и потерями энергии) можно пренебречь, то очевидно, что система будет совершать гармонические колебания вдоль оси X относительно положения равновесия (точка O на рисунке).

Внешние силы (сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила тяжести $\vec{F}_т$) работы не совершают, т.к. проекции их на ось X равны нулю. Следовательно, считая систему "шар с пулей - пружина " замкнутой, можно применить к ней закон сохранения механической энергии. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии поверхность стола. Кинетическая энергия, которой обладает шар (с пулей) сразу после удара, полностью перейдёт в энергию упругой деформации пружины в положении максимального сжатия. Тогда закон сохранения механической энергии, согласно (7.6), запишется в виде:

$$\frac{(m+M)\cdot u^2}{2} = \frac{k\cdot(\Delta l)^2}{2}, \qquad (1)$$

где u - модуль вектора скорости $\vec{u}$ шара (с пулей) сразу после удара, причём $\vec{u}\ \downarrow\uparrow\ \vec{v}_0$; Δl - абсолютная деформация пружины, которая и является максимальным смещением от положения равновесия, т.е. амплитудой колебаний. Из (1) получим:

$$A = \Delta l = u\cdot\sqrt{\frac{m+M}{k}}. \qquad (2)$$

Скорость u шара (с пулей) найдём из закона сохранения импульса, применив его к системе " пуля-шар " в проекциях на направление оси X:

$$m\cdot v_0 = (m+M)\cdot u_x$$

откуда

$$u_x = \frac{m\cdot v_0}{(m+M)}.$$

Тогда из (2) получим:

$$A = \frac{m\cdot v_0}{\sqrt{k\cdot(m+M)}}. \qquad (3)$$

Найдём круговую частоту ω колебаний. Для этого запишем уравнение второго закона Ньютона для шара (с пулей) в проекции на ось X:

$$F_{УПР} = (m+M)\cdot a_x.$$

Воспользуемся законом Гука:

$$F_{УПР} = -k\cdot\Delta l$$

и выражением (7.3) для ускорения a_x :

$$k\cdot\Delta l = (m+M)\cdot\omega^2\cdot A,$$

откуда, учитывая, что $\Delta l = A$, получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}} . \qquad (4)$$

Запишем уравнение колебаний (7.1) для начального момента времени (в момент удара), когда t =0:

$$X_0 = A \cdot \sin\varphi_0 = 0 .$$

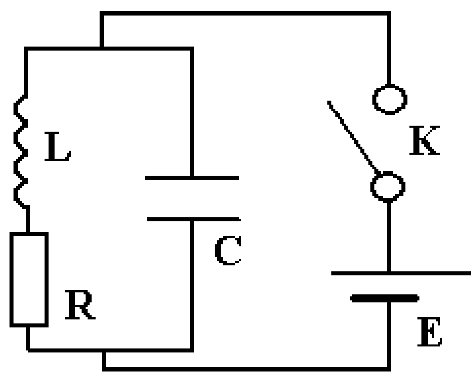
Отсюда выразим начальную фазу φ_0 :

$$\sin\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 .$$

Теперь, учитывая (3) и (4), составим уравнение колебаний системы, согласно (7.1):

$$X = \frac{m \cdot v_0}{\sqrt{k \cdot (m + M)}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m + M}} \cdot t\right)$$

<u>ПРИМЕР 7.3.</u> Колебательный контур, состоящий из катушки с индуктивностью L = 20 мкГн, конденсатора с ёмкостью C = 20 мкФ и резистора с сопротивлением R = 0.5 Ом, через ключ К подключён к источнику постоянной ЭДС E = 6 В (см. рис.). Первоначально ключ К замкнут. После установления стационарного режима ключ К размыкают. Пренебрегая затуханием колебаний вследствие наличия резистора R, найти длину волны электромагнитных волн, излучаемых контуром. Какое количество тепла выделится в катушке после размыкания ключа К ? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



<u>Дано:</u>

L = 20 мкГн = $2\cdot10^{-5}$ Гн
C = 20 мкФ = $2\cdot10^{-5}$ Ф
R = 0.5 Ом
E = 6 В

λ - ? Q - ?

<u>Решение:</u>

Воспользуемся формулами (7.7) и(7.8):

$$\lambda = c \cdot T \qquad (1)$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (2)$$

где c - скорость света в вакууме.

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\lambda = 2\pi c \cdot \sqrt{LC} .$$

Произведём вычисления:

$$\lambda = 2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5}} \approx 3.8 \cdot 10^4 \text{ м} .$$

При размыкании ключа К вся энергия, запасённая в контуре, выделится в виде теплоты:

$$Q = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}}\,, \qquad (3)$$

где $W_{м} = \dfrac{LJ^2}{2}$ - энергия магнитного поля катушки,

$W_{\text{эл}} = \dfrac{CE^2}{2}$ - энергия электрического поля конденсатора.

Силу тока J через катушку при замкнутом ключе (и при установившемся режиме) найдём по закону Ома для полной цепи:

$$J = \frac{E}{R}\,.$$

Тогда для количества теплоты Q из (3) находим:

$$Q = \frac{LE^2}{2R^2} + \frac{CE^2}{2} = \frac{E^2(L + C \cdot R^2)}{2R^2}\,.$$

Подставив числовые значения физических величин и выполнив несложные вычисления, получим:

Q = 3,6·10^{-3} Дж = 3,6 мДж

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

7.1 Уравнение колебаний точки имеет вид $X = A \cdot \cos\omega(t+\tau)$, где ω=6.28 с$^{-1}$, τ = 0.5 с. Определить период T и начальную фазу φ_0 колебаний.

[1 с; 3.14]

7.2 Точка совершает колебания по закону $X = A \cdot \cos\omega t$, где A = 5 см, ω = 2 с$^{-1}$. Найти модуль ускорения a точки в момент времени, когда его скорость v = 8 см/с.

[0.12 м/с^2]

7.3 Точка совершает колебания по закону $X = A \cdot \sin\omega t$. В некоторый момент времени смещение точки оказалось равным X_1=5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение стало равным X_2 = 8 см. Найти амплитуду колебаний.

[8.3 см]

7.4 Колебания материальной точки массой m = 0.1 г происходят согласно уравнению $X = A \cdot \cos\omega t$, где A = 5 см, ω=20 с$^{-1}$. Определить максимальные значения возвращающей силы F_m и кинетической энергии E_{km}.

[2 мН; 50 мкДж]

7.5 Часы с маятником на поверхности Земли спешат на Δt = 1.5 мин в сутки. На какой высоте над поверхностью Земли они будут идти верно? Считать известным радиус Земли $R_З$ = 6400 км.

[≈6.6 км]

7.6 От груза, висящего на упругой пружине жёсткости k= 980 Н/м, отрывается его часть массы m = 1 кг. На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза ?

[2 см]

7.7 На пружине подвешен груз массы M. Период колебаний системы T_1 = 0.5 с. После того как к пружине подвесили ещё один груз массы m , период колебаний пружины стал равным T_2 = 0.6 с. Определить удлинение пружины.

[2.7 см]

7.8 При отклонении из положения равновесия ареометр в сосуде с водой совершает гармонические колебания с периодом T_1 = 1 с. Каков будет период колебаний ареометра в керосине ?

[≈ 1.12 с]

7.9 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L = 1 мГн и воздушного конденсатора, состоящего из двух круглых пластин диаметром D = 20 см каждая. Какой длины электромагнитные волны излучает контур ?

[10.86 м]

7.10 Колебательный контур содержит конденсатор электроёмкостью C = 8 пФ и катушку индуктивностью L = 0.5 мГн. Каково максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока в контуре J_m = 40 мА ?

[317 В]

7.11 Действующее значение ЭДС в цепи переменного тока $E_д$ = 110 В. В цепь включают последовательно катушку индуктивностью L и резистор сопротивлением R = 1.5 Ом. Какова должна быть индуктивность катушки, чтобы действующее значение силы тока было равно $J_д$ = 30 А ?

[≈0.01 Гн]

7.12 Волна распространяется в упругой среде со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно Δx = 1 м. Определить частоту волны.

[50 Гц]

Контрольная работа № 7.

1. Точка совершает колебания по закону $X = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$, где A = 2 см, ω = 3.14 с$^{-1}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ рад. Построить графики зависимости от времени: 1) смещения $X(t)$; 2) скорости $\mathrm{v}(t)$; 3) ускорения $a(t)$.

2. Амплитуда колебаний математического маятника A = 4 см, максимальная скорость v_m = 0.2 м/с. Найти длину маятника.

3. Груз, подвешенный на двух последовательно соединённых одинаковых пружинах, совершает вертикальные колебания с периодом T_0 = 0.8 с. Каков будет период колебаний T груза, если пружины соединить параллельно ?

4. Колебательный контур, состоящий из плоского воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью S = 20 см^2 каждая и катушки с индуктивностью L = 5 мкГн, резонирует на волну длиной λ = 10 м. Определить расстояние d между пластинами конденсатора.

5. Волна распространяется в упругой среде со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно Δx = 1 м. Определить частоту ν колебаний.

6. Первичная обмотка трансформатора для питания накала электронной лампы имеет n_1 = 12000 витков и включена в сеть переменного тока с напряжением U_1 = 120 В. Какое число витков n_2 должна иметь вторичная обмотка, если ее сопротивление r = 0.5 Ом? Напряжение накала лампы U_2 = 3.5 В при токе J=1 А.

Контрольная работа № 7*.

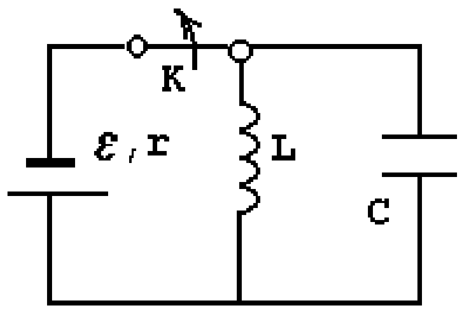
1. На горизонтальной пружине укреплено тело массой 10 кг, лежащее на абсолютно гладком столе. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой 10 г, летящая со скоростью 500 м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой 10 см. Написать уравнение колебаний.

2. В неподвижном лифте висит математический маятник, период колебаний которого T_1=1.0 с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний этого маятника стал равным T_2=1.1 с? В каком направлении движется лифт? Ускорение свободного падения g=9.8 м/с^2.

3. Чему равна разность фаз колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на 0.2 м, если волны распространяются со скоростью 2.4 м/с при частоте 3 Гц?

4. При изменении тока в катушке индуктивности на величину 2 А за 0.5 с в ней возникает ЭДС самоиндукции равная $4\cdot10^{-4}$ В. Какую длину будет иметь радиоволна, излучаемая генератором, контур которого состоит из этой катушки и плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого 10 мм, площадь пластины $6\cdot10^{-2}$ м^2, диэлектрическая проницаемость диэлектрика 8? Электрическая постоянная ε_0=8.85$\cdot10^{-12}$ Ф/м. Скорость электромагнитной волны в воздухе $c=3\cdot10^8$ м/с.

1. В схеме на рис. $\mathcal{E}$=2 В, r=1 Ом, L=1 мГн. После размыкания ключа К в схеме начинаются электромагнитные колебания. Найти период колебаний, если известно, что максимальное значение напряжения на конденсаторе составляет 3 В.



2. Первичная обмотка трансформатора имеет $2\cdot10^3$ витков. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, чтобы при напряжении на ее зажимах 10 В передавать во внешнюю цепь мощность 20 Вт? Сопротивление вторичной обмотки 0.4 Ом. Напряжение в сети 300 В.

ОПТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.

Абсолютный показатель преломления среды определяется формулой:

$$n = \frac{c}{v} \quad , \qquad (8.1)$$

где $\vec{a}$ - скорость света в вакууме; v - скорость света в данной среде.

Относительный показатель преломления двух различных сред определяется как

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad , \qquad (8.2)$$

где n_1 и n_2 - абсолютные показатели преломления указанных сред; v_1 и v_2 - скорости света в этих средах.

По закону преломления света на границе двух сред

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin r} \, , \qquad (8.3)$$

где i - угол падения светового луча в среде с абсолютным показателем преломления n_1; r - угол преломления в среде с n_2.

Предельный угол полного отражения:

$$\sin i_{ПР} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \qquad (8.4)$$

Если средой с n_2 является воздух ($n_2 \approx 1$), то предельный угол равен:

$$\sin i_{ПР} = \frac{1}{n_1} \quad . \qquad (8.4')$$

Формула тонкой линзы:

$$\pm \frac{1}{F} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} \quad , \qquad (8.5)$$

где F - фокусное расстояние линзы (для рассеивающей линзы $F < 0$); d - расстояние от оптического центра линзы до предмета (источника света); f - расстояние от оптического центра линзы до изображения (если оно мнимое, то $f < 0$).

Оптическая сила линзы:

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad , \qquad (8.6)$$

где n_2 и n_1 - абсолютные показатели преломления для материала линзы и окружающей среды; R_1 и R_2 - радиусы кривизны поверхностей линзы.
Для выпуклых (относительно предмета) поверхностей $R>0$, а для вогнутых $R<0$.

Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \qquad (8.7)$$

где H - линейный размер изображения предмета с линейным размером h.

Главные максимумы, полученные при помощи дифракционной решётки, определяются из условия:

$$d \cdot \sin \varphi = k \cdot \lambda, \qquad (8.8)$$

где d - постоянная решётки, φ - угол отклонения лучей, λ - длина падающей на решётку световой волны, k - порядковый номер максимума ($k = 0,1,2...$).

Энергия фотона:

$$\varepsilon = h \cdot \nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad (8.9)$$

где h - постоянная Планка, ν - частота света, λ - длина волны света, c - скорость света в вакууме.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m_e \cdot v_{max}^2}{2} = A + T_{max} \qquad (8.10)$$

где A - работа выхода электрона из вещества; T_{max} - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Красная граница фотоэффекта:

$$\nu_{кр} = \frac{A}{h} \quad \text{или} \quad \lambda_{кр} = \frac{hc}{A}, \qquad (8.11)$$

где $\nu_{КР}$ - минимальная частота (а $\lambda_{КР}$ - максимальная длина волны) света, при которой ещё возможен фотоэффект.

Масса релятивистской частицы:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (8.12)$$

где m_0 - масса покоя частицы, v - скорость частицы, c - скорость света в вакууме.

Связь между массой и энергией релятивистской частицы:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.13)$$

где $E_0 = m_0 \cdot c^2$ - энергия покоя частицы.

Дефект массы ядра:

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_я \quad (8.14)$$

или

$$\Delta m = Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n - m_A \quad (8.14')$$

где Z - число протонов в ядре (зарядовое число); A - массовое число; m_p - масса протона; m_n - масса нейтрона; $m_я$ - масса ядра; m_A - масса нейтрального атома; m_H - масса атома водорода.

Энергия связи ядра:

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2 \quad (8.15)$$

где c - скорость света в вакууме.

Энергия ядерной реакции:

$$Q = \left(\sum m_{0i} - \sum m_{0k}\right) \cdot c^2 \quad (8.16)$$

где $\sum m_{0i}$ - сумма масс покоя частиц до, а $\sum m_{0k}$ - после реакции, c - скорость света в вакууме.

ПРИМЕР 8.1 Собирающая линза с оптической силой

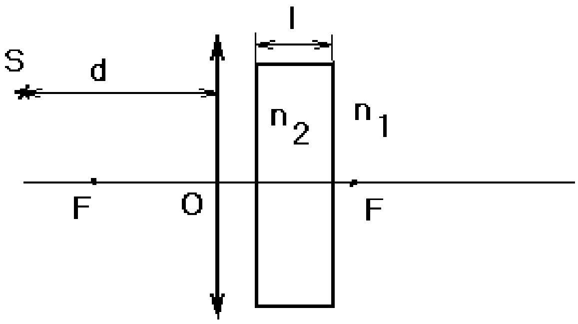
D = 5 дп и плоскопараллельная пластинка с показателем преломления n_2 = 1.5 и толщиной l = 18 см расположены параллельно друг другу (см. рис.) в среде с показателем преломления n_1=1.2. Слева от линзы на расстоянии d=60 см от неё находится светящаяся точка S. Где возникает изображение точки?

Дано:

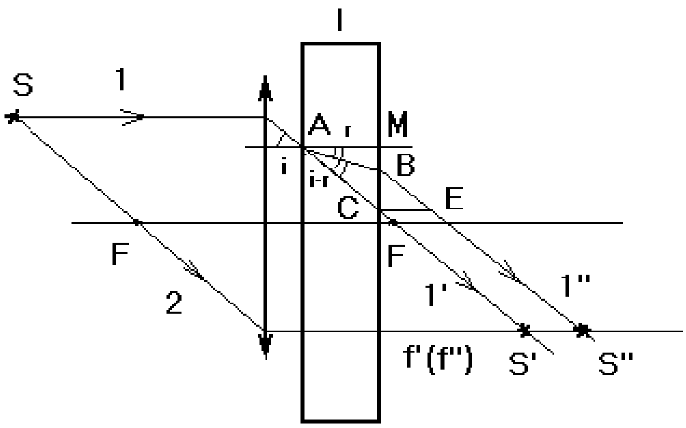
D = 5 дп
l = 18 см
n_1 = 1,2
n_2 = 1,5
d = 60 см

---

f'' - ?



Решение. Из рисунка видно, что в отсутствие пластинки, изображение точки S получилось бы в точке S′. Найдем расстояние f' от этой точки до линзы, воспользовавшись формулой линзы (8.5)



$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f'}$$

откуда

$$f' = \frac{d}{D \cdot d - 1} \qquad (1)$$

При внесении пластины, изображение смещается на расстояние S′S″ (см. рис.). Найдем это смещение. Пусть луч I после преломления падает на пластину под малым углом i в точке А. Рассмотрим треугольники: Δ CBE, Δ AMC и Δ AMB. Из первого треугольника имеем

$$BC = CE \cdot tg\, i$$

или , вследствие малости угла i $(tg\, i \approx \sin i \approx i)$

$$BC = CE \cdot i \qquad (2)$$

Из двух других треугольников получим:

$$BC = l \cdot tg\, i - l \cdot tg\, r \approx l(i - r) \qquad (3)$$

Угол преломления r выразим из закона преломления света (8.3)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{или} \qquad \frac{i}{r} = \frac{n_2}{n_1}$$

откуда

$$r = \frac{n_1}{n_2} \cdot i \quad . \qquad (4)$$

Решая совместно систему уравнений (2) - (4), получим

$$EC = l\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \quad . \qquad (5)$$

Но по построению $EC = S'S''$. Тогда из (1) и (5) найдём требуемое расстояние:

$$f'' = f' + S'S'' = \frac{d}{D \cdot d - 1} + l\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \; .$$

Произведём вычисления:

$$f'' = \frac{0.6}{5 \cdot 0.6 - 1} + 0.18 \cdot \left(1 - \frac{1.2}{1.5}\right) = 0.336 \text{ м} = 33.6 \text{ см}$$

Ответ: $f'' = 33.6$ см

ПРИМЕР 8.2 На дифракционную решётку нормально к её поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны λ = 510 нм. а) Найти угол, под которым на экране виден дифракционный максимум второго порядка. б) Определить общее число максимумов, которое даёт дифракционная решётка. Постоянная решётки d = 5 мкм.

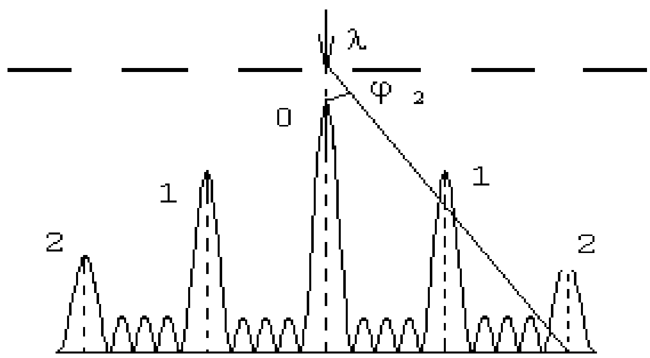
Дано:

λ = 510 нм = $5.1 \cdot 10^{-7}$ м

d = 5 мкм = $5 \cdot 10^{-6}$ м

k_2 = 2

φ_2 - ? N - ?



Решение: а) Воспользуемся условием дифракционных максимумов:

$$d \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda \qquad (1)$$

где d - постоянная дифракционной решётки, φ - угол отклонения лучей, k - порядок дифракционного максимума, λ - длина волны света, падающего на решётку (см. рисунок).
Из (1) находим:

$$\sin\varphi_2 = \frac{k_2 \cdot \lambda}{d}$$

или
$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{k_2 \cdot \lambda}{d}\right).$$

Производя вычисления, получим:

$$\varphi_2 \approx 12°$$

б) Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решёткой, вычислим сначала максимальное значение k_m, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решёткой не может превышать 90°.
На основании (1) имеем:

$$k_m = \frac{d \cdot \sin\varphi_m}{\lambda}, \qquad (2)$$

где $\sin\varphi_m = \sin 90° = 1$.
Тогда, подставляя значения d и λ в (2), получим:

$$k_m \approx 9.8$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, т.к. при этом значении $\sin\varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно,

$$k_m \approx 9. \qquad (3)$$

Влево и вправо от центрального максимума (k = 0) будет наблюдаться одинаковое число максимумов, равное k_m. Тогда общее число максимумов (с учётом центрального) будет равно

$$N = 2 \cdot k_m + 1.$$

Подставляя сюда значение k_m из (3),получим N = 19.

ПРИМЕР 8.3 Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U_з$ = 3 В. Фотоэффект начинается при частоте света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найти работу выхода $A_{вых}$ электрона из металла.

Дано:

$U_з = 3$ В
$\nu_0 = 6{\cdot}10^{14}$ Гц
$h = 6.64{\cdot}10^{-34}$ Дж·с

ν - ?

Решение: Согласно уравнению Эйнштейна для фотоэффекта (8.10):

$$h\nu = A_{вых} + T_{max} \quad (1)$$

где $h\nu$ - энергия падающего на металл фотона (h – постоянная Планка), T_{max} – максимальная кинетическая энергия вырванного из металла фотоэлектрона.

Согласно формуле (8.11), фотоэффект прекращается (или начинается) при условии:

$$h\nu_0 = A_{вых} \quad (2)$$

С другой стороны по условию задачи

$$T_{max} = |e| \cdot U_з \quad (3)$$

где e - заряд электрона ($|e| = 1.6{\cdot}10^{-19}$ Кл).
Подставляя (2) и (3) в исходное уравнение (1), получим

$$h\nu = h\nu_0 + |e| \cdot U_з$$

откуда

$$\nu = \nu_0 + \frac{|e| \cdot U_з}{h} \quad . \quad (4)$$

Проверим размерности в формулах (2) и (4):

$$[A_{eЫX}] = [h] \cdot [\nu_0] = 1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ с} \cdot 1 \text{ с}^{-1} = 1 \text{ Дж}$$

$$[\nu] = \frac{[e] \cdot [U_з]}{[h]} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}}{! \text{ Дж} \cdot 1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ с}} = 1 \text{ с}^{-1} = 1 \text{ Гц}$$ Произведём вычисления:

$$A_{вых} = 6.64{\cdot}10^{-34}{\cdot}6{\cdot}10^{14} \text{ Дж} = 4{\cdot}10^{-19} \text{ Дж}$$

или, учитывая, что 1 эВ = $1.6{\cdot}10^{-19}$ Дж, получим:

$$A_{вых} = 2.5 \text{ эВ}$$

$$\nu = 6 \cdot 10^{14} + \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3}{6.64 \cdot 10^{-34}} = 13 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$$

Ответ: $A_{вых} = 2.5$ эВ, $\nu = 1.3{\cdot}10^{15}$ Гц

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.1 Плоское зеркало в виде квадратной пластины со стороной $a = 1$ м расположено в вертикальной плоскости. На расстоянии h = 1.5 м от центра зеркала расположен небольшой предмет. Определить расстояние между предметом и изображением, которое получится после поворота зеркала вокруг горизонтальной оси на угол α = 30°.

[1.5 м]

8.2 Луч падает под углом α = 60° на стеклянную плоскопараллельную пластину толщиной d = 30 мм. Определить смещение луча после выхода из пластины.

[15.4 мм]

8.3 На грань стеклянной призмы с преломляющим углом φ = 60° падает луч света под углом α = 45°. Найти угол преломления луча при выходе из призмы и угол отклонения луча от первоначального направления.

[≈ 54°,≈ 39°]

8.4 На стеклянную пластину, имеющую показатель преломления n = 1.5, падает световой луч. Чему равен угол падения, если отражённый и преломлённый лучи взаимно перпендикулярны ?

[≈ 56°]

8.5 В сосуд налита вода высотой h = 20 см. На дне сосуда находится точечный источник света, а на поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластина, центр которой находится над источником. При каком минимальном диаметре пластины лучи света от источника не выйдут из воды ?

[≈ 0.44 м]

8.6 Объектив фотоаппарата имеет фокусное расстояние F=6 см. С какого расстояния сделан снимок башни высотой H= 12 м, если высота изображения на фотопластинке h = 36 см ?

[≈ 20 м]

8.7 Две тонкие собирающие линзы с общей главной оптической осью имеют фокусные расстояния F_1 = 10 см и F_2=12 см и расположены на расстоянии a = 35 см друг от друга. Предмет находится на расстоянии d_1 = 30 см от первой линзы. Определить расстояние между предметом и его изображением, а также линейное увеличение системы.

[95 см, 2.25 см]

8.8 В фокальной плоскости собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 30 см расположено плоское зеркало. С другой стороны линзы на расстоянии d = 45 см находится предмет. Где получится изображение предмета ?

[0.15 м от линзы]

8.9 Точечный источник света расположен на расстоянии l = 1 м от экрана. На каком расстоянии от источника света следует поместить собирающую линзу диаметром D_1=10 см и фокусным расстоянием F= 16 см, чтобы на экране был освещён круг диаметром D_2= 2.5 см ?

[0.85 м, 0.19 м]

8.10 На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием F_1 = 20 см падает параллельный пучок лучей, направленный параллельно главной оптической оси. На каком расстоянии от первой надо поставить вторую, собирающую линзу с фокусным расстоянием F_2 = 40 см, чтобы пучок света, пройдя систему линз, остался параллельным ?

[20 см]

8.11 Дифракционная решётка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонён на угол φ_1 = 14°. На какой угол отклонён максимум третьего порядка ?

[≈ 21°]

8.12 При освещении катода фотоэлемента светом длиной волны λ_1 = 600 нм, фототок прекращается полностью при задерживающей разности потенциалов $U_з$. При увеличении длины волны на 20 % задерживающая разность потенциалов уменьшается на $\Delta U_з$ = 0.5 В. Вычислить по этим данным постоянную Планка.

Контрольная работа № 8.

1. Луч света падает на горизонтально расположенное плоское зеркало под углом $\alpha = 30°$ к горизонту и отражается от него. Под каким углом к горизонту надо поставить второе зеркало, чтобы луч, отражённый от второго зеркала, составил угол $\beta = 60°$ с падающим на первое зеркало лучом ?

2. Пучок параллельных лучей падает на поверхность воды под углом $\alpha = 60°$. Какова ширина l пучка в воде, если ширина пучка в воздухе $l_0 = 10$ см ?

3. С помощью собирающей линзы получено чёткое изображение предмета на экране. Между линзой и экраном поместили плоскопараллельную пластину толщиной $l = 3$ см
с показателем преломления $n = 1.5$. На какое расстояние необходимо сдвинуть экран, чтобы вновь получить чёткое изображение предмета ?

4. Дифракционная решётка содержит $N = 200$ штрихов на 1 мм. На решётку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Найти максимальный угол φ_m отклонения лучей, соответствующий последнему дифракционному максимуму.

5. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_1=3.7$ В. При замене платиновой пластинки другой пластинкой надо приложить разность потенциалов $U_2 = 6$ В. Определить работу выхода для второй пластины.

6. Запишите ядерную реакцию соударения двух дейтронов между собой, в результате чего образуются две частицы, более легкая из которых нейтрон.

Контрольная работа № 8*.

1. Требуется осветить дно колодца, направив на него солнечные лучи. Как надо расположить плоское зеркало, если лучи Солнца падают к земной поверхности по углом 60°?

2. Точечный источник света расположен на расстоянии h=1.5 см от передней поверхности плоскопараллельной пластинки толщиной d=1.2 см, посеребренной с задней стороны. На каком расстоянии x от источника находится его изображение, получающееся в результате отражения лучей от задней поверхности пластинки? Показатель преломления вещества пластинки n=1.6. Наблюдение производится по направлению, перпендикулярному к пластинке. Для малых углов $sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$, где α измеряется в радианах.

3. На дне озера глубиной 2 м находится точечный источник света. Какого минимального радиуса круг может замаскировать такой источник света от наружного наблюдения?

4. С помощью линзы диаметром 5 см с фокусным расстоянием 4 см получено на экране уменьшенное в 5 раз изображение предмета AB. Светящаяся точка находится на главной оптической оси и на 20 см дальше от линзы, чем предмет. Найти диаметр пятна на экране, соответствующего этой точке.

5. Пластины двух одинаковых плоских конденсаторов сделаны: одна из алюминия (работа выхода A_1=5.44·10^{-19} Дж), другая из цинка (работа выхода A_2=6.4·10^{-19} Дж). Светом с длиной волны 100 нм освещается у одного из конденсаторов алюминиевая пластина, а у другого цинковая до тех пор, пока фотоэффект не прекращается. Затем попарно соединяются разноименно заряженные пластинки. Какое количество теплоты выделится при этом, если площадь пластин 100 см^2, расстояние между ними 1 мм?

6. Радиоактивный натрий $^{24}_{11}Na$ распадается с периодом полураспада 14.8 ч. Вычислить количество атомов, распавшихся в 1 мг данного радиоактивного препарата за 10 ч.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

МП1. О вычислениях.

Числовые значения величин, с которыми приходится иметь дело при решении физических задач, являются в основном приближёнными. Такими величинами в частности являются многие физические и математические константы (см. таблицы 1 и 2).

При вычислениях необходимо соблюдать следующие правила:

1. При сложении и вычитании приближённых чисел окончательный результат округляют, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из слагаемых.

Например:

1) $3.14 + \underline{2.5} + 4.236 = 9.876 \approx \underline{9.9}$

2) $\underline{9.31} + 8.1062 + 5.323 = 22.7392 \approx \underline{22.7}$

2. При умножении следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

Например:

$6.28 \cdot \underline{1.6} \cdot 2.7305 \approx 6.3 \cdot 1.6 \cdot 2.7 = 27.216 \approx \underline{27.2}$

В промежуточных результатах следует сохранять на одну значащую цифру больше. Аналогичные правила действуют и при делении приближённых чисел.

3. При возведении в степень в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени.

Например: $3.14^2 = 9.8596 \approx 9.86$

4. При извлечении корня в результате нужно брать столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении.

Например: $\sqrt{1.17 \cdot 10^{-6}} \approx 1.08 \cdot 10^{-3}$

5. При вычислении сложных выражений следует применять правила 1 - 4 в соответствии с видом производимых действий.

Например:

$$\frac{(3.2 + 17.062) \cdot \sqrt{3.7}}{5.1 \cdot 2.007 \cdot 10^3} \approx \frac{20.3 \cdot 1.92}{10.3 \cdot 10^3} \approx \frac{39.0}{10.3 \cdot 10^3} \approx 3.8 \cdot 10^{-3}.$$

В промежуточных результатах нужно сохранять на одну значащую цифру больше.

МП2. Некоторые постоянные (с точностью до 0.0001)

1)

$\pi = 3.1416$

$2\pi = 6.2832$

$\frac{\pi}{2} = 1.5702$

$\frac{\pi}{3} = 1.0472$

$\frac{\pi}{4} = 0.7854$

$\frac{\pi}{6} = 0.5236$

$\frac{1}{\pi} = 0.3183$

$\pi^2 = 9.8696$

$\pi^3 = 31.0063$

$\pi^4 = 97.4091$

$\sqrt{\pi} = 1.7725$

$\frac{\pi}{180} = 0.0175$

2)

$e = 2.7183$

$\frac{1}{e} = 0.3679$

$e^2 = 7.3891$

$\sqrt{e} = 1.6487$

$ln2 = 0.6931$

$ln3 = 1.0986$

$ln4 = 1.3863$

$ln5 = 1.6094$

$ln6 = 1.7918$

$ln7 = 1.9459$

$ln8 = 2.0794$

$ln9 = 2.1972$

$ln10 = 2.3026$

3)

$\sqrt{2} = 1.4142$

$\sqrt{3} = 1.7321$

$\sqrt{5} = 2.2361$

$\sqrt{6} = 2.4495$

$\sqrt{7} = 2.6458$

$\sqrt{8} = 2.8284$

$\sqrt{10} = 3.1623$

4)

$\frac{1}{3} = 0.3333$

$\frac{1}{6} = 0.1667$

$\frac{1}{7} = 0.1429$

$\frac{1}{9} = 0.1111$

$\frac{1}{12} = 0.0834$

5)

$\frac{1}{4!} = 0.0417$

$\frac{1}{5!} = 0.0083$

$\frac{1}{6!} = 0.0014$

$\frac{1}{7!} = 0.0002$

МП3. Формулы для приближённых вычислений

Если величина $x << 1$, то в первом приближении можно принять:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

$$(1 \pm x)^2 \approx 1 \pm 2x$$

$$\sqrt{1-x} \approx \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1+x} \approx \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1+\frac{x}{2}$$

$$e^{x} \approx 1+x$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

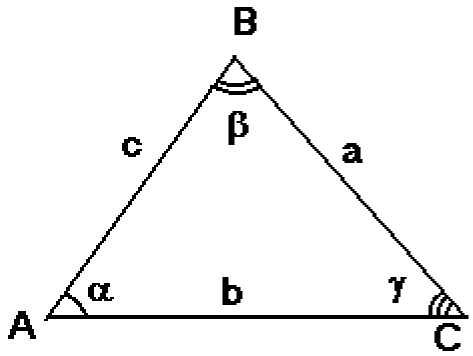
$$\sin x \approx tgx \approx x$$

Последняя формула верна при $x < 0.2$ рад (или $x < 10°$)

МП4. Треугольник

Сумма внутренних углов

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$



Теорема косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2a\cdot c\cdot\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

где R - радиус описанной окружности.

Длина медианы, проведённой из вершины А:

$$m_{\text{А}}=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

Длина высоты, проведённой из вершины А:

$$h_{\text{А}}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ - полупериметр.

Длина биссектрисы, проведённой из вершины А:

$$l_{\text{А}}=\frac{2\sqrt{b\cdot c\cdot p(p-a)}}{b+c}.$$

Площадь треугольника:

а) $S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_{\text{А}}=\dfrac{1}{2}b\cdot h_{\text{В}}=\dfrac{1}{2}c\cdot h_{\text{С}}$

б) $S=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma=\dfrac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$

в) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона)

г) $S=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R}=p\cdot r$,

где R - радиус описанной, а r - вписанной окружностей.

МП5. Прямоугольный треугольник.

Сумма острых углов

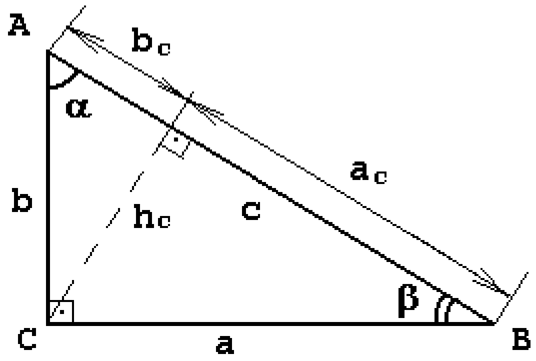
$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

Теорема Пифагора:

$$a^2+b^2=c^2.$$

Связь между сторонами и углами:

$$a=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\cos\beta,\quad (\sin\alpha=\cos\beta)$$
$$b=c\cdot\sin\beta=c\cdot\cos\alpha,\quad (\sin\beta=\cos\alpha)$$
$$a=b\cdot tg\alpha=b\cdot ctg\beta,\quad (tg\alpha=ctg\beta)$$
$$b=a\cdot tg\beta=a\cdot ctg\alpha,\quad (tg\beta=ctg\alpha)$$



Другие соотношения:

$$a^2=a_C\cdot c\;;$$
$$b^2=b_C\cdot c\;;$$
$$h_C^2=a_C\cdot b_C\;.$$

МП6. Параллелограмм

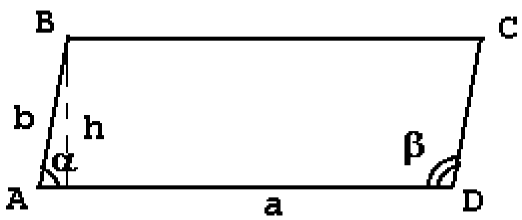
$$\alpha+\beta=\pi\;.$$

Площадь:

$$S=a\cdot h=a\cdot b\cdot\sin\alpha\;.$$

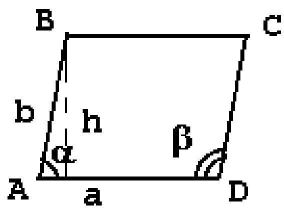
Свойство диагоналей:

$$|AC|^2+|BD|^2=2\left(a^2+b^2\right)$$



МП7. Ромб

$$\alpha+\beta=\pi$$
$$|AB|=|BC|=|CD|=|AD|=a$$
$$S=a\cdot h=a^2\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|$$



МП8. Трапеция

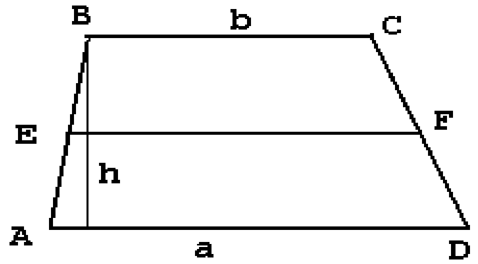
$|AD| \parallel |BC|$

Средняя линия:

$$|EF| = \frac{1}{2}(a+b)$$

Площадь:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = |EF| \cdot h$$



МП9. Окружность и круг.

Длина окружности:

$$L = 2\pi R = \pi \cdot d ,$$

где R - радиус окружности, d - её диаметр.

Длина дуги:

$$l = \alpha \cdot R ,$$

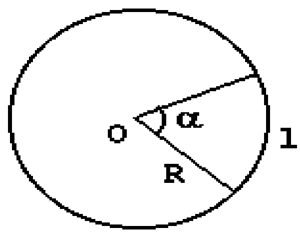
где α - центральный угол (в радианах).

Площадь круга:

$$S = \pi \cdot R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

Площадь сектора:

$$S_{\text{СЕК}} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \alpha .$$



МП10. Цилиндр

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{БОК}} = 2\pi R \cdot H ,$$

где R - радиус цилиндра, H - высота цилиндра.

Объём: $$V = \pi \cdot R^2 \cdot H .$$

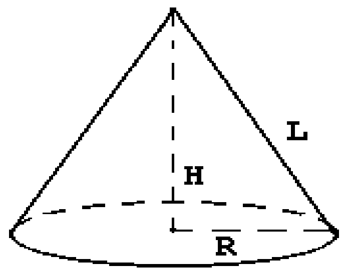
МП11. Конус

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{БОК}} = \pi R \cdot L .$$

Объём:

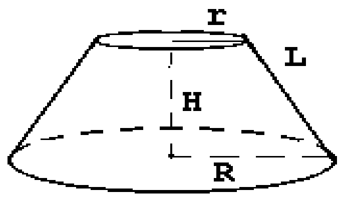
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H .$$



МП12. Усечённый конус

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{БОК}} = \pi(R + r) \cdot L\ .$$



Объём:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \cdot H\ .$$

МП13. Шар

Площадь поверхности:

$$S = 4\pi R^2,$$

где R - радиус шара.

Объём:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3\ .$$

Площадь сегментной поверхности:

$$S = 2\pi R \cdot H,$$

где H - высота шарового сегмента.

Объём шарового сегмента:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot H^2 \cdot (3R - H)\ .$$

Объём шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot R^2 \cdot H\ .$$

МП14. Пирамида

Объём: $$V = \frac{1}{3}S \cdot H,$$

где S - площадь основания, H - высота пирамиды.

МП15. Тригонометрические формулы

1. Некоторые значения тригонометрических функций.

α		sin α	cos α	tg α	ctg α
град	рад				
0	0	0	1	0	-
5	π/36	0.0872	0.9962	0.0875	11.43
10	π/18	0.1736	0.9848	0.1763	5.671
15	π/12	0.2588	0.9659	0.2679	3.732
20	π/9	0.3420	0.9397	0.3640	2.747
25	5π/36	0.4226	0.9063	0.4663	2.145
30	π/6	0.5000	√3/2	√3/3	√3
35	7π/36	0.5736	0.8192	0.7002	1.428
40	2 π/9	0.6428	0.7660	0.8391	1.192
45	π/4	√2/2	√2/2	1	1
90	π/2	1	0	-	0
180	π	0	-1	0	-
270	3π/2	-1	0	-	0

2. Формулы приведения.

α	sin α	cos α	tg α	ctg α
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	cos α	sin α	ctg α	tg α
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	cos α	- sin α	- ctg α	- tg α
$\pi-\alpha$	sin α	- cos α	- tg α	- ctg α
$\pi+\alpha$	- sin α	- cos α	tg α	ctg α
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	- cos α	- sin α	ctg α	tg α
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	- cos α	sin α	- ctg α	- tg α
$2\pi-\alpha$	- sin α	cos α	- tg α	- ctg α
$2\pi+\alpha$	sin α	cos α	tg α	ctg α
$-\alpha$	- sin α	cos α	- tg α	- ctg α

3. Основные тригонометрические соотношения

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{ctg\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{tg\alpha}$$

(Выбор знака перед корнем зависит от того, в какой четверти находится угол α).

4. Формулы сложения.

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$; $\quad ctg(\alpha+\beta) = \dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}$;

$tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$; $\quad ctg(\alpha-\beta) = \dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$.

2) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; $\quad ctg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$;

$tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; $\quad ctg\alpha - ctg\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

5. Формулы умножения.

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

6. Формулы двойного, тройного и половинного угла.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}\ ; \qquad tg3\alpha = \frac{3 \cdot tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3 \cdot tg^2\alpha}\ ;$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^2\alpha\ ;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\ ;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}\ ; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\ ;$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\ ;$$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}\ ; \qquad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}\ ;$$

$$tg\alpha = \frac{2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}\ ; \qquad ctg\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}}\ .$$

7. Преобразование степеней функций.

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)\ ; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)\ ;$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)\ ; \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)\ ;$$

$$sin^4\alpha = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)\ ;$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)\ .$$

8. Некоторые полезные неравенства.

1) $\sqrt{a \cdot b} \le \dfrac{a+b}{2}$;

$\dfrac{2a \cdot b}{a^2 + b^2} \le 1 \qquad (a > 0\ ;\ b > 0)$;

$a + \dfrac{1}{a} \ge 2 \qquad (a > 0)$;

$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad (a \ge 0\ ;\ b \ge 0)$;

$(1+h)^n \ge 1 + n \cdot h \qquad (h > -1)$;

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

$1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \qquad (n > 1)$

2) $|\,a+b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$

$|\,a-b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$

$|\,a+b\,| \ge |\,a\,| - |\,b\,|$

$|\,a-b\,| \ge |\,a\,| - |\,b\,|$

ФП1.Основные физические постоянные (округлённые значения).

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	**g**	9.81 м/с^2
Гравитационная постоянная	**G**	$6.67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Постоянная Авогадро	$\mathbf{N_A}$	$6.02\cdot10^{23}$ моль
Универсальная газовая постоянная	**R**	8.31 Дж/(моль·К)
Стандартный объём*	$\mathbf{V_m}$	$22.4\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	**k**	$1.38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	**e**	$1.60\cdot10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	**c**	$3.00\cdot10^{8}$ м/с
Постоянная Стефана - Больцмана	σ	$5.67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)
Постоянная закона смещения Вина	**b**	$2.90\cdot10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	**h**	$6.63\cdot10^{-34}$ Дж·с
Атомная единица массы	**а.е.м.**	$1.66\cdot10^{-27}$ Дж (13.6 эВ)
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м

* - Молярный объём идеального газа при нормальных условиях.

ФП2. Некоторые астрономические величины.

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6.37\cdot10^{6}$ м
Масса Земли	$5.98\cdot10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6.95\cdot10^{8}$ м
Масса Солнца	$1.98\cdot10^{30}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1.49\cdot10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3.84\cdot10^{8}$ м

ФП3. Плотность твёрдых тел.

Твёрдое тело	Плотность, кг/м^3	Твёрдое тело	Плотность, кг/м^3
Алюминий	$2.70 \cdot 10^3$	Медь	$8.93 \cdot 10^3$
Барий	$3.50 \cdot 10^3$	Никель	$8.90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6.02 \cdot 10^3$	Свинец	$11.3 \cdot 10^3$
Висмут	$9.80 \cdot 10^3$	Серебро	$10.5 \cdot 10^3$
Железо	$7.88 \cdot 10^3$	Цезий	$1.90 \cdot 10^3$
Литий	$0.53 \cdot 10^3$	Цинк	$7.15 \cdot 10^3$

ФП4. Плотность жидкостей.

Жидкость	Плотность, кг/м^3	Жидкость	Плотность, кг/м^3
Вода (при 4°С)	$1.00 \cdot 10^3$	Сероуглерод	$1.26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1.26 \cdot 10^3$	Спирт	$0.80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13.6 \cdot 10^3$		

ФП5. Диэлектрическая проницаемость.

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Вода	81	Парафин	2.0
Масло трансформаторное	2.2	Стекло	7.0

ФП6. Удельное сопротивление металлов.

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Железо	$9.8 \cdot 10^{-8}$	Нихром	$1.1 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1.7 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1.6 \cdot 10^{-8}$

ФП7. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования.

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	**Э**	10^{18}	**деци**	**д**	10^{-1}
пэта	**П**	10^{15}	**санти**	**с**	10^{-2}
тера	**Т**	10^{12}	**милли**	**м**	10^{-3}
гига	**Г**	10^{9}	**микро**	**мк**	10^{-6}
мега	**М**	10^{6}	**нано**	**н**	10^{-9}
кило	**к**	10^{3}	**пико**	**п**	10^{-12}
гекто	**г**	10^{2}	**фемто**	**ф**	10^{-15}
дека	**да**	10^{1}	**атто**	**а**	10^{-18}

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1*. Перышкин А.В., Родина Н.А. Физика.- Учебник для 7-8 классов средней школы.- М.Просвещение.
2*. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика. Учебник для 9 класса средней школы.- М.Просвещение.
3*. Буховцев Б.В., Климонтович Ю.Л., Мякишев Г.Я. Физика. Учебник для 10 класса средней школы.-М.Просвещение.
4*. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.В. Физика. - Учебник 11 класса средней школы.-М.Просвещение.
5*. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики.т.1.- М.Высшая школа.
6. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. Учебное пособие для поступающих в вузы. - М.Высшая школа, 1975.
7. Задачи по физике для поступающих в вузы./Г.А.Бендриков и др. - М.Наука,1985.
8. Задачи по физике:Учеб.пособие./Под ред.О.Я.Савченко. - 2-е изд., - М.Наука,1988.
9. Савченко Н.Е. Решение задач по физике. - Мн.Вышэйшая школа, 1999.
10*. Мясников С.П., Осанова Т.Н. Пособие по физике для подготовительных отделений. - Мн. Вышэйшая школа.
11. Сборник задач по элементарной физике./Под ред. Б.В.Буховцева.- М.Наука,1987.
12. В.А.Балаш. Задачи по физике и методы их решения. - М.Просвещение,1983.
13. Луцевич А.А. и др.Решение задач по механике и молекулярной физике.- Мн.Нар.асвета,1989.

Дополнительная

1. Бутиков Е.И.,Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика для поступающих в вузы.- М.Наука,1978.
2. Павленко Ю.Г. Начала физики.- Изд-во МГУ,1988.
3. Бутиков Е.И.,Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах. - М.Наука,1979.
4. Сборник задач по физике./Под ред.Козела С.М. - М.Наука,1990.
5. Сборник задач и вопросов по физике./Под ред.Гладковой Р.А.- М.Наука,1988.
6. Шаскольская М.П.,Эльцин И.А. Сборник задач по физике. -М.Наука,1986.
7. Меледин Г.В. Физика в задачах. - М.Наука,1985.
8. Подготовительные задачи к олимпиадам по физике./Под ред. Кембровского Н.И. - Минск,1984.
9. Слободецкий И.Ш.,Асламазов Л.Г. Задачи по физике. - М.наука, 1981.

* - имеется в виду последнее издание книги.